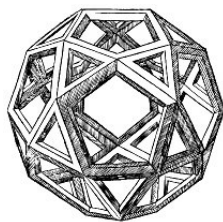


# ΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΝ

## Μαθηματικό Δελτίο

Τεύχος 3ο  
Ιανουάριος 2011

www.mathematica.gr



Εικοσιδωδεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στις οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο ιωαννεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των  $(0, 0, \pm\varphi)$ ,  $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2})$ , όπου  $\varphi$  ο χρυσός λόγος  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή: <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron>

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Ο δικτυακός τόπος [mathematica.gr](http://www.mathematica.gr) ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (<http://www.mathematica.gr>) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

## Διευθύνοντα Μέλη του [mathematica.gr](http://www.mathematica.gr)

### ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΕΣ

#### • Αιρετά Μέλη

1. Μιχάλης Λάμπρου (Mihalis\_Lambrou) Γενικός Συντονιστής
2. Νίκος Μαυρογιάννης (nsmavrogiannis) Γενικός Συντονιστής
3. Μπάμπης Στεργίου (Μπάμπης Στεργίου) Γενικός Συντονιστής
4. Μίλτος Παπαγρηγοράκης (m.papagrigorakis) Οικονομικός Υπεύθυνος
5. Σπύρος Καρδαμίτσης (Καρδαμίτσης Σπύρος) Συντονιστής
6. Γιώργος Ρίζος (Rigio) Συντονιστής
7. Σεραφείμ Τσιπέλης (Σεραφείμ) Συντονιστής

#### • Μόνιμα Μέλη

1. Γρηγόρης Κωστάκος (grigkost) Διαχειριστής
2. Αλέξανδρος Συγκελάκης (cretanman) Διαχειριστής

### ΕΠΙΜΕΛΗΤΕΣ

1. Ανδρέας Βαρβεράκης (ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗΣ)
2. Φωτεινή Καλή (Φωτεινή)
3. Νίκος Κατσιπής (nkatsipis)
4. Αναστάσιος Κοτρώνης (Κοτρώνης Αναστάσιος)
5. Χρήστος Κυριαζής (chris\_gatos)
6. Γιώργος Μπαλόγλου (gbaloglou)
7. Ροδόλφος Μπόρης (R BORIS)
8. Δημήτρης Σκουτέρης (dement)

9. Σωτήρης Στόγιας (swsto)

10. Αχιλλέας Συνεφακόπουλος (achilleas)
11. Κωνσταντίνος Τηλέγραφος (Τηλέγραφος Κώστας)
12. Δημήτρης Χριστοφίδης (Demetres)

### ΜΕΛΗ

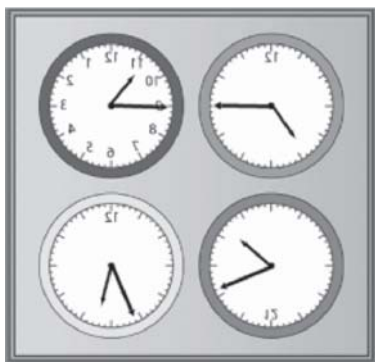
1. Σπύρος Βασιλόπουλος (spyros)
2. Κωνσταντίνος Βήττας (vittasko)
3. Παναγιώτης Γιαννόπουλος (p\_gianno)
4. Κώστας Ζυγούρης (kostas.zig)
5. Γιώργης Καλαθάκης (exdx)
6. Χρήστος Καρδάσης (ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΡΔΑΣΗΣ)
7. Βασίλης Μαυροφρύδης (mathxl)
8. Θανάσης Μπεληγιάννης (mathfinder)
9. Μάκης Πολλάτος (mathematica)
10. Θωμάς Ραϊκόφτσαλης (Ραϊκόφτσαλης Θωμάς)
11. Κωνσταντίνος Ρεκούμης (rek2)
12. Γιώργος Ροδόπουλος (hsiodos)
13. Σταύρος Σταυρόπουλος (Σταύρος Σταυρόπουλος)
14. Βασίλης Στεφανίδης (bilstef)
15. Χρήστος Τσιφάκης (xr.tsif)

# ΟΙ Ασκήσεις

## Διασκεδαστικά Μαθηματικά

**ΑΣΚΗΣΗ 1** (Βασίλης Στεφανίδης) Ένας μυστηριώδης νέος γρίφος από τον καθηγητή μαθηματικών Ρωσίδα Ιωσήφ: Ο αστυνόμος Μπέκας κλήθηκε να εξιχνιάσει μια υπόθεση ληστείας. Σε αυτή τη ληστεία υπήρχαν τρεις βασικοί ύποπτοι. Ο ένας από τους τρεις ήταν δικαστής, συνεπώς έλεγε πάντοτε την αλήθεια, ο άλλος ήταν πολιτικός, δηλαδή έλεγε πάντοτε ψέματα και ο τρίτος ήταν ο ληστής και έλεγε τότε αλήθεια και τότε ψέματα. Φυσικά, ο αστυνόμος Μπέκας δεν ήξερε ποιος είναι ποιος, αλλιώς έπρεπε να εντοπίσει το ληστή, γι' αυτό και τους ανέκρινε. Αρχικά ζητήθηκε από τον πρώτο να κάνει μια δήλωση. Εκείνος δήλωσε είτε ότι ο τρίτος ήταν πολιτικός είτε ότι ο τρίτος ήταν ο ληστής - εμείς όμως δε γνωρίζουμε ποια ήταν η δήλωσή του, παρά μόνο ο αστυνόμος Μπέκας. Στη συνέχεια, ο δεύτερος δήλωσε είτε ότι ο πρώτος ήταν δικαστής είτε ότι ο πρώτος ήταν πολιτικός. Τέλος, ο τρίτος δήλωσε είτε ότι ο δεύτερος ήταν δικαστής είτε ότι ο δεύτερος ήταν πολιτικός. Με βάση τα παραπάνω, ο αστυνόμος Μπέκας κατάφερε να προσδιορίσει ποιος ήταν ο ληστής και τον συνέλαβε. Μου διηγήθηκαν αυτή την υπόθεση, αφού μελέτησα το πρόβλημα, αποφάνθηκα ότι δεν έχω επαρκείς πληροφορίες για να εντοπίσω το ληστή. Τότε μου ανέφεραν την ακριβή δήλωση του πρώτου για τον τρίτο και μόνο έτσι μπόρεσα να προσδιορίσω ποιος ήταν ο ληστής. Ποιος ήταν, αλήθεια; Ο πρώτος, ο δεύτερος ή ο τρίτος;

**ΑΣΚΗΣΗ 2** (ραpεl) Στην παρακάτω εικόνα τέσσερα ρολόγια έχουν φωτογραφηθεί μετά την ανάκλυσή τους μέσω ενός καθρέπτη. Μπορείτε να βρείτε τη σωστή ώρα πριν την ανάκλυσή για καθένα από αυτά;



## Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

**ΑΣΚΗΣΗ 3** (Χρήστος Κυριαζής) Ένα δοχείο όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερα από όταν είναι κατά 30% γεμάτο.

Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

**ΑΣΚΗΣΗ 4** (Μπάμπης Στεργίου) Στο παρακάτω σχήμα και στα 9 κουτάκια θα τοποθετηθούν όλοι οι αριθμοί 1, 2, 3, ..., 8, 9 έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στην κατακόρυφη στήλη να είναι το ίδιο με το άθροισμα των αριθμών στην οριζόντια γραμμή. Μερικά ψηφία έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ποιο ψηφίο μπορεί να μπει στο γωνιακό κουτάκι με το γράμμα x;

|   |   |   |  |   |
|---|---|---|--|---|
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
| x | 4 | 9 |  | 7 |

## Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

**ΑΣΚΗΣΗ 5** ( KARKAR ) Σε κύκλο είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο, εμβαδού  $E_1$ . Σε ημικύκλιο του ίδιου κύκλου είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο, εμβαδού  $E_2$ . Βρείτε τον λόγο  $\frac{E_2}{E_1}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 6** (Δημήτρης Ιωάννου) Τρεις φίλοι έχουν μαζί τους καραμέλες. Ο Γιώργος έχει διπλάσιες από τον Δημήτρη και 7 ακόμα. Ο Αλέκος έχει εξαπλάσιες από τον Δημήτρη και 2 ακόμα. Όλοι έδωσαν τις καραμέλες τους στον Δημήτρη και αυτός έγραψε σε ένα χαρτάκι το σύνολο: 1...6 που είναι ένας τριψήφιος αριθμός αλλιώς λείπει το ψηφίο των δεκάδων. Πόσες καραμέλες έχει καθένας;

## Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

**ΑΣΚΗΣΗ 7** (Κώστας Καπένης) Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς  $a, b, c$  ισχύει

$$a + b + c = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0$$

**ΑΣΚΗΣΗ 8** (Σπύρος Καπελλίδης) Αν  $a$  και  $b$  είναι δύο θετικοί αριθμοί με

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \dots + \frac{a+2009}{b+2009} = 2010$$

να αποδείξετε ότι  $a = b$

## Μαθηματικά Α' Λυκείου, Άλγεβρα

**ΑΣΚΗΣΗ 9** (Γιώργος Ρίζος) Για κάθε  $\alpha > 2$  και  $\beta > 2$  να αποδειχθεί ότι  $\alpha\beta > \alpha + \beta$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 10** (Παναγιώτης Μπίσδας) Να ληθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του  $m$

$$|2x - |2x - 1|| = -m^2x$$

## Μαθηματικά Α' Λυκείου, Γεωμετρία

**ΑΣΚΗΣΗ 11** (Στράτος Παπαδόπουλος) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\angle B = 45^\circ$  και  $\angle \Gamma = 30^\circ$ . Αν  $\Delta$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$  να δείχθει ότι  $\angle \Delta\hat{B}\Gamma = 15^\circ$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 12** (Ανδρέας Βαρθεράκης) Αν  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, τότε τα ορθόκεντρα των τριγώνων  $AB\Gamma$ ,  $AB\Delta$ ,  $B\Gamma\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι κορυφές ίσου με το αρχικό τετραπλεύρου.

**ΑΣΚΗΣΗ 13** (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Να θυθεί η εξίσωση:

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + (\sqrt{2} - 1)^{(x+1)^2} = 2$$

**ΑΣΚΗΣΗ 14** (Γιώργος Ροδόπουλος) Να θυθεί η εξίσωση  
 $3^{x+1} - 9^x + 3 \cdot 5^x - 25^x = 15^x + 3$

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Γεωμετρία

**ΑΣΚΗΣΗ 15** (KARKAR) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $a$ , κέντρου  $O$ , και έστω  $M$  το μέσο της  $OD$ . Φέρω την  $GM$  η οποία τέμνει την  $AD$  στο  $N$ . Στο  $N$  φέρω κάθετη της  $NG$ , η οποία τέμνει την  $AG$  στο  $\Sigma$ . Βρείτε το  $AS$  συναρτήσει της πλευράς  $a$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 16** (Μπάμπης Στεργίου) Ένα τρίγωνο έχει περίμετρο 28 και ο εγγεγραμμένος κύκλος χωρίζει μια διάμέσό του σε τρία ίσα μέρη. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών αυτού του τριγώνου.

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνση

**ΑΣΚΗΣΗ 17** (Γρηγόρης Κωστάκος) Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ, αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΔΕ και ΔΖ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ.

**ΑΣΚΗΣΗ 18** (Χρήστος Καρδάσης) Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  και ο πραγματικός  $x$  για τον οποίο ισχύει

$$x^2 \vec{\alpha} + x \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$$

Να δείξετε ότι

α)  $\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} \geq 0$

β) αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0$$

τότε

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta}$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γενική Παιδεία

**ΑΣΚΗΣΗ 19** (Μάκης Χατζόπουλος) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+b}{x+3} & , x \neq -3 \\ -5 & , x = -3 \end{cases}$$

όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη  $-2$  και  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι  $a = 1$  και  $b = -6$ .

β. Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  στο  $x = -3$ .

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της  $f$  και να βρείτε το γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  και το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει με τους άξονες των συντεταγμένων

**ΑΣΚΗΣΗ 20** (Σπύρος Καρδαμίτσος) Τέσσερις αριθμοί  $x, y, z, \omega$  με  $x < y < z < \omega$  έχουν μέση τιμή 3, διάμεσο 3 και εύρος 4.

α) Να αποδείξετε ότι  $x = 1$  και  $\omega = 5$

β) Αν η διακύμανση των τεσσάρων αριθμών είναι  $\frac{5}{2}$  να βρείτε τους αριθμούς  $y$  και  $z$ .

γ) Αν στους παραπάνω τέσσερις αριθμούς προσθέσουμε και άλλους 6 αριθμούς τους  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  τέτοιους ώστε

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 38 \text{ και } \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 244$$

να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των 10 αριθμών.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

**ΑΣΚΗΣΗ 21** (Μπάμπης Στεργίου) Τρεις μιγαδικοί αριθμοί  $a, b, c$  έχουν μέτρο 1 και ικανοποιούν τη σχέση:  $a + b + c = 1$  Να αποδειχθεί ότι:

α)  $ab + bc + ca = abc$

β)  $(1-a)(1-b)(1-c) = 0$

γ)  $\frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = 1$

δ) Αν οι αριθμοί  $a, b, c$ , είναι διαφορετικοί ανά δύο, τότε οι εικόνες τους σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

**ΑΣΚΗΣΗ 22** (Χρήστος Λαζαρίδης) Η εξίσωση  $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έχει ρίζες τους μιγαδικούς  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε τους  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε να ισχύει:  $z_1^3 + z_2^3 = 1$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

**ΑΣΚΗΣΗ 23** (Iason Pap.) Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με ιδιότητα  $f(f(x)) = x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**ΑΣΚΗΣΗ 24** (Σπύρος Ορφανάκης) Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

A)  $f(0) = 0$  και  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

B) για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \quad (2)$$

$$\Gamma) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Δ) υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(q) = \lambda \cdot q$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ .

