ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

Λύσεις των θεμάτων

Έκδοση 3η (30/05/2013, 23 : 10)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών του Δικτυακού Τόπου

mathematica.gr

με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=37283

Συνεργάστηκαν οι:
Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Στάθης Κούτρας, Χρήστος Κυριαζής,
Γρηγόρης Κωστάκος, Δημήτρης Ιωάννου, Βαγγέλης Μουρούκος,
Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς,
Γιώργος Ρίζος, Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος, Χρήστος Τσιφάκης,
Κώστας Τηλέγραφος, Σωτήρης Χασάπης,

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho, \rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in IR$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Η απόδειξη βρίσκεται στις σελίδες 334-335 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Το θεώρημα βρίσκεται στη σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Ο ορισμός βρίσκεται στη σελίδα 222 του σχολικού βιβλίου. Από : "Η f είναι παραγωγίσιμη ... , μέχρι $\lim\limits_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in IR$ "

Α4.
α) **Λ**
β) **Σ**
γ) **Σ**
δ) **Λ**
ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο K(2, 0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\le 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + βw + γ = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $β, γ \in \mathbb{R}$, και

$$|\text{Im}(z_1)-\text{Im}(z_2)|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $α_o$, $α_1$, $α_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$$ν^3 + α_2 ν^2 + α_1 ν + α_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι: $|ν|<4$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

B1. Επειδή $(z-2)(\overline{z}-2)=(z-2)\left(\overline{z-2}\right)=|z-2|^2$, η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|z-2|^2+|z-2|-2=0$$

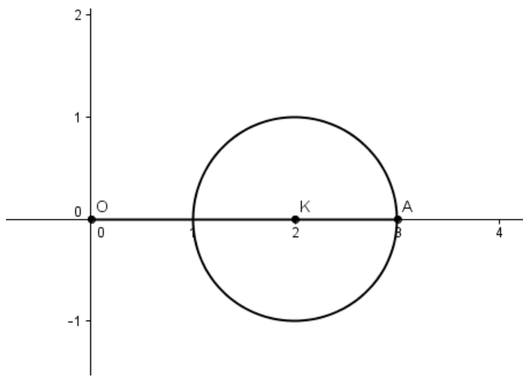
Θέτουμε

$$|z-2|=w\in[0,+\infty) \qquad (1),$$

οπότε η δοσμένη σχέση γράφεται $w^2+w=2$, με λύσεις $w=1$, $w=-2<0$ και λόγω της (1) έχουμε $w=1$, άρα $|z-2|=1$.

Επομένως ο γ. τ. των M(z) είναι κύκλος με κέντρο το K(2, 0) και ρ = 1.

Αφού το $|z|$ είναι η απόσταση του M(z) από το O(0,0) η μέγιστη απόσταση είναι η $|\overline{OA}|=OK+KA=2+1=3$. Άρα $|z|\le 3$



Β2. Αφού οι μιγαδικοί z_1 , z_2 είναι μη πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $w^2 + βw + γ = 0$ με $β, γ \in IR$, λόγω της συνθήκης $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$, είναι συζυγείς μιγαδικοί, έχουν μορφή $z_1 = x + yi$ και $z_2 = x - yi$

Οπότε

$$|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |y + y| = 2 \Leftrightarrow 2|y| = 2 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1.$$

Αφού οι εικόνες των z_1 , z_2 ανήκουν στον κύκλο $(x-2)^2 + y^2 = 1$, θα είναι

$$(x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους Vieta , έχουμε

$$S = z_1 + z_2 = 2Re(z_1) = -β = 4 \Rightarrow β = -4,$$

$$P = z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = 5 \Rightarrow γ = 5.$$

Β3.