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

**ΑΣΚΗΣΗ 25** (Stelmarg-Μιχάλης Λάμπρου) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{2n+1} - 2x + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

έχει μια ρίζα στο  $(0, 1)$

(Επέκταση από τον Μιχάλη Λάμπρου) Να την συνεχίσουμε: Δείξτε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο  $(0, 1)$  Επίσης να την δυσκολέψουμε (όμως τώρα πέφτουμε εκτός σχολικής ύλης, αλλιώς δεν είναι δύσκολη - ούτε απλή). Αν  $x_n$  η μοναδική ρίζα της δοθείσας, στο  $(0, 1)$ , τότε  $(x_n)$  φθίνουσα και  $\lim x_n = \frac{1}{2}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 26** (Ροδόλφος Μπόρης) Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  και  $y$  παραγωγίσμη στο  $\mathbb{R}$  με  $y(a) = k \in \mathbb{R}$  τότε να εξεταστεί πόσες ρίζες μπορεί να έχει η συνάρτηση  $y$  και να βρεθεί ο τύπος της, συναρτήσει των  $a, k, f(t)$  σε καθεμιά περίπτωση, όταν

$$y'(x) - f(x)y^2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

**ΑΣΚΗΣΗ 27** (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε το πρόσημο της

$$F(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

όταν  $t > 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 28** (Σπράτος Παπαδόπουλος) Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^1 x^n (2-x)^n dx = 2^{2n} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = J$$

**ΑΣΚΗΣΗ 29** (Φωτεινή Καλδή ) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ , ( $AB = AC$ ) με  $\hat{A} = 20^\circ$ .

Στην πλευρά  $AC$  παίρνουμε σημείο  $D$ , ώστε  $\widehat{DBC} = 60^\circ$  και στην πλευρά  $AB$  σημείο  $E$ , ώστε  $\widehat{ECB} = 30^\circ$ .

Να βρείτε τη γωνία  $\widehat{EDB}$

**ΑΣΚΗΣΗ 30** (Σπύρος Καπελιδής) Αν  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο συναρτήσεις, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν  $x, y \in [0, 1]$ , ώστε

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 31** (Χρήστος Κυριαζής) Αν  $a, b, c$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

$$a + b + c = 3$$

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 32** (Κώστας Βήττας) Δίνεται κυρτό (ή μη κυρτό, ή και στρεβλό) τετράπλευρο  $ABCD$  και έστω  $E, F$ , σημεία επί των πλευρών του  $AB, CD$  αντιστοίχως, τέτοια ώστε

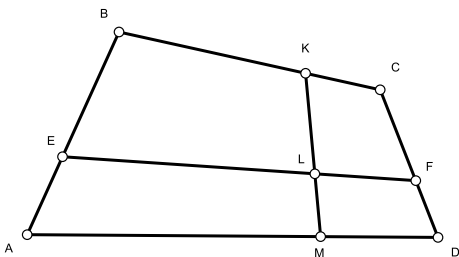
$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC} = p$$

Επί των  $BC, EF, AD$ , λαμβάνουμε αντιστοίχως τα εσωτερικά σημεία  $K, L, M$ , έτσι ώστε

$$\frac{BK}{KC} = \frac{EL}{LF} = \frac{AM}{MD} = q$$

Αποδείξτε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά και ότι

$$\frac{KL}{LM} = p$$



**ΑΣΚΗΣΗ 33** (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν τη σχέση  $f(f(x)) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 34** (Σεραφείμ Τσιπέλης) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Άλγεβρα ΑΕΙ

**ΑΣΚΗΣΗ 35** (Στέλιος Μαργαρίτης) Δίνεται ο θετικά ορισμένος πίνακας  $A$  και η τετραγωνική μορφή  $Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$ . Δείξτε ότι η μορφή  $Q$  ελαχιστοποιείται στο σημείο  $x_0$  για το οποίο ισχύει ότι  $Ax_0 = b$  και ότι το ελάχιστο ισούται με  $-\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)$ . (Ένας  $n \times n$  πραγματικός πίνακας  $A$  ονομάζεται θετικά ορισμένος αν και μόνο αν είναι συμμετρικός και για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$  ισχύει ότι  $(x, Ax) > 0$ .)

**ΑΣΚΗΣΗ 36** (Αναστάσιος Κοιρώνης) Έστω πολυώνυμο  $f \in \mathbb{Z}[x]$  με ρίζες τα  $x_1, \dots, x_n$  και έστω  $M = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$ . Έστω  $m \in \mathbb{Z}$  με  $|m| > M + 1$  και  $|f(m)|$  πρώτος. Να δείχθεί ότι το  $f$  είναι ανάγωγο στο  $\mathbb{Z}[x]$ .

Ανάλυση ΑΕΙ

**ΑΣΚΗΣΗ 37** (Αναστάσιος Κοιρώνης) Να υπολογισθεί το

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x) \ln x}{x(1-x)} dx.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 38** (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n} dx - 1 \right) = \frac{\pi^2}{12}$$

ΑΕΙ Μαθηματική Λογική και Θεμέλια Μαθηματικών

**ΑΣΚΗΣΗ 39** (Σπύρος Καπελιδής) Να αποδειχθεί ότι κάθε υπεραριθμισμό υποσύνολο των πραγματικών δεν είναι καλώς διατεταγμένο ως προς τη φυσική διάταξη.

**ΑΣΚΗΣΗ 40** (Δημήτρης Χριστοφίδης)

Δίνονται ακολουθίες συνόλων

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Να βρεθούν όλα τα σύνολα  $X$  που ικανοποιούν την

$$A_n \cup X = B_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 41** (Κώστας Ζυγούρης) Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$\underbrace{111\dots 111}_{91 \text{ μονάδες}}$$

είναι σύνθετος.

Πηγή: Τάσος Αγάπης, Αριθμοί και άλλα, Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, 1998.

**ΑΣΚΗΣΗ 42** (Νίκος Κασιόπης) Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathbb{A} = \{2^n - 3 | n \in \mathbb{N}\}$$

περιέχει ένα τουλάχιστον υποσύνολο με άπειρα στοιχεία τέτοια ώστε οποιαδήποτε δύο να είναι πρώτα μεταξύ τους.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

**ΑΣΚΗΣΗ 43** (Θάνος Μάγκος) Να ληθεί η εξίσωση

$$\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2x} = \sqrt{1-x^2} + x$$

**ΑΣΚΗΣΗ 44** (Θάνος Μάγκος) Για τις γωνίες τριγώνου  $ABC$  ισχύει

$$a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B = c^2 \cos^2 C.$$

Ποιό συμπέρασμα εξαγεται για τις γωνίες του;

Ο Φάκελος του καθηγητή. Ανάλυση

**ΑΣΚΗΣΗ 45** (Μπάμπης Στεργίου) Αν για μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$  οι συναρτήσεις  $f(x) \sin^3 x, f(x) \cos^3 x$  έχουν αρχική, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση  $f$  έχει αρχική.

**ΑΣΚΗΣΗ 46** (Σπύρος Καπελιδής) Έστω  $P(x)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $n$  και  $n$  απλές ρίζες  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Αν  $Q(x)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $\leq n-1$ , να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xQ(x)}{P(x)}$$

Ο Φάκελος του καθηγητή. Άλγεβρα

**ΑΣΚΗΣΗ 47** (irakleios) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  ώστε να ισχύει :

$$(x-1)^{143} + (x+1)^{2002} = [P(x)]^{13}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 48** (Σπύρος Καπελιλίδης) Αν  $p(x)$  είναι ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$ , με ακέραιους συντελεστές και  $n$  πραγματικές μη ακέραιες ρίζες, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες του  $x_i, x_j$  ώστε  $x_i - x_j > 1$ .

(Προσθήκη: Δημήτρης Χριστοφίδης) Πιο

ισχυρό: Αν  $p(x)$  ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$  με ακέραιους συντελεστές και  $n$  πραγματικές ρίζες εκ των οποίων τουλάχιστον 1 δεν είναι ακέραια, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο ρίζες  $x_i, x_j$  του  $p$  με

$$x_i - x_j > 1$$

# Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

**ΑΣΚΗΣΗ 1** (Βασίλης Στεφανίδης) Ένας μυστηριώδης νέος γρίφος από τον καθηγητή μαθηματικών Ρωσσίδη Ιωσήφ: Ο αστυνόμος Μπέκας κλήθηκε να εξιχνιάσει μια υπόθεση ληστείας. Σε αυτή τη ληστεία υπήρχαν τρεις βασικοί ύποπτοι. Ο ένας από τους τρεις ήταν δικαστής, συνεπώς έλεγε πάντοτε την αλήθεια, ο άλλος ήταν πολιτικός, δηλαδή έλεγε πάντοτε ψέματα και ο τρίτος ήταν ο ληστής και έλεγε πότε αλήθεια και πότε ψέματα. Φυσικά, ο αστυνόμος Μπέκας δεν ήξερε ποιος είναι ποιος, αλλιά έπρεπε να εντοπίσει το ληστή, γι' αυτό και τους ανέκρινε. Αρχικά ζητήθηκε από τον πρώτο να κάνει μια δήλωση. Εκείνος δήλωσε είτε ότι ο τρίτος ήταν πολιτικός είτε ότι ο τρίτος ήταν ο ληστής - εμείς όμως δε γνωρίζουμε ποια ήταν η δήλωσή του, παρά μόνο ο αστυνόμος Μπέκας. Στη συνέχεια, ο δεύτερος δήλωσε είτε ότι ο πρώτος ήταν δικαστής είτε ότι ο πρώτος ήταν πολιτικός είτε ότι ο πρώτος ήταν ο ληστής. Τέλος, ο τρίτος δήλωσε είτε ότι ο δεύτερος ήταν δικαστής είτε ότι ο δεύτερος ήταν πολιτικός είτε ότι ο δεύτερος ήταν ο ληστής. Με βάση τα παραπάνω, ο αστυνόμος Μπέκας κατάφερε να προσδιορίσει ποιος ήταν ο ληστής και τον συνέλαβε. Μου διηγήθηκαν αυτή την υπόθεση, αφού μελέτησα το πρόβλημα, αποφάνθηκα ότι δεν έχω επαρκείς πληροφορίες για να εντοπίσω το ληστή. Τότε μου ανέφεραν την ακριβή δήλωση του πρώτου για τον τρίτο και μόνο έτσι μπόρεσα να προσδιορίσω ποιος ήταν ο ληστής. Ποιος ήταν, αλήθεια; Ο πρώτος, ο δεύτερος ή ο τρίτος;

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=875>

**Λύση** (Δημήτρης Χριστοφίδης) Ο δεύτερος. Υπάρχει 6 πιθανές διατάξεις των υπόπτων και 18 πιθανές απαντήσεις. Φυσικά για κάθε διάταξη μόνο ορισμένες εκ των απαντήσεων μπορεί να έχουν δοθεί. Οι απαντήσεις

ΠΠΔ, ΠΠΠ, ΠΠΛ, ΠΛΠ, ΠΛΛ, ΛΠΠ, ΛΠΛ, ΛΛΠ, ΛΛΛ

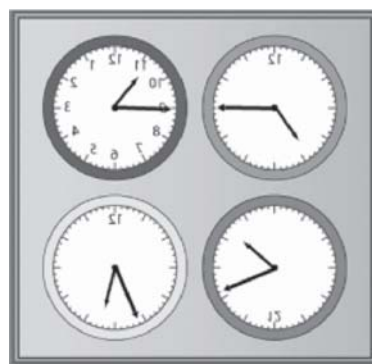
απορρίπτονται επειδή ο Μπέκας δεν θα μπορούσε να βρει τον ληστή. (Για παράδειγμα οι διατάξεις ΛΛΠ και ΠΛΛ έχουν ως

πιθανή απάντηση την ΠΠΔ.)

[Με την απάντηση ΠΠΔ εννοώ ότι ο 1 απάντησε «ο 3 είναι Π», ο 2 απάντησε «ο 1 είναι Π» και ο 3 απάντησε «ο 2 είναι Δ».]

Οι απαντήσεις ΛΔΔ και ΛΔΠ απορρίπτονται επειδή δεν δίνονται από καμία διάταξη. Μένουν 7 απαντήσεις να ελέγξουμε. Αν η πρώτη απάντηση ήταν Λ τότε ο καθηγητής δεν θα μπορούσε να αποφασίσει ποιός είναι ο ληστής. (Η απάντηση ΛΔΔ δίνει διάταξη ΠΛΔ και η απάντηση ΛΠΔ δίνει διάταξη ΔΠΛ.) Αν η πρώτη απάντηση ήταν Π τότε ο καθηγητής μπορεί να αποφασίσει ότι ο ληστής είναι ο δεύτερος.