Είναι $v^3 = -α_2 v^2 - α_1 v - α_0$ επομένως:

$$|v|^3 = |α_2 v^2 + α_1 v + α_0| \le |α_2||v|^2 + |α_1||v| + |α_0| \le 3|v|^2 + 3|v| + 3$$

Αν υποθέσουμε ότι $|v| \ge 4$ τότε

$$|v|^3 \ge 4|v|^2 = 3|v|^2 + |v||v| \ge 3|v|^2 + 4|v| = 3|v|^2 + 3|v| + |v| \ge 3|v|^2 + 3|v| + 4 \text{, άτοπο.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g : IR \to IR$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in IR$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in IR$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{π}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{π}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{π}{4}\right) εφx_0$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = f(x) + x, x \in IR$

Η h είναι συνεχής ως άθροισμα της παραγωγίσιμης (άρα συνεχούς) f και της ταυτοτικής.
Είναι $h(0)=f(0)=1$ και η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$h(x)h'(x)=x \text{ αφού } h'(x)=f'(x)+1, \text{ για κάθε } x\in IR$$

Πολλαπλασιάζοντας επί δύο έχουμε ισοδύναμα για κάθε $x\in IR$

$$2h(x)h'(x)=2x \Leftrightarrow \left[h^2(x)\right]'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow h^2(x)=x^2+c,\ c\in IR$$

Θέτοντας όπου $x=0$ έχουμε: $c=h^2(0)=1$ επομένως

$$h^2(x)=x^2+1>0 \ \Rightarrow\ h(x)\neq 0, \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Επειδή η h είναι συνεχής και δε μηδενίζεται από κανέναν πραγματικό αριθμό, θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $h(x)>0$ αφού $h(0)=1>0$.
Επομένως ισχύει για κάθε $x\in IR$

$$h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x.$$

Γ2. Είναι $x^2+1>x^2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in IR$

Με $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \overset{f(x)>0,\sqrt{x^2+1}>0}{\Rightarrow} f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in IR$$

και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα "1-1".
Έτσι έχουμε:

$$f(g(x))=1 \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} f(g(x))=f(0) \overset{f:\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο IR (τύπος πολυωνυμικής) με

$$g'(x)=\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)' \Rightarrow g'(x)=3x^2+3x.$$

Οπότε

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+3x=0 \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1$$

και από το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτει ότι

$g'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$

και με g συνεχή στο IR προκύπτει ότι:
η g είναι γνησίως αύξουσα
στα διαστήματα $(-\infty,-1],[0,+\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Με $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\quad g(-1)=-\dfrac{1}{2}<0$, $g(0)=-1<0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ προκύπτει ότι ότι στο διάστημα $(-\infty,0]$ το ολικό μέγιστο της g είναι $-\frac{1}{2}<0\Rightarrow g(x)<0\Rightarrow g(x)\neq 0$ και συνεπώς η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(-\infty,0]$.

Με g γνησίως αύξουσα και συνεχή στο $[0,+\infty)$ προκύπτει ότι

$$g\big([0,+\infty)\big)=\Big[g(0),\lim_{x\to+\infty} g(x)\Big)=[-1,+\infty)$$

που περιέχει και το μηδέν,

άρα υπάρχει ένα (μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g στο $[0,+\infty)$) $x_0\in(0,+\infty)$

για το οποίο είναι $g(x_0)=0$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f\big(g(x)\big)=1$ έχει μία λύση και μάλιστα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(x-\frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi x$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ αφού προκύπτει από πράξεις συνεχών και για την οποία ισχύουν

$$k(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(-\frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi 0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0 \text{ διότι } -\frac{\pi}{4}<0.$$

Αφού $x\geq 0$ και $\sqrt{x^2+1}>x$, τότε $x^2+1>x^2\Leftrightarrow 1>0$, που ισχύει, άρα $f(x)>0$

και

$$k\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^0 f(t)dt-f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1<0$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$k(x_0)=0\Leftrightarrow\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt-f(x_0-\frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi x_0=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to IR$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$, $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο IR