**ΑΣΚΗΣΗ 2** (rapel) Στην παρακάτω εικόνα τέσσερα ρολόγια έχουν φωτογραφηθεί μετά την ανάκλυσή τους μέσω ενός καθρέπτη. Μπορείτε να βρείτε τη σωστή ώρα πριν την ανάκλυσή για καθένα από αυτά;



<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=7045>

**Λύση** (Στραγάλης Χρήστος) Τι θα λέγατε αν χρησιμοποιούσαμε έναν δικό μας καθρέπτη, τον τοποθετούσαμε μπροστά στην οθόνη και στη συνέχεια βλέπαμε τη σωστή ώρα ;.



Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

**ΑΣΚΗΣΗ 3** (Χρήστος Κυριαζής) Ένα δοχείο όταν είναι κατά 30% άδειο, περιέχει 20 λίτρα περισσότερα από όταν είναι κατά 30% γεμάτο.

Πόσα λίτρα περιέχει το δοχείο όταν είναι πλήρες;

<http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=33&p=65774>

**Λύση** (Ιρακλειος) Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι όταν το δοχείο είναι κατά 70% γεμάτο περιέχει 20λ παραπάνω από την περίπτωση που είναι 30% γεμάτο. Αυτό σημαίνει ότι τα 40% του δοχείου είναι 20λ. Επομένως το 20% είναι 10λ, οπότε 100% , δηλαδή το γεμάτο δοχείο χωράει 50λ.

**ΑΣΚΗΣΗ 4** (Μπάμπης Στεργίου) Στο παρακάτω σχήμα και στα 9 κουτάκια θα τοποθετηθούν όλοι οι αριθμοί 1, 2, 3, ..., 8, 9 έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στην κατακόρυφη στήλη να είναι το ίδιο με το άθροισμα των αριθμών στην οριζόντια γραμμή. Μερικά ψηφία έχουν ήδη τοποθετηθεί. Ποιο ψηφίο μπορεί να μπει στο γωνιακό κουτάκι με το γράμμα  $x$ ;

|   |   |   |  |   |
|---|---|---|--|---|
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
|   |   |   |  |   |
| x | 4 | 9 |  | 7 |



<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&p=65374>

**Λύση 1** (Κώστας Μαλλιάρης)

Σκέψη 1: Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

Σκέψη 2: Στην οριζόντια γραμμή ήδη οι αριθμοί που υπάρχουν έχουν άθροισμα  $4 + 7 + 9 = 20$ .

Σκέψη 3: Αν εξαιρέσουμε το  $x$  θα πρέπει το άθροισμα των υπεράνω του  $x$  και το άθροισμα των εκ δεξιών του  $x$  να είναι ίσα και περισσότερα του 20 και λιγότερο από 23 αφού τότε θα ξεπερνούσαμε το συνολικό άθροισμα 45.

Σκέψη 4: Μοναδικές δυνατές περιπτώσεις είναι άθροισμα 21, οπότε στην οριζόντια γραμμή θα μπει το 1 και αφού  $45 - 21 - 21 = 3$  το  $x = 3$  και οι υπόλοιποι αριθμοί 2, 5, 6, 8 θα μπου πάνω από το  $x$  με οποιαδήποτε διάταξη ή άθροισμα 22, οπότε στην οριζόντια γραμμή θα μπει το 2 και αφού  $45 - 22 - 22 = 31$  το  $x = 1$  και οι υπόλοιποι αριθμοί 3, 5, 6, 8 θα μπου πάνω από το  $x$  με οποιαδήποτε διάταξη.

**Σχόλιο 1** Απαντήσεις έδωσαν επίσης οι συνάδελφοι: Φωτεινή Καλδή, Μαργαρίτα Βαρελά, Δημήτρης Κατσιπόδας

**Σχόλιο 2** (Από τον επιμελητή) Αν  $A$  είναι το κοινό άθροισμα στη γραμμή και στη στήλη, τότε

$$A + A = 1 + 2 + 3 \dots + 9 + x = 45 + x$$

διότι το  $x$  το μετράμε δυο φορές. Άρα ο  $x$  είναι περιττός, δηλαδή ένας από τους αριθμούς 1, 3, 5 κλπ (μια και οι 7, 9 έχουν τοποθετηθεί αλλού). Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $x = 5$  κλπ και καταλήγουμε στις παραπάνω λύσεις.

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

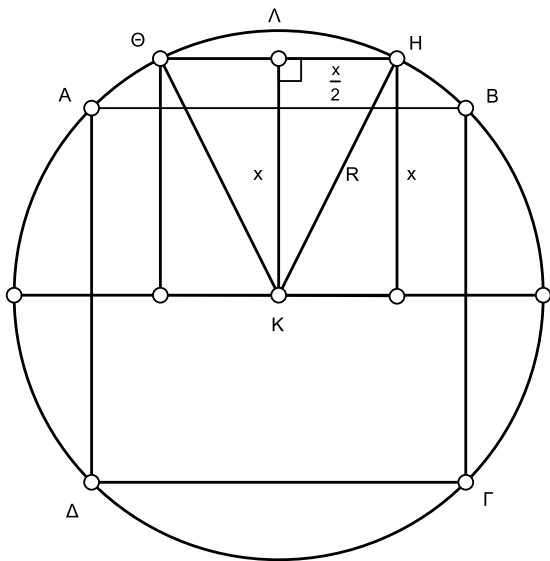
**ΑΣΚΗΣΗ 5** ( KARKAR ) Σε κύκλο είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο, εμβαδού  $E_1$ . Σε ημικύκλιο του ίδιου κύκλου είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο, εμβαδού  $E_2$ . Βρείτε τον λόγο  $\frac{E_2}{E_1}$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=12234>

**Λύση 1** (Ηλίας Καμπέλης) Έστω κύκλος  $(K, R)$  και ΑΒΓΔ το εγγεγραμμένο σ' αυτόν τετράγωνο. Το εμβαδόν του  $E_1$  είναι

$$E_1 = 2R^2$$

αφού η πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου είναι  $\alpha = R\sqrt{2}$ .



Έστω ΕΖΗΘ το τετράγωνο που είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο του ίδιου κύκλου με πλευρά  $x$ .

Αν  $ΚΛ \perp ΘΗ$ , τότε το  $Λ$  είναι μέσο της χορδής  $ΘΗ$  γιατί το  $ΚΛ$  είναι απόστημα της.

Έτσι  $ΛΗ = \frac{x}{2}$  και  $ΚΛ = ΗΖ = x$  από το ορθογώνιο  $ΛΗΖΚ$ . Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο  $ΛΗΚ$  έχουμε:

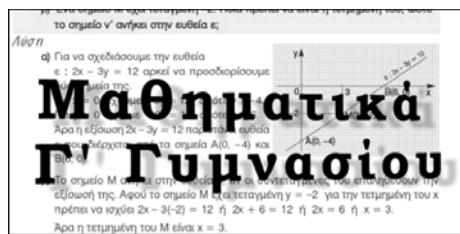
$$ΚΛ^2 + ΛΗ^2 = ΚΗ^2$$

, έτσι

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = R^2$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$x^2 = \frac{4R^2}{5}$$



δηλαδή

$$E_2 = \frac{4R^2}{5}$$

Οπότε

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{4R^2}{5}}{2R^2} = \frac{2}{5}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6** (Δημήτρης Ιωάννου) Τρεις φίλοι έχουν μαζί τους καραμέλες. Ο Γιώργος έχει διπλάσιες από τον Δημήτρη και 7 ακόμα. Ο Αλέκος έχει εξαπλάσιες από τον Δημήτρη και 2 ακόμα. Όλοι έδωσαν τις καραμέλες τους στον Δημήτρη και αυτός έγραψε σε ένα χαρτάκι το σύνολο: 1...6 που είναι ένας τριψήφιος αριθμός αληθιά λείπει το ψηφίο των δεκάδων. Πόσες καραμέλες έχει καθένας;

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&p=63518>

**Λύση 1** (Γιάννης Σταυριανάκης) Έστω  $\chi$  οι καραμέλες του Δημήτρη. Τότε  $2\chi+7$  οι καραμέλες του Γιώργου και  $6\chi+2$  οι καραμέλες του Αλέκου. Άρα όλες οι καραμέλες είναι  $9\chi+9$ .  $9\chi+9=1..6$ . Είναι  $9\chi+9 \leq 196$  και  $9\chi+9 \geq 106$ . Ο  $\chi$  είναι ακέραιος, άρα  $10 \leq \chi \leq 23$ . Πρέπει όμως  $9\chi+9$  να τελειώνει σε 6. Η μόνη τιμή του  $\chi$  από 11 έως και 22 για την οποία  $9\chi+9$  τελειώνει σε 6 είναι  $\chi=13$ . Ο Γιώργος έχει 33 καραμέλες και ο Αλέκος 80.

**Λύση 2** (Δημήτρης Ιωάννου) Εκτός από τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Το συνολικό ποσόν των καραμελών, βρήκαμε πριν ότι είναι  $9\chi+9$ , δηλ  $9(\chi+1)$ . Άρα είναι πολλαπλάσιο του 9. Οπότε αφού ο αριθμός 1..6 είναι πολλαπλάσιο του 9, θα πρέπει το ψηφίο που λείπει να είναι το 2 ( $1+2+6=9$ , ενώ για οποιοδήποτε άλλο ψηφίο, δεν βγαίνει το άθροισμα πολλαπλάσιο του 9) Άρα όλες οι καραμέλες είναι 126. Άρα έχουμε την εξίσωση  $9\chi+9=126$  οπότε  $\chi=13$ .

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

**ΑΣΚΗΣΗ 7** (Κώστας Καπένης) Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς  $a, b, c$  ισχύει

$$a + b + c = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=10253>

**Λύση 1** (Χρήστος Στραγάλης (μαθητής) )

$$a + b + c = 0 \Rightarrow$$

$$(a + b)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

Ομοίως είναι:

$$b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = -2ac$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} &= \\ \frac{-1}{2bc} + \frac{-1}{2ac} + \frac{-1}{2ab} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{a^2bc + b^2ac + c^2ab}{(abc)^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (a + b + c) = 0 \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 8** (Σπύρος Καπελλήδης) Αν  $a$  και  $b$  είναι δύο θετικοί αριθμοί με

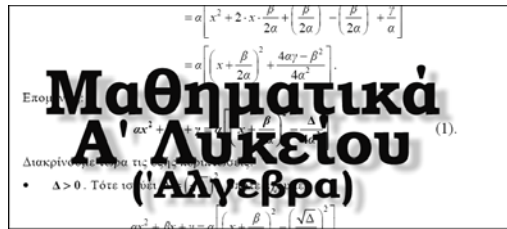
$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \dots + \frac{a+2009}{b+2009} = 2010$$

να αποδείξετε ότι  $a = b$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=10424>

**Λύση 1** (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Αν  $a > b$ , τότε  $\frac{a+k}{b+k} > 1$  για κάθε  $k = 0, 1, 2, \dots, 2009$  (που είναι 2010 το πλήθος). Προσθέτοντας τις ανισότητες για  $k = 0, 1, 2, \dots, 2009$ , παίρνουμε

$$2010 = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \dots + \frac{a+2009}{b+2009} > 1 + 1 + \dots + 1 = 2010$$



(Ατοπο) Άρα  $a \leq b$ . Λόγω συμμετρίας (ή παρόμοια), είναι επίσης  $b \leq a$ , οπότε τελικά  $a = b$ .

**Λύση 2** (Κώστας Σερίφης)

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \dots + \frac{a+2009}{b+2009} &= 2010 \\ \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} + \dots + \frac{a+2009}{b+2009} &= \frac{b}{b} + \frac{b+1}{b+1} + \dots + \frac{b+2009}{b+2009} \\ \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1} + \dots + \frac{a-b}{b+2009} &= 0 \\ (a-b) \cdot \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \dots + \frac{1}{b+2009} \right) &= 0 \\ a-b &= 0 \\ a &= b \end{aligned}$$

Επιμέλεια: Σπύρος Καρδαμίτσης

**ΑΣΚΗΣΗ 9** (Γιώργος Ρίζος) Για κάθε  $\alpha > 2$  και  $\beta > 2$  να αποδειχθεί ότι  $\alpha\beta > \alpha + \beta$ .

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=10669>

**Λύση** (Γιώργος Ρίζος) 1η Λύση Είναι:  $\alpha > 2, \beta > 2$ .

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και προκύπτει :

$$\alpha\beta > 4 \quad (1)$$

$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha - 2 > 0, \beta > 2 \Rightarrow \beta - 2 > 0$  Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$$\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε:

$$2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > \alpha + \beta$$

2η Λύση Έστω  $\alpha = \beta$  αρκεί να δείξουμε ότι:  $\alpha^2 > 2\alpha$  αρκεί  $\alpha^2 - 2\alpha > 0$  αρκεί  $\alpha(\alpha - 2) > 0$  που ισχύει, αφού  $\alpha > 2$ .

Έστω  $\alpha > \beta$ . Τότε:

$$2\alpha > \alpha + \beta \quad (1) \text{ (προσθέσαμε } \alpha)$$

Επίσης:

$$\beta > 2 \Rightarrow \alpha\beta > 2\alpha \quad (2) \text{ (πολλαπλασιάσαμε με } \alpha)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2):

$$2\alpha + \alpha\beta > \alpha + \beta + 2\alpha \Rightarrow \alpha\beta > \alpha + \beta$$

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε την περίπτωση  $\beta > \alpha$ .

3η Λύση Η Για να δείξουμε την ανισότητα  $\alpha\beta > \alpha + \beta$  αρκεί να δείξουμε ότι:  $2\alpha\beta > 2\alpha + 2\beta$  αρκεί:  $\alpha\beta + \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta > 0$  αρκεί:  $\alpha(\beta - 2) + \beta(\alpha - 2) > 0$ , που ισχύει αφού  $\alpha > 2$  και  $\beta > 2$ .

4η Λύση Έστω συνάρτηση

$$f(x) = (\alpha - 1)x - \alpha$$

με  $\alpha > 2$  με πεδίο ορισμού  $A = [0, +\infty)$ . Για  $x_1, x_2 \in A$  με  $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow (\alpha - 1)x_1 < (\alpha - 1)x_2 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(x_1 - x_2) < 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ , (αφού  $\alpha > 2$ ), οπότε η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $A$ .  $f(2) = (\alpha - 1) \cdot 2 - \alpha = \alpha - 2 > 0$  Οπότε, για  $x > 2$  είναι:  $f(x) > f(2) > 0 \Rightarrow \alpha x - x - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x > x + \alpha$  Θέτουμε  $x = \beta, \beta > 2$  και προκύπτει η ζητούμενη προς απόδειξη ανισότητα:  $\alpha\beta > \alpha + \beta$

**ΑΣΚΗΣΗ 10** (Παναγιώτης Μπίσδας) Να ληθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του  $m$

$$|2x - |2x - 1|| = -m^2x$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&p=59936#p59936>

**Λύση** (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Αν  $m = 0$ , παίρνουμε  $2x = |2x - 1|$  με μόνη αποδεκτή λύση την  $x = 1/4$ . Αν  $m \neq 0$ , τότε αφού

$$-m^2x = |2x - |2x - 1|| \geq 0$$

πρέπει να είναι  $x \leq 0$ . Συνεπώς,  $|2x - 1| = 1 - 2x$  και  $|4x - 1| = 1 - 4x$  κι η εξίσωση γίνεται

$$1 - 4x = -m^2x$$

που μας δίνει

$$(4 - m^2)x = 1$$

Αν  $m^2 \leq 4$  η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ αν  $m^2 > 4$ , τότε  $x = \frac{1}{4 - m^2}$ .



Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

**ΑΣΚΗΣΗ 11** (Στράτος Παπαδόπουλος) Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  με  $\angle B = 45^\circ$  και  $\angle \Gamma = 30^\circ$ . Αν  $\Delta$  είναι το μέσο της  $ΑΓ$  ναδειχθεί ότι  $\widehat{\Delta B \Gamma} = 15^\circ$ .

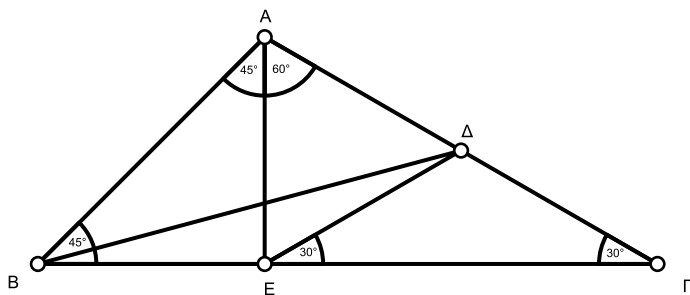
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=32336#p32336>

**Λύση 1** (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Αν  $ΑΕ$  ύψος  $\gamma\omega\nu BAE=45^\circ$  και επομένως

$$AE=BE \quad (1)$$

Επίσης  $\angle EAG=60^\circ$  και επειδή  $ΕΔ=ΑΓ/2=ΑΔ$  έπεται ότι  $ΑΕΔ$  ισόπλευρο και λόγω της (1) προκύπτει  $BE=ΕΔ$  συνεπώς

$$\angle EBD=\angle BAE \quad (2)$$



Είναι όμως  $\text{τριγ}ΕΔΓ$  ισοσκελές άρα  $\angle ΔΕΓ=\angle ΔΓΕ=30^\circ$  (3) Από (2,3) λαμβανομένου υπόψη ότι  $\gamma\omega\nu ΔΕΓ$  εξωτερική στο  $\text{τριγ} BEΔ$  προκύπτει ότι  $\widehat{ΔBE}=15^\circ$ .

**Λύση 2** (Φωτεινή Καλδή) Με νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο  $BΔΓ$  όπου  $\widehat{ΔB \Gamma} = x$  έχουμε:

$$\frac{b}{2 \cdot \sin x} = \frac{B\Delta}{\sin 30}$$

Με νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο  $ABΔ$  έχουμε:

$$\frac{b}{2 \cdot \sin(45-x)} = \frac{B\Delta}{\sin 75}$$

από αυτές τις δύο παίρνουμε

$$\frac{\sin(45-x)}{\sin x} = \frac{\sin 75}{\sin 30}, \quad (1)$$

η  $x = 15^\circ$  ικανοποιεί την (1), είναι και μοναδική αφού η

$$f(x) = \frac{\sin(45-x)}{\sin x}$$

είναι γνησίως φθίνουσα

**Λύση 3** (Γιώργος Ρίζος) Από νόμο ημιτόνων στο  $ABΓ$ :

$$\frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\alpha}{\eta\mu 105^\circ} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 75^\circ}$$

Από νόμο ημιτόνων στο  $BΔΓ$ :

$$\frac{\frac{\beta}{2}}{\eta\mu \omega} = \frac{\alpha}{\eta\mu (150^\circ - \omega)} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\eta\mu \omega}{\eta\mu (30^\circ + \omega)}$$

Είναι:

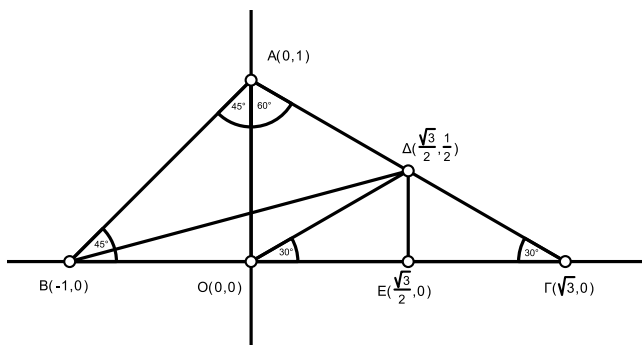
$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\eta\mu \omega}{\eta\mu (30^\circ + \omega)} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega + \sqrt{3}\eta\mu \omega} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \omega + \sqrt{6}\eta\mu \omega = 2\sqrt{6}\eta\mu \omega + 2\sqrt{2}\eta\mu \omega \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \omega = (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})\eta\mu \omega \Leftrightarrow \sigma\phi \omega = \sqrt{3} + 2$$

και αφού  $0^\circ < \omega < 45^\circ$ , είναι  $\omega = 15^\circ$ .

$$(\text{Είναι: } \sigma\phi 15^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \dots = \sqrt{3} + 2)$$

**Λύση 4** (Γιώργος Ρίζος) Προσθέτω μια δεύτερη λύση με Αναλυτική Γεωμετρία.



Προτείνω το θέμα αυτό σε όποιον θέλει να διδάξει σύστημα συντεταγμένων στη Β' Λυκείου, για εξάσκηση των μαθητών στην κατάλληλη τοποθέτηση σχημάτων σε σύστημα συντεταγμένων. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με κορυφή  $O$  παίρνουμε σημεία  $A(0,1)$   $B(-1,0)$  και  $\Gamma(\sqrt{3},0)$ . Το  $AB\Gamma$  έχει γωνίες  $\widehat{A} = 105^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ . Το μέσο  $\Delta$  της  $ΑΓ$  έχει συντεταγμένες  $\Delta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Τότε:

$$\varepsilon\phi \widehat{\Delta B \Gamma} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3} - 2$$

και αφού

$$0^\circ < \widehat{\Delta B \Gamma} < 45^\circ$$

είναι

$$\widehat{\Delta B \Gamma} = 15^\circ$$

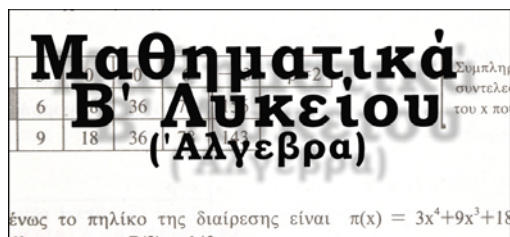
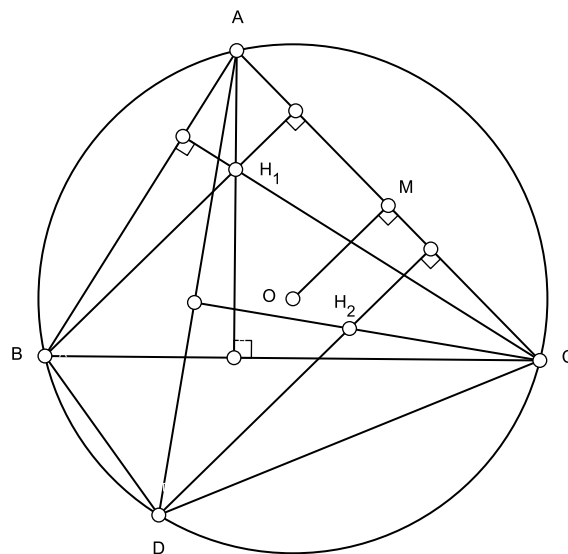
**ΑΣΚΗΣΗ 12** (Ανδρέας Βαρβεράκης) Αν  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο τετράπλευρο, τότε τα ορθόκεντρα των τριγώνων  $AB\Gamma$ ,  $AB\Delta$ ,  $B\Gamma\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι κορυφές ίσου με το αρχικό τετραπλεύρου.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=66591#p66591>

**Λύση 1** (Κώστας Δόρτσιος) Από τα τρίγωνα  $ABC$  και  $ACD$  είναι:  $BAH_1 = //2(OM)$ ,  $DH_2 = //2(OM)$  Άρα  $AH_1 = //DH_2$  και συνεπώς:

$$BD = //H_1H_2$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνεται πως και οι άλλες πλευρές του τετραπλεύρου που σχηματίζουν τα ορθόκεντρα είναι ίσες και παράλληλες με τις πλευρές αρχικού τετραπλεύρου. Άρα τα δύο αυτά τετράπλευρα είναι ίσα.



Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

**ΑΣΚΗΣΗ 13** (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Να ληθεί η εξίσωση:

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + (\sqrt{2} - 1)^{(x+1)^2} = 2$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=12239#wrapheader>

**Λύση 1** (Γιώργος) Αρχικά παρατηρούμε ότι  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$

Έτσι η εξίσωση μετασχηματίζεται στην ισοδυναμη  $(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow a^z + a^{-z} = 2$  όπου

$a^z = (\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2}$  Όμως το άθροισμα δυο αντιστρόφων θετικών είναι πάντα μεγαλύτερο ίσο του 2. Άρα ισχύει το ίσον για  $a^z = 1$  Έτσι  $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

**Λύση 2** (Χρήστος Στραγάλης) Χρησιμοποιώντας την γνωστή ανισότητα  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ,  $a, b > 0$  έχουμε:  $(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + (\sqrt{2} - 1)^{(x+1)^2}$

$$\geq 2\sqrt{[(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)]^{(x+1)^2}} = 2$$

άρα ισχύει η ισότητα στη δοθείσα και:

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} = (\sqrt{2} - 1)^{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{2} + 1)^{2(x+1)^2} = 1 = (\sqrt{2} + 1)^0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

**Λύση 3** (Κώστας) Είναι:

$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 \Rightarrow (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} + 1)^{-1}$  οπότε η δοθείσα γίνεται:  $(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + (\sqrt{2} + 1)^{-(x+1)^2} = 2$

Από την ανισότητα  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ,  $a, b > 0$  όμως έχουμε

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + (\sqrt{2} + 1)^{-(x+1)^2} \geq$$

$$2\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} \cdot (\sqrt{2} + 1)^{-(x+1)^2}} = 2.$$

Για να έχουμε ισότητα πρέπει

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} = (\sqrt{2} + 1)^{-(x+1)^2} \Leftrightarrow x = -1$$

**Λύση 4** (Χρήστος Λαζαρίδης) Μία μάλλον απλούστερη προσπάθεια:

$$a^v + \left(\frac{1}{a}\right)^v = 2 \Leftrightarrow a^{2v} - 2a^v + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^v - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a^v = 1$$

Με  $a = \sqrt{2} + 1$ ,  $v = (x + 1)^2$  είναι:

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

**ΑΣΚΗΣΗ 14** (Γιώργος Ροδόπουλος) Να ληθεί η εξίσωση

$$3^{x+1} - 9^x + 3 \cdot 5^x - 25^x = 15^x + 3$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=12190#wrapheader>

**Λύση 1** (Σπύρος Καπελλίδης) Η εξίσωση γράφεται

$$3(3^x + 5^x) = 9^x + 25^x + 3^x + 3 \quad (1)$$

Αλλά από την ανισότητα του Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$9^x + 25^x \geq 2\sqrt{9^x 25^x} = 2 \cdot 5^x 3^x$$

Συνεπώς η (1) γράφεται

$$3(3^x + 5^x - 3^x 5^x - 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(3^x - 1)(1 - 5^x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(3^x \geq 1 \wedge 5^x \leq 1) \vee (3^x \leq 1 \wedge 5^x \geq 1) \Rightarrow$$

$$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

Πράγματι η λύση 0 επαληθεύει την αρχική

**Λύση 2** (Γιώργος) Θέτουμε  $3^x = w$  και  $5^x = y$ .

Έτσι η εξίσωση γράφεται

$$w^2 + y^2 + wy - 3y - 3w + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$y^2 + (w - 3)y + w^2 - 3w + 3 = 0$  Αν τη λάβουμε ως τριώνυμο με άγνωστο το  $y$  τότε έχει διακρίνουσα  $D = -3(w - 1)^2$  που για να έχει λύση πρέπει  $w = 1$  και  $y = 1$ . Άρα  $x = 0$

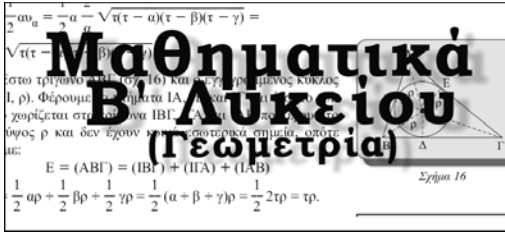
**Σχόλιο** (Γιώργος Ροδόπουλος)

Η ιδέα ήταν:

Η ισότητα  $(\alpha + \beta - 2)^2 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0$ , (1) αλ-

ηθεύει μόνο όταν  $\alpha = \beta = 1$

Αν θέσουμε στην (1)  $\alpha = 3^x$  και  $\beta = 5^x$  και εκτελέσουμε τις πράξεις προκύπτει η δοσμένη εξίσωση.