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \qquad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ \ x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\ell\in IR$$

Για $h\neq 0$ είναι:

$$\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\frac{f(1+5h)-1-f(1-h)+1}{h}=$$

$$=\frac{f(1+5h)-1}{h}-\frac{f(1-h)-1}{h}=5\cdot\frac{f(1+5h)-1}{5h}+\frac{f(1+(-h))-1}{-h}$$

Είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-1}{5h}=\lim_{k\to 0}\frac{f(1+k)-1}{k}=\ell$$

και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+(-h))-1}{-h}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(1+\varepsilon)-1}{\varepsilon}=\ell$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-1}{5h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1+(-h))-1}{-h}=5\ell+\ell=6\ell$$

Επομένως,

$$6\ell=0\Leftrightarrow \ell=0 \text{ δηλαδή } f'(1)=0$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα έχουμε:

- Αν $0<x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$

- Αν $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Επομένως, η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=1$

Δ2. Η συνάρτηση $\phi(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η g ορίζεται και θα είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι: $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1} > 0$ γιατί $x > 1$ και $f(x) > f(1) = 1$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_x^{x+1} g(u)\,du$ με $x \in (1,+\infty)$.

Είναι $G(x) = \int_x^{\alpha} g(u)\,du + \int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du = \int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du - \int_{\alpha}^{x} g(u)\,du$, με $\alpha > 1$.

Η συνάρτηση $G_1(x) = \int_{\alpha}^{x} g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ γιατί η g είναι συνεχής σ΄αυτό.

Η συνάρτηση $G_2(x) = \int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ γιατί είναι σύνθεση της $h(x) = x+1$ με την $G_1(x)$.

Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι

$$G'(x) = g(x+1)(x+1)' - g(x) = g(x+1) - g(x) > 0,$$

αφού η g είναι γνησίως αύξουσα και $x+1 > x$.

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Είναι $8x^2+5 > 1$ και $2x^4+5 > 1$ οπότε:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du \Leftrightarrow G(8x^2+5) > G(2x^4+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 8x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4) < 0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (0,2)$$

ΣΧΟΛΙΟ:

Από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης για τυχαία x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 < x_2$ παίρνουμε $f(x_1) < f(_2)$. Ωστόσο ισχύει και το αντίστροφο: Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_1) < f(x_2)$ τότε $x_1 < x_2$.
Η απόδειξη είναι πολύ απλή με τη την απαγωγή σε άτοπο: Αν υπήρχε ζεύγος x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $f(x_1) < f(x_2)$ ώστε να ισχύει $x_1 \geq x_2$ τότε αν ήταν $x_2 < x_1$ θα είχαμε $f(x_2) < f(x_1)$, άτοπο ενώ αν ήταν $x_1 = x_2$ τότε από τον ορισμό της συνάρτησης θα είχαμε επίσης $f(x_1) = f(x_2)$, άτοπο. Άρα $x_1 < x_2$.

Δ3. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$, γιατί η $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$g''(x) = \frac{\left(f(x)-1\right)'(x-1) - \left(f(x)-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$.
Επομένως, από το θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\xi < x \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) < f'(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x) - 1 < f'(x)(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x)(x-1) - f(x) + 1 > 0$$

Άρα $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, δηλαδή η g είναι κυρτή.

Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $(\alpha - 1)g(x) = \left(f(\alpha) - 1\right)(x - \alpha)$ με $x > 1$.
Η εξίσωση έχει προφανή λύση την $x = \alpha$.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $x = \alpha$ είναι:

$$y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha - 1}(x - \alpha).$$

Επειδή η g είναι κυρτή, για $x \neq \alpha$, θα έχουμε:

$$g(x) > y \Rightarrow g(x) > \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Rightarrow (\alpha-1)g(x) > \left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha) \text{ αφού } \alpha > 1.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την $x = \alpha$

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B1.

2η ΛΥΣΗ:

(Με τριγωνική ανισότητα):

$$|z| - 2 \leq \left||z| - 2\right| \leq |z - 2| = 1 \Rightarrow |z| \leq 3$$

ή εναλλακτικά

$$|z| = |(z-2) + 2| \leq |z-2| + |2| = 1 + 2 = 3.$$

3η ΛΥΣΗ:

(Αλγεβρικά)

Είναι $|z - 2| = 1$, Έστω $z = x + yi$. Τότε :

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - (x-2)^2 \Rightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 4x - 3 \leq 9$$

και :

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4x - 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4x - 3} \Rightarrow |z| \leq \sqrt{9} = 3$$

Β2.

2η ΛΥΣΗ:

Αφού $|z_i-2|=1$ ισχύει $|\mathrm{Im}(z_i)|\le 1$ για $i=1,\ 2$.

Είναι

$$2=|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|\le|\mathrm{Im}(z_1)|+|\mathrm{Im}(z_2)|\le 1+1=2\,,$$

συνεπώς, ισχύουν οι ισότητες $|\mathrm{Im}(z_1)|=|\mathrm{Im}(z_2)|=1$.

Έτσι, αφού $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$, θα πρέπει $\mathrm{Im}(z_1)=1$ και $\mathrm{Im}(z_2)=-1$, ή $\mathrm{Im}(z_1)=-1$ και $\mathrm{Im}(z_2)=1$, άρα οι z_1,z_2 είναι συζυγείς.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου, βρίσκουμε

$$z_1=2+i,\ z_2=2-i \text{ ή } z_1=2-i,\ z_2=2+i$$

Οπότε, από τύπους του Vieta ισχύουν οι ισότητες $\beta=-(z_1+z_2)=-4$ και $\gamma=z_1z_2=|z_1|^2=5$.

Β2.

3η ΛΥΣΗ:

Η ποσότητα $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|$ εκφράζει το μήκος της προβολής της χορδής με άκρα τις εικόνες των δύο μιγαδικών, στον φανταστικό άξονα. Η προβολή αυτή έχει μήκος 2 μόνο στην περίπτωση που οι εικόνες των z_1,z_2 ορίζουν διάμετρο παράλληλη στον φανταστικό άξονα, δηλαδή $z_1=2+i, z_2=2-i$.

Β2.

4η ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση $w^2+\beta w+\gamma=0$ έχει μιγαδικές μη πραγματικές ρίζες αφού $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$

Συνεπώς $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$ και οι ρίζες είναι $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{\Delta}}{2}$.

Τότε

$$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=\left|\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}-\frac{-\sqrt{-\Delta}}{2}\right|=|\sqrt{-\Delta}|=\left|\sqrt{4\gamma-\beta^2}\right|=\sqrt{4\gamma-\beta^2}\,,$$

οπότε

$$\sqrt{4\gamma-\beta^2}=2\Leftrightarrow 4\gamma=4+\beta^2 \qquad (1).$$

Επίσης ισχύει

$$|z_{1,2}-2|=1\Leftrightarrow\left|\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}-2\right|=1\Leftrightarrow|(-\beta-4)\pm i\sqrt{-\Delta}|=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-\beta-4)^2+\sqrt{-\Delta}^2=4\Leftrightarrow\beta^2-8\beta+16+4\gamma-\beta^2=4\Leftrightarrow 8\beta+4\gamma+12=0 \quad (2).$$

Αντικαθιστώντας στην (2) την (1) βρίσκουμε $8\beta+4+\beta^2+12=0\Leftrightarrow(\beta+4)^2=0 \Rightarrow \beta=-4$, οπότε λόγω της (1) βρίσκουμε $\gamma=5$.

Β3.

2η ΛΥΣΗ:

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|v|^3\le 3|v|^2+3|v|+3$.