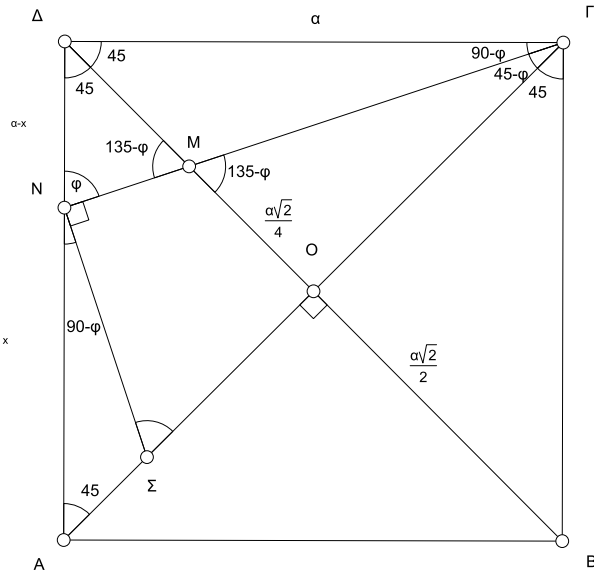
Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

**ΑΣΚΗΣΗ 15** (KARKAR) Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a$ , κέντρου  $O$ , και έστω  $M$  το μέσο της  $OD$ . Φέρω την  $GM$  η οποία τέμνει την  $AD$  στο  $N$ . Στο  $N$  φέρω κάθετη της  $NG$ , η οποία τέμνει την  $AG$  στο  $\Sigma$ . Βρείτε το  $A\Sigma$  συναρτήσει της πλευράς  $a$ .

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=67791#p67791>

**Λύση 1** (Μιχάλης Νάννος) Τα τρίγωνα  $NA\Sigma$ ,  $\Gamma\Delta M$  έχουν τρεις γωνίες αντίστοιχα ίσες, άρα είναι όμοια με αναλογία:  $\frac{\Sigma A}{\sqrt{2}\alpha} =$

$$\frac{x}{\alpha} \quad (1)$$

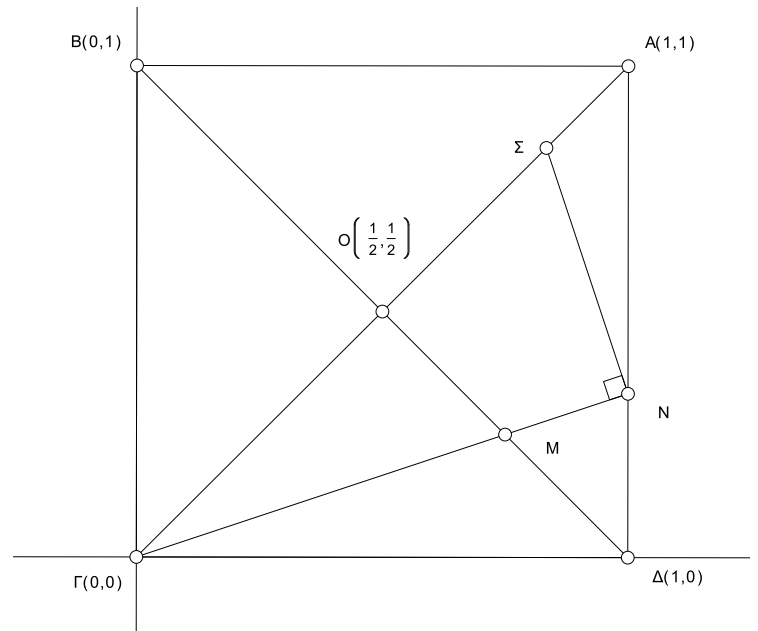


Ομοίως τα τρίγωνα  $\Delta MN$ ,  $M\Gamma B$  είναι όμοια με αναλογία:

$$\frac{\alpha - x}{\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}\alpha}{4}}{\frac{\sqrt{2}\alpha}{4} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{4}} \quad (2) \text{ Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει}$$

$$\text{ότι } \Sigma A = \frac{\sqrt{2}\alpha}{6}.$$

**Λύση 2** (Γιώργος Ρίζος) Και μια αναλυτικογεωμετρική λύση (εξίσου όμορφη πιστεύω με τη λύση του Μιχάλη). Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο  $\Gamma(0, 0)$  παίρνουμε τα σημεία  $\Delta(1, 0)$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(0, 1)$ . Το μέσο της  $B\Delta$  είναι το  $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .



Το μέσο του  $OD$  είναι το  $M\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

Η  $GM$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\overrightarrow{GM}} = \frac{1}{3}$  και εξίσωση:  $y = \frac{1}{3}x$  και τέμνει την  $AD$  στο  $N\left(1, \frac{1}{3}\right)$ .

Η  $AG$  έχει εξίσωση:  $y = x$

Η κάθετη στη  $GN$  στο  $N$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda_{\overrightarrow{N\Sigma}} = -3$ , εξίσωση:  $y - \frac{1}{3} = -3(x - 1)$  και τέμνει την  $AG$  στο  $\Sigma\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ ,

$$\text{άρα } (A\Sigma) = \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με  $a$ , είναι:

$$(A\Sigma) = \frac{\sqrt{2}\alpha}{6}$$

**Λύση 3** (Φωτεινή Καλδή)

• στο τρίγωνο  $OM\Gamma$ :

$$\epsilon\phi(\phi - 45^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \epsilon\phi\phi = 3$$

• στο τρίγωνο  $\Gamma\Delta N$ :

$$\epsilon\phi(90^\circ - \phi) = \frac{\Delta N}{a} \Rightarrow \Delta N = \frac{a}{3} \Rightarrow AN = \frac{2a}{3}$$

• στο τρίγωνο  $AN\Sigma$  με νόμο ημιτόνων:

$$\frac{A\Sigma}{\eta\mu(90^\circ - \phi)} = \frac{AN}{\eta\mu(135^\circ - \phi)} \Rightarrow$$

$$\frac{A\Sigma}{\sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{2a}{3\eta\mu(45^\circ + \phi)} \Rightarrow A\Sigma = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 16** (Μπάμπης Στεργίου) Ένα τρίγωνο έχει περίμετρο 28 και ο εγγεγραμμένος κύκλος χωρίζει μια διάμεσό του σε τρία ίσα μέρη. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών αυτού του τριγώνου.

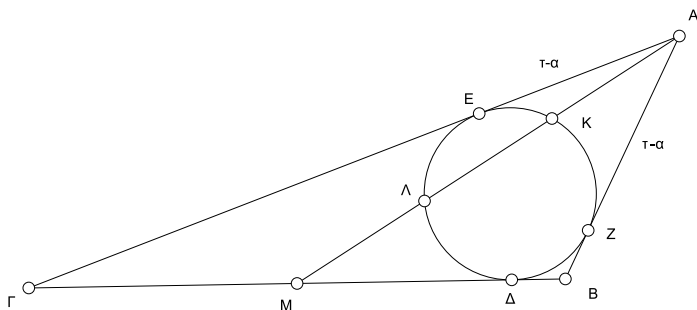
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=64442#p64442>

**Λύση 1** (Κώστας Δόρτσιος) Είναι:

$$\alpha + \beta + \gamma = 28 \quad (1)$$

ακόμα:

$$AZ^2 = (AK)(AL) \Rightarrow (\tau - \alpha)^2 = \frac{1}{3}\mu_\alpha \frac{2}{3}\mu_\alpha = \frac{2}{9}\mu_\alpha^2 \quad (2)$$



Επίσης:

$$M\Delta^2 = (MA)(MK) = \frac{2}{9}\mu_\alpha^2 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$AZ = M\Delta \Rightarrow \tau - \alpha = (\tau - \gamma) - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\gamma \quad (4)$$

η (2) δίνει:

$$(14 - \alpha)^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$$

και σε συνδυασμό με τις (1) και (4) τελικά την:  $\gamma^2 - 12\gamma + 35 = 0$  που έχει λύσεις:  $\gamma_1 = 7, \gamma_2 = 5$  Άρα υπάρχουν δύο τρίγωνα ώστε να συμβαίνει το ζητούμενο:  $\gamma_1 = 7, \alpha_1 = 14, \beta_1 = 7$  το οποίο είναι ισοσκελές και  $\gamma_2 = 5, \alpha_2 = 10, \beta_2 = 13$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1. Στο σχήμα κατασκευάστηκε η δεύτερη περίπτωση που είναι και η διακριτή.

2. Για την πρώτη περίπτωση που το τρίγωνο εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα ίσο με 14, όπου στα άκρα του είναι τα σημεία B και Γ και στο μέσο του M η κορυφή A. Στην περίπτωση αυτή η διάμεσος AM είναι μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα AA και ο εγγεγραμμένος κύκλος επίσης εκφυλίζεται στον κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα μηδέν  $C(A, 0)$ . Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε πως και σ' αυτήν την περίπτωση το μηδενικό τμήμα της διαμέσου τριχοτομείται από το σημείο - εγγεγραμμένο κύκλο. Θα μπορούσε αυτή η περίπτωση να εξαιρεθεί ως λύση αν η αναζήτηση ήταν μεταξύ των σκαληνών τριγώνων που ικανοποιούν τη δοθείσα ιδιότητα.

Επιμελητής: Μίλτος Παπαρηγοράκης

**ΑΣΚΗΣΗ 17** (Γρηγόρης Κωστάκος) Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ, αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΔΕ και ΔΖ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=4292>

**Λύση** (Φωτεινή Καλδή) Έστω

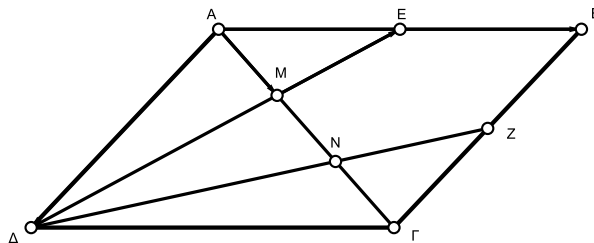
$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{\beta}, \quad \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AG}, \quad \overrightarrow{ME} = y\overrightarrow{DE}$$

$$\text{τότε} \quad \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AG} = x(\vec{\alpha} + \vec{\beta}), \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} - y(-\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}) = \frac{(1-y)}{2}\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \quad (2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε ότι

$x = y = \frac{1}{3}$  και επομένως  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$  όμοια εργαζόμαστε για το  $\overrightarrow{CN}$  και καταλήγουμε στο συμπέρασμα



**ΑΣΚΗΣΗ 18** (Χρήστος Καρδάσης) Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  και ο πραγματικός  $x$  για τον οποίο ισχύει

$$x^2\vec{\alpha} + x\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$$

Να δείξετε ότι

$$a) \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} \geq 0$$

β) αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0$$

τότε

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=1980>



**Λύση** (Αντώνης Σπυριδάκης) Είναι  $x \neq 0$  διότι αν  $x = 0$  τότε  $\vec{\gamma} = \vec{0}$ , άτοπο.

$$\alpha) \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\gamma} \geq 0 \Leftrightarrow x^2\vec{\beta}^2 - 4x^2\vec{\alpha}\vec{\gamma} \geq 0 \Leftrightarrow (-\vec{\gamma} - x^2\vec{\alpha})^2 - 4x^2\vec{\alpha}\vec{\gamma} \geq 0 \Leftrightarrow (\vec{\gamma} - x^2\vec{\alpha})^2 \geq 0, \text{ ισχύει.}$$

β)  $x^2\vec{\beta}^2 = (-\vec{\gamma} - x^2\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow 4x^2\vec{\alpha}\vec{\gamma} = (-\vec{\gamma} - x^2\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \dots (\vec{\gamma} - x^2\vec{\alpha})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma} = x^2\vec{\alpha}$  και αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση έχουμε:

$$2x^2\vec{\alpha} + x\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} = -2x\vec{\alpha} \text{ δηλ. } \vec{\alpha} // \vec{\beta}$$

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσας

**ΑΣΚΗΣΗ 19** (Μάκης Χατζόπουλος) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+x+b}{x+3}, & x \neq -3 \\ -5, & x = -3 \end{cases}$$

όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη  $-2$  και  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι  $a = 1$  και  $b = -6$ .

β. Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  στο  $x = -3$ .

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της  $f$  και να βρείτε το γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  και το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει με τους άξονες των συντεταγμένων

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=11229&p=61361#p61361>

**Λύση** (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη  $-2$ ,

$$\text{έχουμε ότι } f(0) = -2 \Leftrightarrow \frac{a \cdot 0^2 + 0 + b}{0 + 3} = -2 \Leftrightarrow b = -6 \quad (I)$$

Επίσης η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $-3$ , οπότε:  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$ . Για  $x \neq -3$ , έχουμε

$$\text{ότι: } f(x) = \frac{ax^2+x+b}{x+3} \Leftrightarrow f(x)(x+3) = ax^2 + x + b, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -3} [f(x)(x+3)] = \lim_{x \rightarrow -3} (ax^2 + x + b)$$

$$0 = a(-3)^2 + (-3) + b \quad 9a + b = 3 \quad (II)$$

α. Το σύστημα των (I) και (II) δίνει ότι:  $a = 1$  και  $b = -6$ .

β. Για  $a = 1$  και  $b = -6$ , έχουμε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x+3}, & x \neq -3 \\ -5, & x = -3 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \neq -3 \\ -5, & x = -3 \end{cases} = x-2$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική, με  $f'(x) = 1$ , οπότε και  $f'(-3) = 1$ .

γ. Η γραφική παράσταση της  $f$  είναι ευθεία που τέμνει στους άξονες στα σημεία  $B(0, -2)$  και  $A(0, 2)$ . Συνεπώς το χωρίο που σχηματίζει η γραφική παράσταση της  $f$  με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το ορθογώνιο τρίγωνο  $AOB$  με κάθετες πλευρές  $OA = OB = 2$ , οπότε το εμβαδό του είναι  $(OAB) = 2\tau.μ.$

Αν  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'x$ , ισχύει  $\varepsilon\phi\omega = 1$ , οπότε  $\omega = \frac{\pi}{4}$ , αφού  $\omega \in [0, \pi)$  και η  $\varepsilon\phi\omega$  είναι θετική μόνο στο  $(0, \pi/2)$ , όπου είναι γνησίως αύξουσα η αντίστοιχη συνάρτηση.

**ΑΣΚΗΣΗ 20** (Σπύρος Καρδαμίτσας) Τέσσερις αριθμοί  $x, y, z, \omega$  με  $x < y < z < \omega$  έχουν μέση τιμή 3, διάμεσο 3 και εύρος 4.

α) Να αποδείξετε ότι  $x = 1$  και  $\omega = 5$

β) Αν η διακύμανση των τεσσάρων αριθμών είναι  $\frac{5}{2}$  να βρείτε τους αριθμούς  $y$  και  $z$ .

γ) Αν στους παραπάνω τέσσερις αριθμούς προσθέσουμε και άλλους 6 αριθμούς τους  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  τέτοιους ώστε

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 38 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 244$$

να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των 10 αριθμών.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&p=66117#p66117>

**Λύση** (Δημήτριος Κατσιπόδας) i. Από το εύρος έχουμε:

$$\omega - x = 4 \quad (1)$$

Από την διάμεσο έχουμε:

$$\frac{\psi + z}{2} = 3 \Rightarrow \psi + z = 6 \quad (2)$$

Από την μέση τιμή έχουμε:

$$\frac{x+\psi+z+\omega}{4} = 3 \Rightarrow x + \psi + z + \omega = 12 \Rightarrow x + 6 + \omega = 12 \Rightarrow x + \omega = 6 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (3) και έχουμε:  $x = 1$  και  $\omega = 5$

ii.

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (\psi-3)^2 + (z-3)^2 + (5-3)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} = \frac{4 + (\psi-3)^2 + (z-3)^2 + 4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} = \frac{(\psi-3)^2 + (z-3)^2}{4} + 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(\psi - 3)^2 + (z - 3)^2}{4} \Rightarrow$$

$$(\psi - 3)^2 + (z - 3)^2 = 2 \quad (4)$$

λύνουμε το σύστημα (2),(4) και έχουμε:

$$(\psi - 3)^2 + (z - 3)^2 = 2 \Rightarrow (2)$$

$$(\psi - 3)^2 + (3 - \psi)^2 = 2 \Rightarrow (\psi - 3)^2 = 1$$

οπότε  $\psi - 3 = 1 \Rightarrow \psi = 4$  τότε  $z = 2$  Αδύνατο

ή  $\psi - 3 = -1 \Rightarrow \psi = 2$  τότε  $z = 4$  δεκτό

Άρα  $x = 1, \psi = 2, z = 4, \omega = 5$

iii. Η νέα μέση τιμή είναι

$$\bar{\psi} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i + 12}{10} = \frac{38 + 12}{10} = 5$$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 16 + 25 = 46$$

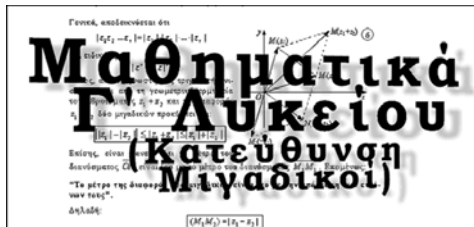
$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 50$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 244 + 46 = 290$$

$$\sigma_{\psi}^2 = \frac{1}{10} \left( \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{10} x_i)^2}{10} \right) = \frac{1}{10} (290 - \frac{50^2}{10}) = \frac{1}{10} (290 - 250) = 4$$

$$\frac{2500}{10} = \frac{1}{10} (290 - 250) = 4$$

$$\text{οπότε } \sigma_{\psi} = \sqrt{4} = 2$$



Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

**ΑΣΚΗΣΗ 21** (Μπάμπης Στεργίου) Τρεις μιγαδικοί αριθμοί  $a, b, c$  έχουν μέτρο 1 και ικανοποιούν τη σχέση:  $a + b + c = 1$  Να αποδειχθεί ότι:

a)  $ab + bc + ca = abc$

β)  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$

γ)  $\frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} = 1$

δ) Αν οι αριθμοί  $a, b, c$ , είναι διαφορετικοί ανά δύο, τότε οι εικόνες τους σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=871>

**Λύση 1** (giannisl990)

α) Ισχύει  $\bar{a} = \frac{1}{a}$  και  $\bar{b} = \frac{1}{b}$  και  $\bar{c} = \frac{1}{c}$  από την σχέση

$$a + b + c = 1 \Leftrightarrow \overline{a + b + c} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc$$

β) Είναι

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow$$

$$ab + bc + ca - abc = 0 \Leftrightarrow$$

$$b(a + c) + ca(1 - b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$b(1 - b) + ca(1 - b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - b)(b + ca) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - b)(1 - a - c + ca) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$$

γ)  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0 \Leftrightarrow a = 1$  ή  $b = 1$  ή  $c = 1$  Θεωρώ δίχως βλάβη της γενικότητας  $a = 1$ . Οπότε αρκεί νδο  $\frac{1}{b^{2009}} + \frac{1}{c^{2009}} =$

$$0 \Leftrightarrow b^{2009} = -c^{2009} \text{ όμως από την } a + b + c = 1 \text{ παίρνουμε } b + c = 0 \Leftrightarrow b = -c \Rightarrow b^{2009} = -c^{2009} \Leftrightarrow b^{2009} + c^{2009} = 0$$

δ) Αρκεί να δείξω ότι  $|b - c|^2 = |a - c|^2 + |b - a|^2$ . Όμως  $a = 1$  και  $b + c = 0$  οπότε αρκεί  $|2c|^2 = |c + 1|^2 + |c - 1|^2$  που ισχύει αφού  $|c + 1|^2 + |c - 1|^2 = 2(|c|^2 + 1) = 4$  και  $|2c|^2 = 4$

**ΑΣΚΗΣΗ 22** (Χρήστος Λαζαρίδης) Η εξίσωση  $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έχει ρίζες τους μιγαδικούς  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Να υπολογίσετε τους  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε να ισχύει:  $z_1^3 + z_2^2 = 1$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=1544>

**Λύση 1** (Αλέξανδρος Συγκέλακης) Αφού λοιπόν  $z_1^2 - \alpha z_1 + \beta = 0$  και  $z_2^2 - \alpha z_2 + \beta = 0$  όπου  $z_2 = \bar{z}_1$  άρα μπορούμε να υποθετίσουμε την εξίσωση  $z_1^3 + z_2^2 = 1$  σε πρώτου βαθμού με διαδοχικές αντικαταστάσεις των δυνάμεων  $z_1^2$  και  $z_2^2$ . Τότε θα πάρουμε τελικά  $a^2 z_1 - ab - z_1 b + a \bar{z}_1 - b = 1$  (1). Όμως αφού  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  άρα η διακρίνουσα  $D = a^2 - 4b$  είναι αρνητική οπότε

$$z_1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}i$$

και βάζοντάς το στην παραπάνω εξίσωση (1) και εξισώνοντας τα φανταστικά μέλη παίρνουμε ότι  $a^2 - b - a = 0$  (2) και έτσι υποθετίμίζοντας την εξίσωση (με διαδοχικές αντικαταστάσεις του  $a^2$ ) που θα προκύψει εξισώνοντας τα πραγματικά μέλη παίρνουμε τελικά ότι  $a - ab - 1 = 0$  (3) κι έτσι λύνοντας το σύστημα των (2), (3) παίρνουμε  $(a, b) = (1, 0)$  ή  $(a, b) = (-1, 2)$ . Το ζεύγος  $(1, 0)$  δεν επαληθεύει τις αρχικές υποθέσεις διότι παίρνουμε πραγματικές ρίζες ενώ το ζεύγος  $(-1, 2)$  είναι δεκτό.

**Λύση 2** (Γιώργος Ροδόπουλος)

$$z_1^3 + \bar{z}_1^2 = 1 \quad (1)$$

και παίρνοντας τους συζυγείς στην (1) προκύπτει

$$\bar{z}_1^3 + z_1^2 = 1 \quad (2)$$

**(1)-(2)**  $(z_1 - \bar{z}_1)(z_1^2 + \bar{z}_1^2 + z_1 \bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1)(z_1 + \bar{z}_1) = 0 \Leftrightarrow (z_1^2 + \bar{z}_1^2 + z_1 \bar{z}_1) - (z_1 + \bar{z}_1) = 0$  (γιατί ο  $z_1$  δεν είναι πραγματικός)

$$\Leftrightarrow (z_1 + \bar{z}_1)^2 - z_1 \bar{z}_1 - (z_1 + \bar{z}_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b - a = 0 \quad (3)$$

$$(1)+(2) (z_1 + \bar{z}_1)(z_1^2 + \bar{z}_1^2 - z_1 \bar{z}_1) + (z_1 + \bar{z}_1)^2 - 2z_1 \bar{z}_1 = 2 \Leftrightarrow (z_1 + \bar{z}_1)[(z_1 + \bar{z}_1)^2 - 3z_1 \bar{z}_1] + (z_1 + \bar{z}_1)^2 - 2z_1 \bar{z}_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 3b) + a^2 - 2b = 2$$

$$\Leftrightarrow a(a + b - 3b) + a + b - 2b = 2$$

$$(\text{λόγω της (3)}) \Leftrightarrow a(a - 2b) + a - b - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + a - b - 2 = 0 \Leftrightarrow a + b - 2ab + a - b - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2ab - 2 = 0 \Leftrightarrow a - ab - 1 = 0 \quad (4)$$

Από την (3) είναι  $b = a^2 - a$  και με αντικατάσταση στην (4) παίρνουμε  $a - a(a^2 - a) - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1) - a^2(a - 1) =$

$0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1$  Επειδή η αρχική εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες είναι

$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \quad (5)$$

Αν  $a = 1$  τότε από (3)  $b = 0$ , απορρίπτονται γιατί δεν ικανοποιείται η (5) Αν  $a = -1$  τότε από (3)  $b = 2$  δεκτή αρχικά αφού ικανοποιείται η (5) Για τις τιμές  $a = -1$  και  $b = 2$  η αρχική συνθήκη εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται. Ας κάνουμε και την επαλήθευση Για  $a = -1$  και  $b = 2$  η εξίσωση είναι:  $x^2 + x + 2 = 0$  Είναι  $z_1^2 + z_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 = -z_1 - 2$  (6) οπότε  $z_1^3 = -z_1^2 - 2z_1 = z_1 + 2 - 2z_1 = 2 - z_1$  (χρήση της (6)) Επίσης  $z_2^2 + z_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z_2^2 = -z_2 - 2$  Έτσι  $z_1^3 + z_2^3 = 2 - z_1 - z_2 - 2 = -(z_1 + z_2) = -(-1) = 1$



Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

**ΑΣΚΗΣΗ 23** (Iason Pap.) Να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με ιδιότητα  $f(f(x)) = x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=2985>

**Λύση** (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Αν υπάρχει τέτοια  $f$ , τότε θα είναι 1-1. Αφού  $f(f(f(x))) = f(-x^3)$  και  $f(f(f(x))) = -f(x)^3$ , έχουμε  $f(-x^3) = -f(x)^3$  κι άρα  $f(0) = 0$ ,  $f(-1) = -f(1)^3$ , και  $f(1) = -f(-1)^3$ . Συνεπώς,  $f(1) = f(1)^9$ , που μας δίνει  $f(1) = -1, 0$  ή  $1$ . Αν  $f(1) = 1$ , τότε  $f(f(1)) = f(1) = 1$ , ενώ από την ιδιότητα της  $f$ , είναι  $f(f(1)) = -1$ , άτοπο. Εφόσον  $f(0) = 0$  και η  $f$  είναι 1-1, απομένει να είναι  $f(1) = -1$ . Αλλά έχουμε  $f(-1) = f(-1)^9$ , που μας δίνει  $f(-1) = -1, 0$  ή  $1$ , από τις οποίες η μόνη αποδεκτή μπορεί να είναι η  $f(-1) = 1$ . Αλλά τότε  $f(f(1)) = f(-1) = 1$ , ενώ από την ιδιότητα της  $f$  είναι  $f(f(1)) = -1$ , άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

**ΑΣΚΗΣΗ 24** (Σπύρος Ορφανάκης) Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

A)  $f(0) = 0$  και  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

B) για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$  και  $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_\nu) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\nu) \quad (2)$$

Γ)  $f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{f(1)}{\nu}$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Δ) υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(q) = \lambda \cdot q$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ .

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=1300>

**Λύση 1** (Φώτης Κουτσουμπίδης)

A) Στην (1) για  $x = y = 0$  έχουμε:  $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ .

Ενώ από την (1) για  $y \rightarrow -x$  έχουμε:

$$f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B) Για  $\nu = 1$ :  $f(x_1) = f(x_1)$  ισχύει

Έστω ισχύει για  $\nu = \kappa$ :

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_\kappa) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\kappa) \quad (A)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για  $\nu = \kappa + 1$  δηλαδή ότι:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_{\kappa+1}) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{\kappa+1})$$

Έχουμε:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_{\kappa+1}) =$$

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_\kappa + x_{\kappa+1}) \stackrel{(1)}{=} f(x_1 + x_2 + \dots + x_\kappa) + f(x_{\kappa+1}) \stackrel{(A)}{=} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_\kappa) + f(x_{\kappa+1}) \text{ (ισχύει)}$$

επομένως με βάση τη Μαθηματική Επαγωγή η σχέση (2) ισχύει για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Γ) Από τη σχέση (2) και για  $x_1 = x_2 = \dots = x_\nu = \frac{1}{\nu}$  έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \dots + \frac{1}{\nu}\right) =$$

$$f\left(\frac{1}{\nu}\right) + f\left(\frac{1}{\nu}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\nu \cdot \frac{1}{\nu}\right) = \nu \cdot f\left(\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow f(1) = \nu \cdot f\left(\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{f(1)}{\nu} \quad (3)$$

για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$

Δ) Έστω  $q = \frac{\kappa}{\nu}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Για  $\kappa > 0$ :

$$f(q) = f\left(\frac{\kappa}{\nu}\right) = f\left(\kappa \cdot \frac{1}{\nu}\right) = f\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \dots + \frac{1}{\nu}\right) \stackrel{(2)}{=} f\left(\frac{1}{\nu}\right) + f\left(\frac{1}{\nu}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{\nu}\right) = \kappa \cdot f\left(\frac{1}{\nu}\right) \stackrel{(3)}{=} \kappa \cdot \frac{f(1)}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu} \cdot f(1) = q \cdot f(1).$$

$$f(q) = q \cdot f(1).$$

Για  $\kappa < 0$ :

Υπάρχει ακέραιος  $\mu > 0$  τέτοιος, ώστε  $\kappa = -\mu$ .

$$f(q) = f\left(\frac{\kappa}{\nu}\right) = f\left(-\frac{\mu}{\nu}\right) = -f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \dots = -\frac{\mu}{\nu} \cdot f(1) = \frac{\kappa}{\nu} \cdot f(1) = q \cdot f(1).$$

(όπως πριν) Για  $\kappa = 0 \Leftrightarrow q = 0$  ισχύει:  $f(0) = 0$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Γενικά υπάρχει  $\lambda = f(1) \in \mathbb{R}$  τέτοιος, ώστε  $f(q) = \lambda \cdot q$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 25** (Stelmarg— Μιχάλης Λάμπρου) Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{2n+1} - 2x + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

έχει μια ρίζα στο  $(0, 1)$

(Επέκταση από τον Μιχάλη Λάμπρου) Να την συνεχίσουμε: Δείξτε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο  $(0, 1)$  Επίσης να την δυσκολέψουμε (όμως τώρα πέφτουμε εκτός σχολικής ύλης, αλλιώς δεν είναι δύσκολη - ούτε απλή). Αν  $x_n$  η μοναδική ρίζα της δοθείσας, στο  $(0, 1)$ , τότε  $(x_n)$  φθίνουσα και  $\lim x_n = \frac{1}{2}$ .

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=11726>

**Λύση 1** (Αντώνης Σπυριδάκης)  $x^{n+1} - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x(x^n - 1) = x - 1$  και για  $x \neq 1$  έχουμε  $x(x^{n-1} + \dots + x + 1) = 1$  Αν  $f(x) = x^n + \dots + x^2 + x - 1$ , τότε  $f(0)f(1) = 1 - n < 0$  οπότε από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι το  $P$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$

**Λύση 2** (Στην επέκταση του Μιχάλη Λάμπρου) (Σεραφείμ Τσιπέλης) Έστω ότι αποδείχθηκε ότι η ρίζα του  $P_n(x)$  είναι μοναδική και βρίσκεται στο διάστημα  $(1/2, 1)$ . Δηλαδή για κάθε  $n = 2, 3, \dots$  υπάρχει  $r_n \in (1/2, 1) : P_n(1/2 + r_n) = 0 \Rightarrow (1/2 + r_n)^{n+1} - 2r_n = 0$ . Θεωρώντας το πολυώνυμο  $Q_n(x) = (1/2 + x)^{n+1} - 2x$ , (που σύμφωνα με το παραπάνω θα έχει μοναδική ρίζα  $r_n$  στο  $(0, 1/2)$  αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία  $r_n$  είναι φθίνουσα και ότι  $\lim r_n = 0$ .  $Q_n(0) > 0$  για κάθε  $n = 2, 3, \dots$  επίσης για κάθε  $x_0 \in (0, 1/2)$  η ακολουθία  $a_n = (1/2 + x_0)^{n+1} - 2x_0$  είναι γνησίως φθίνουσα διότι  $(1/2 + x_0) < 1$ . Συνεπώς αν  $r_n$  στο  $(0, 1/2)$  είναι ρίζα του  $Q_n(x)$  θα έχουμε  $a_n(r_n) = (1/2 + r_n)^{n+1} - 2r_n = 0$  και επειδή η  $a_n$  είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει  $a_{n+1}(r_n) < 0$ , δηλαδή  $Q_{n+1}(r_n) < 0$ , που σε συνδυασμό με  $Q_{n+1}(0) > 0$ , έχουμε ότι  $r_{n+1} \in (0, r_n)$ , δηλαδή  $r_{n+1} < r_n$ , επομένως η ακολουθία  $r_n$  είναι γνησίως φθίνουσα. Για κάθε  $\epsilon > 0$  με  $\epsilon$  αρκετά μικρό (οπότε  $\frac{\ln(2\epsilon)}{\ln(1/2+\epsilon)}$ , υπάρχει θετικός ακέραιος  $n : n+1 > \frac{\ln(2\epsilon)}{\ln(1/2+\epsilon)}$ . Τότε  $n+1 > \frac{\ln(2\epsilon)}{\ln(1/2+\epsilon)} \Rightarrow (n+1)\ln(1/2+\epsilon) < \ln(2\epsilon) \Rightarrow (1/2 + \epsilon)^{n+1} < 2\epsilon \Rightarrow Q_n(\epsilon) < 0 \Rightarrow r_n \in (0, \epsilon) : Q_n(r_n) = 0$  και επειδή το  $\epsilon$  είναι αυθαίρετα μικρό θα έχουμε  $\lim r_n = 0$

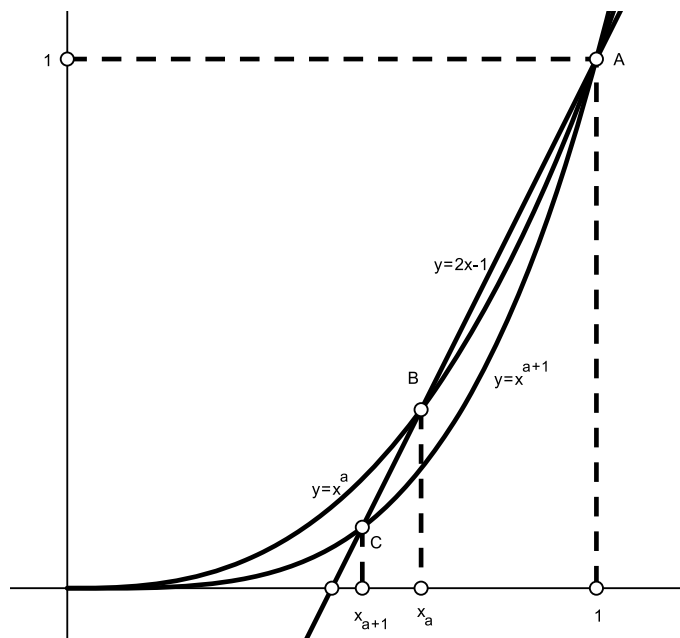
**Λύση 3** (Ροδόλφος Μπόρης) μια ακόμη λύση στηριγμένη (πάλι!) σε γεωμετρικές! Ιδέες  $p(1) = 0 \Rightarrow p(x) = (x-1)q(x)$  με  $q(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$  τότε

$$q(1) = n + 1 > 0, q(1/2) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$$

(από γεωμετρική πρόοδο) και

$$p''(x) = (n+1)x^n - 2 < 0$$

στο  $(1/2, 1)$  Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_n \in (1/2, 1) : p(x_n) = 0$  Το  $x_n$  είναι η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας  $y = 2x - 1$  και των κυρτών, γνήσια αυξουσών καμπύλων  $y = x^{n+1}$  που η  $y = x^{n+1}$  βρίσκεται "κάτω" της  $y = x^n$  [\*] αφού  $0 < x^{n+1} < x^n$  στο  $(1/2, 1)$  και που όλες τους διέρχονται από το σημείο  $A(1, 1)$



Τώρα είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν  $AB$  είναι χορδή κυρτής  $f$  η  $AB$  είναι πάνω από την  $f$  στο  $(a, b)$  και ανάποδα έξω από το  $(a, b)$  Τότε το  $C$  βρίσκεται κάτω του σημείου  $B$  λόγω της [\*] και αφού είναι σημείο της ευθείας  $y = 2x - 1$  βρίσκεται αριστερά της τετμημένης του  $B$  δηλαδή  $x_{n+1} < x_n$  αλλά τότε  $0 < x_n \leq x_1 < 1$  άρα  $(x_n)^n \rightarrow 0$  οπότε  $2x_n - 1 = (x_n)^n \rightarrow 0$  τελικά  $x_n \rightarrow 1/2$

**ΑΣΚΗΣΗ 26** (Ροδόλφος Μπόρης) Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  και  $y$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $y(a) = k \in \mathbb{R}$  τότε να εξεταστεί πόσες ρίζες μπορεί να έχει η συνάρτηση  $y$  και να βρεθεί ο τύπος της, συναρτήσει των  $a, k, f(t)$  σε καθεμία περίπτωση, όταν

$$y'(x) - f(x)y^2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=9051>

**Λύση** (Χρήστος Κυριαζής) Η  $y(x)$  παραγωγίσιμη, αρα και συνεχής. Θεωρώ (όχι τυχαία) τη συνάρτηση  $h$  με

$$h(x) = y(x)e^{-\int_a^x f(t)y(t)dt}, x \in \mathbb{R}$$

Η  $h$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$h'(x) = e^{-\int_a^x f(t)y(t)dt}(y'(x) - f(x)y^2(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς η  $h$  είναι σταθερή. Έχω  $c = h(a) = y(a) = k$  άρα γράφεται:  $h(x) = k \iff y(x) = ke^{\int_a^x f(t)y(t)dt} \forall x \in \mathbb{R}$  Απο τον τύπο αυτό καταλαβαίνουμε πως:

1) Αν  $k = 0$  τότε  $y(x) = 0$ , για κάθε  $x$  πραγματικό και η  $y(x)$  έχει άπειρες ρίζες(αφού είναι η μηδενική).

2) Αν  $k$  διαφορετικό απο το μηδέν, τότε προφανώς η  $y(x)$  δεν έχει καμία ρίζα (διατηρεί πρόσημο, όμοιο με αυτό του  $k$ ) Τώρα ως προς τον τύπο στην περίπτωση που  $k = 0$  καθαρίσαμε (είναι η μηδενική συνάρτηση που επαληθεύει). Ας εστιάσουμε στην περίπτωση που το  $k$  είναι διαφορετικό απο το μηδέν. Τότε και  $y(x)$  διαφορετικό του μηδενός. Άρα η αρχική γίνεται:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = f(x) \implies -\frac{1}{y(x)} = \int_a^x f(t)dt + c$$

Για  $x = a$  έχω  $c = -\frac{1}{k}$  Άρα:

$$y(x) = \frac{k}{1 - k \int_a^x f(t)dt}, x \in \mathbb{R}$$

συνάρτηση που επαληθεύει την αρχική.