Θεωρώ την $f(x)=x^3-3x^2-3x-3$

οπότε

$$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)$$
$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1+\sqrt{2} \ , \ \text{ή} \ \ x\leq 1-\sqrt{2}$$

άρα για $x\geq 4$ είναι γνησίως αύξουσα με $f(4)=1>0$

Όμως, αφού έχουμε ότι $f\left(|v|\right)\leq 0$ θα είναι $|v|<4$.

3η ΛΥΣΗ:

$|v|^3\leq 3(|v|^2+|v|+1)$

Αν $|v|\leq 1$ τότε,

$$|v|^3\leq 9|v|^3=3|v|^3+3|v|^3+3|v|^3\leq 3|v|^2+3|v|+3=3\left(|v|^2+|v|+1\right)$$

οπότε η σχέση ισχύει .

Αν $|v|>1$ τότε έχουμε :

$$|v|^3\leq 3\frac{|v|^3-1}{|v|-1}\Rightarrow |v|^4\leq 4|v|^3-3<4|v|^3\Rightarrow |v|<4$$

4η ΛΥΣΗ:

Είναι: $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0\Rightarrow v^3=-\left(\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow |v^3|=\left|-\left(\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0\right)\right|\Rightarrow |v|^3=|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0|\leq|\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v|^3\leq 3|v|^2+3|v|+3\Rightarrow |v|^3<3|v|^2+3|v|+4\Rightarrow |v|^3-3|v|^2-3|v|-4<0.$$

Η τελευταία ανίσωση γράφεται ισοδύναμα (π.χ. με σχήμα Horner για $\rho=4$)

$$\left(|v|-4\right)\left(|v|^2+|v|+1\right)<0,$$

κι αφού $|v|^2+|v|+1>0$ (ως τριώνυμο του $|v|$ με $\Delta=-3<0$) θα είναι $|v|<4$.

5η ΛΥΣΗ:

$$1+\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}=0\Rightarrow -1=\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}\Rightarrow 1\leq\frac{|\alpha_2|}{|v|}+\frac{|\alpha_1|}{|v|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \quad (1)$$

Αν τώρα $|v|\geq 4$, από $(1)\Rightarrow 1\leq\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$, άτοπο

6η ΛΥΣΗ:

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|v|^3\leq 3|v|^2+3|v|+3$.

Άρα

$$|v|^3 \le 3|v|^2+3|v|+3 \Leftrightarrow |v|^3-1 \le 3\left(|v|^2+|v|+1\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|v|^3-1}{|v|^2+|v|+1} \le \frac{3\left(|v|^2+|v|+1\right)}{|v|^2+|v|+1}-\frac{1}{|v|^2+|v|+1}$$

$$\Leftrightarrow |v|-1 \le 3-\frac{1}{|v|^2+|v|+1} \Leftrightarrow |v|-4 \le -\frac{1}{|v|^2+|v|+1}$$

Επειδή το δεξί μέλος της ανισότητας είναι αρνητικό, θα πρέπει να είναι αρνητικό και το αριστερό μέρος οπότε θα πρέπει $|v|<4$.

7η ΛΥΣΗ:

Αρχικά είναι $|v|^3 \le 3\left(|v|^2+|v|+1\right) \Rightarrow |v|^2\left(|v|-3\right) \le 3\left(|v|+1\right)$

Έστω ότι $|v| \ge 4$

Έτσι λοιπόν έχουμε: $\begin{cases} |v|^2 \ge 16 \\ |v|^2 \le \dfrac{3\left(|v|+1\right)}{|v|-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |v|^2 \ge 16 \\ \dfrac{3\left(|v|+1\right)}{|v|-3} \ge 16 \Rightarrow |v| \le \dfrac{51}{13} \end{cases}$ άτοπο, λόγω της δεύτερης σχέσης.

8η ΛΥΣΗ:

Έστω $|v| \ge 4$.

Η σχέση γράφεται $v^3-\alpha_2 v^2+\alpha_1 v=-\alpha_0 \Leftrightarrow v\left(v^2+\alpha_2 v+\alpha_1\right)=-\alpha_0$

Οπότε:

$$|\alpha_0|=\left|v\left(v^2+\alpha_2 v+\alpha_1\right)\right|=|v|\cdot\left|\left(v^2+\alpha_2 v\right)+\alpha_1\right| \ge$$

$$\ge |v|\left(\left|\left(v^2+\alpha_2 v\right)\right|-|\alpha_1|\right)=|v|\left(\left|v\left(v+\alpha_2\right)\right|-|\alpha_1|\right)=|v|\left(|v|\cdot|v+\alpha_2|-|\alpha_1|\right) \ge$$

$$\ge |v|\left[|v|\left(|v|-|\alpha_2|\right)-|\alpha_1|\right] \ge 4\left[4\left(4-3\right)-3\right]=4$$

που είναι άτοπο.

Άρα $|v|<4$. Χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την ανίσωση $|z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2|$

9η ΛΥΣΗ:

Έστω ότι $|v| \ge 4$.

Είναι

$$v^3+\alpha_2 v^2=-\alpha_1 v-\alpha_o \quad \Rightarrow \left|v^3+\alpha_2 v^2\right|=|\alpha_1 v+\alpha_o|$$

$$\Rightarrow \left|v^2\right|\cdot|v+\alpha_2|=|\alpha_1 v+\alpha_o| \quad (1)$$

Είναι

$$\left|v^2\right|\cdot|v+\alpha_2| \ge 16|v+\alpha_2| \ge 16\left||v|-|\alpha_2|\right|=16\left(|v|-|\alpha_2|\right) \quad (2), \quad \text{αφού } |v| \ge 4 \quad \text{και} \quad |\alpha_2| \le 3$$

Επίσης

$$|\alpha_1 v+\alpha_o| \le |\alpha_1\cdot v|+|\alpha_o| \le 3|v|+3 \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε

$$16(|v|-|\alpha_2|)\le 3|v|+3 \quad\Rightarrow\quad 13|v|\le 3+16|\alpha_2|$$
$$\Rightarrow\quad 13|v|\le 3+16\cdot 3$$
$$\Rightarrow\quad |v|\le \frac{51}{13},\ \text{άτοπο.}$$

Άρα είναι $|v|<4$.

Γ1

2η ΛΥΣΗ:

Η δοσμένη γράφεται:

$$f(x)f'(x)+f(x)+xf'(x)+x=x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+2\left(f(x)+xf'(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left(f^2(x)+2xf(x)\right)'=0$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $f^2(x)+2xf(x)=c$, για κάθε $x\in IR$.

Για $x=0$ παίρνουμε $c=1$ άρα

$$f^2(x)+2xf(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)+2x\right)=1,\ \text{απ' όπου } f(x)\ne 0 \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Επιπλέον, αφού η f είναι συνεχής στο IR, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in IR$.

Τώρα πλέον από την $f^2(x)+2xf(x)-1=0$ θεωρώντας την ως τριώνυμο του $f(x)$ λαμβάνουμε ότι για κάθε $x\in IR$ συμβαίνει

$$\text{είτε } f(x)=-x+\sqrt{x^2+1} \text{ είτε } f(x)=-x-\sqrt{x^2+1}.$$

Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται καθώς παίρνει αρνητικές τιμές για οποιοδήποτε $x\in IR$ και η πρώτη παίρνει μόνο θετικές τιμές αφού $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge 0$.

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ για κάθε $x\in IR$ που επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος.

Εναλλακτικά:

Αφού βρίσκουμε

$$f^2(x)+2xf(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2=x^2+1 \quad \ldots$$

Γ2.

2η ΛΥΣΗ:

Μπορεί να αποφευχθεί η εύρεση της μονοτονίας της f, ως εξής:

$$f(t)=1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}-t=1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}=t+1 \overset{t\ge -1}{\Leftrightarrow} t^2+1=(t+1)^2 \Leftrightarrow t^2+1=t^2+2t+1 \Leftrightarrow t=0,$$

οπότε

$$f\left(g(x)\right)=1 \Leftrightarrow g(x)=0 \quad (\ldots)$$

3η ΛΥΣΗ:

Ψάχνουμε να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την :

$$\begin{cases}\sqrt{g^2(x)+1}=g(x)+1\\ g(x)+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g^2(x)+1=\left(g(x)+1\right)^2\\ g(x)+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=0\\ g(x)\geq -1\end{cases}\quad (1)$$

Όμως $g(x)=0\Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2-1=0\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0 \quad (2)$

και

$$g(x)\geq -1\Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2-1\geq -1\Leftrightarrow 2x^3+3x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\left(2x+3\right)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}\quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση t με τύπο $t(x)=2x^3+3x^2-2, x\geq -\frac{3}{2}$

Οι ρίζες αυτής είναι τόσες όσες και οι ρίζες του συστήματος (1).

Η t είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x\geq -\frac{3}{2}$ ως πολυώνυμική με

$$t'(x)=6x(x+1),\ \text{για κάθε}\ x\geq -\frac{3}{2}.$$

Ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι $x=0$ και $x=-1$.

Εξετάζοντας τη μονοτονία προκύπτει πως η t είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$,γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Είναι: $t\left(\left[-\frac{3}{2},-1\right]\right)=[-2,-1]$,

$t([-1,0])=[-2,-1]$ και

$t([0,+\infty))=[-2,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$t'(x)$			+	0	−	0	+	
$t(x)$		-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Παρατηρούμε πως το μηδέν ανήκει μόνο στο τρίτο σύνολο επομένως, λόγω συνέχειας και μονοτονίας, θα υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επομένως και η αρχική εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα.

4η ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=f(g(x)), x\in IR$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο IR ως σύνθεση των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g, με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)=f'(g(x))3x(x+1)$.

Έχουμε ότι $f'(g(x))<0$ για κάθε $x\in IR$.

Τότε

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ή}\ x=-1$$

και

$$h'(x)>0\Leftrightarrow 3x(x+1)<0\Leftrightarrow -1<x<0.$$

Συνεπώς

- η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-1)$ και ως συνεχής ισχύει $h(A_1)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},+\infty\right)$

• η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[-1,0]$ και ως συνεχής ισχύει $h(A_2)=\left[\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},1+\sqrt{2}\right)$

• η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3=(0,+\infty)$ και ως συνεχής ισχύει $h(A_3)=\left(0,1+\sqrt{2}\right)$.

Συνεπώς $1\notin h(A_1),1\notin h(A_2),1\in h(A_3)$ και η h γνησίως φθίνουσα στο A_3, οπότε η εξίσωση $h(x)=1\Leftrightarrow f(g(x))=1$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ3.

2η ΛΥΣΗ:

Θέλουμε η εξίσωση $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x$ να έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Η εξίσωση αυτή μετατρέπεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\eta\mu x f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\left(\eta\mu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\right)'=0$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $G(x)=\eta\mu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (άρα και συνεχής στο ίδιο διάστημα) διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Είναι $G(0)=\eta\mu 0\int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0=\eta\mu\frac{\pi}{4}\int_0^{0} f(t)dt=G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ επομένως ικανοποιούνται στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle και συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ώστε:

$$G'(x_0)=0 \quad (1).$$

Με $G'(x)=\left(\eta\mu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\right)'=\sigma\upsilon\nu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt+f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\sigma\upsilon\nu x_0\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt+f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x_0=0\Leftrightarrow-\sigma\upsilon\nu x_0\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x_0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x_0\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x_0$$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x_0>0,\alpha\varphi o\upsilon\ x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}{\Leftrightarrow}\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

Δ2.

2η ΛΥΣΗ (για την ανίσωση):

Θέτουμε $h(x)=\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(t)dt$ και παρατηρούμε ότι $h(-x)=h(x)$ δηλαδή η h είναι άρτια.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=16x\big((g(8x^2+6)-g(8x^2+5)\big)$.

Άρα $h'(0)=0$ και $h'(x)>0$ αν και μόνο αν $x>0$, (αφού η g είναι γνησίως αύξουσα), δηλ. η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η ζητούμενη ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $h(|x|)>h\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Οπότε:

$$h(|x|)>h\left(\frac{x^2}{2}\right)\Leftrightarrow |x|>\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow |x|(2-|x|)>0\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

3η ΛΥΣΗ (για την ανίσωση):

Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και $a,b,a+h,b+h\in\Delta$ με $h>0$, τότε για $a<a+h<b<b+h$ ισχύει

$$\int_a^{a+h} g(x)dx<hg(a+h)<hg(b)<\int_b^{b+h} g(x)dx$$, λόγω της μονοτονίας της g.

Στην περίπτωση που $a<b<a+h<b+h$ εργαζόμαστε ομοίως στα ξένα διαστήματα $[a,b],[a+h,b+h]$.

Έτσι τελικά ισχύει η ισοδυναμία:

$$\int_a^{a+h} g(x)dx<\int_b^{b+h} g(x)dx\Leftrightarrow a<b..$$

Δ3.

2η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$.

Ύπαρξη: Αφού $g(\alpha)=0$, μια προφανής λύση είναι το $x=\alpha$.

Μοναδικότητα: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\beta\neq\alpha$ ώστε

$$g(\beta)=g'(\alpha)(\beta-\alpha).$$

Τότε $g'(\alpha)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(\xi)$ για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα α, β, άτοπο αφού η g' είναι 1-1, ως γνησίως μονότονη...

Δ3.

3η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $x=\alpha$ και η εξίσωση γράφεται για $x\neq\alpha$

$$\left(\alpha-1\right)\cdot\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(\alpha)-1\right)\cdot\left(x-\alpha\right)\Leftrightarrow\frac{\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\Leftrightarrow g'\left(\gamma\right)=g'\left(\alpha\right)\overset{g'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}\gamma=\alpha$$

Όπου γ ανήκει στο $\left(\alpha,x\right)$ ή $\left(x,\alpha\right)$ και προκύπτει από εφαρμογή του Θ.Μ.Τ στο για την g στο $\left[\alpha,x\right]$ ή $\left[x,\alpha\right]$ που είναι άτοπο. Άρα μοναδική λύση το $x=\alpha$.

Δ3.

4η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με

$$h(x)=(\alpha-1)\int_{a}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x>1.$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως ....
με

$$h'(x)=(\alpha-1)\frac{f(x)-1}{x-1}-(f(\alpha)-1)=(\alpha-1)\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}\right]=(\alpha-1)\left(g'(x)-g'(\alpha)\right).$$

- Αν $x<\alpha$ έχουμε $g'(x)<g'(\alpha)$ (αφού η g είναι κυρτή, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα), οπότε $h'(x)<0, x\in(1,\alpha)$, δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,\alpha]$.
- Αν $x>\alpha$ έχουμε $g'(x)>g'(\alpha)$ (αφού η g είναι κυρτή, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα), οπότε $h'(x)>0, x\in(\alpha,+\infty)$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Αφού $x=\alpha$ είναι ρίζα της $h(x)=0$ αυτή είναι μοναδική, αφού το $x=\alpha$ είναι θέση ολικού ελαχίστου της h.

ΣΧΟΛΙΑ:

Για το Α4

α) Λ (...με ακτίνα ρ, σελ. 99)
β) Σ (σελ. 165)
γ) Σ (σελ. 170)
δ) Λ (Είναι ίσο με 0, σελ. 171)
ε) Σ (σελ. 192)