**Λύση 2** (Ροδόλφος Μπόρης) Προφανώς η  $y$  είναι αύξουσα (όχι

γνήσια αναγκαστικά)

Αν δεν έχει ρίζα (οπότε θα διατηρεί και πρόσημο ίδιο με του  $k$  και σύνολο τιμών το  $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$  τότε όπως ο

Χρήστος διαιρώντας με  $y^2(x)$  βρίσκουμε  $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{k} - \int_a^x f(t)dt}$  [1]

Αν  $y$  έχει μία μόνο ρίζα το  $x_0$  τότε διασπούμε σε 2 περιπτώσεις.

α)  $k \neq 0$  και η β) να είναι  $k = 0$

α) Έστω  $a < x_0$  (οπότε  $k < 0$ ), στο  $(-\infty, x_0)$  ισχύει η [1] και για να δώσει λόγω συνέχειας  $y(x_0) = 0$  θα έπρεπε  $\lim_{x \rightarrow x_0-} y(x) = \pm\infty$ . Όμως το άλλο πλευρικό όριο είναι πραγματικός αριθμός  $(\int_a^{x_0} f(t)dt)$  και η συνέχεια δίνει το επιθυμητό άτοπο. Όμοια και όταν  $a > x_0$

Αν  $k = y(a)$  επειδή υποθέσαμε ότι η  $y$  έχει μία μόνο ρίζα θα είναι  $y(x) > 0$  για  $x > a$  και ανάποδα για  $x < a$  Στο  $(-\infty, a)$  θα ισχύει  $\frac{1}{y(x)} = F(x) + c_1$  όπου  $F$  αρχική της  $f$  και αντίστοιχα για  $x > a$  Αλλά έτσι το όριο του πρώτου μέλους θα είναι το  $\pm\infty$  ενώ του 2ου το  $F(a) + c_1$  (άτοπο).

Έστω τέλος ότι η  $y$  είχε 2 ή και περισσότερες ρίζες οι περιπτώσεις για το που βρίσκεται το  $a$  ανάγονται στις προηγούμενες και καταλήγουμε στις ίδιες περιπτώσεις με τον Χρήστο



Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

**ΑΣΚΗΣΗ 27** (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε το πρόσημο της

$$F(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

όταν  $t > 0$ .

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=7713&p=44293>

$$\begin{aligned} \text{Λύση (James Merryfield)} \int_0^t \sin x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx &= \\ \left[ (1 - \cos x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \right]_0^t - \int_0^t (1 - \cos x) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx &= \\ = \frac{1 - \cos t}{1+t^2} + \int_0^t \frac{2x(1 - \cos x)}{(1+x^2)^2} dx > 0. \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 28** (Σπύριος Παπαδόπουλος) Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^1 x^n (2-x)^n dx = 2^{2n} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx = J$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=4056>

**Λύση** (Κοτρώνης Αναστάσιος) Είναι

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (2x)^n (2-2x)^n dx \stackrel{2x=y}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 y^n (2-y)^n dy = \\ \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \int_1^2 y^n (2-y)^n dy &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} K. \end{aligned}$$

Όμως

$$K \stackrel{x=y-1}{=} \int_0^1 (1+x)^n (1-x)^n dx \stackrel{\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x)}{=} I.$$



Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

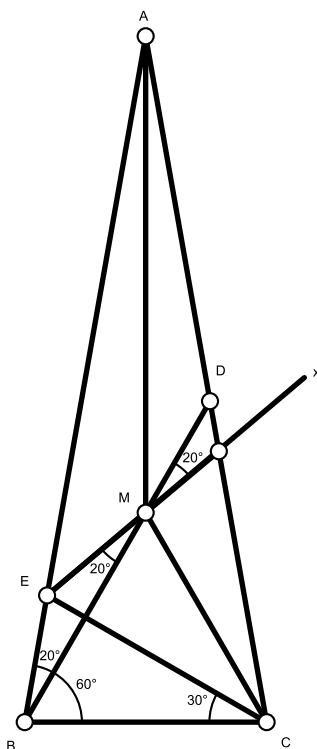
**ΑΣΚΗΣΗ 29** (Φωτεινή Καλδή) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$ , ( $AB = AC$ ) με  $\hat{A} = 20^\circ$ .

Στην πλευρά  $AC$  παίρνουμε σημείο  $D$ , ώστε  $\widehat{DBC} = 60^\circ$  και στην πλευρά  $AB$  σημείο  $E$ , ώστε  $\widehat{ECB} = 30^\circ$ .

Να βρείτε τη γωνία  $\widehat{EDB}$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=1706#wrapheader>

**Λύση** (Σεραφείμ Τσιπέλης)



Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $BCM$ .



Τότε  $\widehat{EBM} = \widehat{EMB} = 20^\circ$ , ( $CE$  μεσοκάθετος του  $BM$ ).

Τότε το τετράπλευρο  $AEMD$  είναι εγγράψιμο ( $\hat{A} = \widehat{DMx} = 20^\circ$ ).

Τότε  $\widehat{EDB} = \widehat{EDM} = \widehat{EAM} = 10^\circ$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 30** (Σπύρος Καπελλίδης) Αν  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο συναρτήσεις, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν  $x, y \in [0, 1]$ , ώστε

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=9524#wrapheader>

**Λύση** (Χρήστος Κυριαζής) Έστω πως ισχύει:

$$|f(x) + g(y) - xy| < \frac{1}{4} \text{ για κάθε } x, y \in [0, 1]$$

Αρα:

Για  $x = y = 0$  έχουμε:

$$|f(0) + g(0)| < \frac{1}{4}$$

Για  $x = 1, y = 0$  έχουμε:

$$|f(1) + g(0)| < \frac{1}{4}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη και με χρήση τριγωνικής ανισότητας:

$$|(f(0) + g(0)) - (f(1) + g(0))| \leq$$

$$|f(0) + g(0)| + |f(1) + g(0)| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$|f(0) - f(1)| < \frac{1}{2}, (1)$$

Ακόμη για  $x = 0, y = 1$ ,  $|f(0) + g(1)| < \frac{1}{4}$  και για  $x = 1, y = 1$ ,  $|f(1) + g(1) - 1| < \frac{1}{4}$

Με πρόσθεση κατά μέλη και χρήση της τριγωνικής ανισότητας:

$$|(f(0) + g(1)) - (f(1) + g(1) - 1)| \leq$$

$$|f(0) + g(1)| + |f(1) + g(1) - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$|f(0) - f(1) + 1| < \frac{1}{2} (2)$$

Απο (1) και (2) με παρόμοιο σκεπτικό:

$$|(f(0) - f(1) + 1) - (f(0) - f(1))| \leq |f(0) - f(1) + 1| + |f(0) - f(1)| < 1 \Rightarrow 1 < 1 \text{ (Ατοπο)}$$

Αρα υπάρχουν  $x, y \in [0, 1]$  τέτοιοι ώστε

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}$$

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

**ΑΣΚΗΣΗ 31** (Χρήστος Κυριαζής) Αν  $a, b, c$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

$$a + b + c = 3$$

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

**Λύση** (Αλέξανδρος Συγγελάκης) Ισχύει

$$\frac{a}{b^2+1} \geq a - \frac{ab}{2} \quad (*)$$

και όμοια  $\frac{b}{c^2+1} \geq b - \frac{bc}{2}$  και  $\frac{c}{a^2+1} \geq c - \frac{ca}{2}$ . Με πρόσθεση κατά μέλη αυτών παίρνουμε:

$$LHS \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Αρκεί πλέον να δείξουμε ότι  $3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}$ , δηλαδή, ισοδύναμα ότι  $ab+bc+ca \leq 3$ , που ισχύει από την ανισότητα

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (*)$$

Η σχέση αυτή είναι εύκολο να αποδειχθεί (φυσικά εδώ βρίσκεται και το κλειδί της παραπάνω λύσης όσο απλή κι αν φαίνεται η απόδειξη), αφού

$$\frac{a}{b^2+1} = \frac{a(b^2+1)-ab^2}{b^2+1} = a - \frac{ab^2}{b^2+1}.$$

Όμως  $b^2+1 \geq 2b$ , άρα τελικά

$$a - \frac{ab^2}{b^2+1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 32** (Κώστας Βήτιας) Δίνεται κυρτό (ή μη κυρτό, ή και στρεβλό) τετράπλευρο  $ABCD$  και έστω  $E, F$ , σημεία επί των πλευρών του  $AB, CD$  αντιστοίχως, τέτοια ώστε

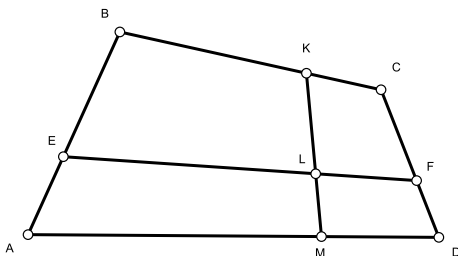
$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC} = p$$

Επί των  $BC, EF, AD$ , λαμβάνουμε αντιστοίχως τα εσωτερικά σημεία  $K, L, M$ , έτσι ώστε

$$\frac{BK}{KC} = \frac{EL}{LF} = \frac{AM}{MD} = q$$

Αποδείξτε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά και ότι

$$\frac{KL}{LM} = p$$



**ΑΣΚΗΣΗ 33** (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν τη σχέση  $f(f(x)) + f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση 1** (Ροδόλφος Μπόρης) Αν  $a, b, c, d, e, f, k, l, m$  οι αντίστοιχοι μιγαδικοί των σημείων, τότε  $e = \frac{a+pb}{1+p}$ ,  $f = \frac{d+pc}{1+p}$ ,  $k = \frac{b+qc}{1+q}$ ,  $l = \frac{e+qf}{1+q}$ ,  $m = \frac{a+qd}{1+q}$ , οπότε (εκτελώ απλά τις πράξεις)

$$\begin{aligned} k-l &= \frac{b+qc}{1+q} - \frac{e+qf}{1+q} \\ &= \frac{b+qc - (e+qf)}{1+q} \\ &= \frac{b+qc - \frac{(a+pb)+q(d+pc)}{1+p}}{1+q} \\ &= \frac{(1+p)(b+qc) - (a+pb) - q(d+pc)}{(1+p)(1+q)} \\ &= \frac{(b-a) + q(c-d)}{(1+p)(1+q)} \end{aligned}$$

Με ίδιο τρόπο βρίσκουμε  $l-m = \frac{p((b-a) + q(c-d))}{(1+p)(1+q)}$ , άρα

$l-m = p(k-l)$  και επειδή το  $p$  είναι πραγματικός και θετικός τα  $K, L, M$  είναι συνευθειακά και ο λόγος των μηκών τους ίσος με  $p$ .

**Λύση 2** (Ανδρέας Βαρβεράκης). Μία άλλη προσέγγιση του συγκεκριμένου θεωρήματος (αλλά και άλλων που έχουν να κάνουν με αναλογίες) είναι η απόδειξη με την βοήθεια αρχών της φυσικής και συγκεκριμένα του προσδιορισμού του κέντρου βάρους κατάλληλων σημειακών μαζών στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ . Τοποθετούμε στα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  μαζες  $1, p, pq, q$ , αντίστοιχα. Το κέντρο βάρους των  $A(1)$  και  $B(p)$  είναι το  $E(1+p)$ . Το κ.β. των  $\Gamma(pq)$  και  $\Delta(q)$  είναι το  $F(pq+q)$ . Οπότε το κ.β. όλων μαζί είναι σημείο  $L$  της  $EF$  με  $EL : LF = q$ . Με όμοιο τρόπο προσδιορίζουμε το κ.β. των τεσσάρων μαζών (με ζευγάρια τις  $A, \Delta$  και  $B, \Gamma$ ) πάνω στην  $MK$ . Από την μοναδικότητα του κέντρου βάρους, προκύπτει το ζητούμενο. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει και η σχέση των εμβαδών στο αντίστοιχο πλέγμα (χωρίζοντας τις απέναντι πλευρές σε ίσο αριθμό ίσων μεταξύ τους τμημάτων και φέρνοντας τα αντίστοιχα ευθ. τμήματα) καθώς τα εμβαδά σε κάθε γραμμή η στήλη, είναι σε αριθμητική πρόοδος.

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

**Λύση** (Ηλίας Ζαδίκ) Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

είναι 1-1 και επειδή είναι συνεχής είναι και μονότονη. Επίσης τα όρια στο άπειρο είναι άπειρο καθώς σε αντίθετη περίπτωση η σχέση  $f(f(x)) = x - f(x)$  θα μας έδινε άπειρο να ισούται με κάτι πεπερασμένο. Άρα η  $\varphi$  είναι 1-1 και επί. Άρα αντιστρέφεται και η αντίστροφη της  $g$  ικανοποιεί την σχέση  $x + g(x) = g(g(x))$ .

Παίρνουμε  $s \in \mathbb{R}$ , θέτουμε  $t = f(s)$  και θεωρούμε τις ακολουθίες  $(x_n), (y_n)$  που ορίζονται αναδρομικά από τους τύπους  $y_n = f(y_{n-1})$  με  $y_0 = s$  και  $x_n = g(x_{n-1})$  με  $x_0 = t$ .

Η ακολουθία  $(y_n)$  ικανοποιεί την αναδρομική σχέση  $y_n = y_{n-2} - y_{n-1}$  για  $n \geq 2$  και λύνοντας την βρίσκουμε ότι  $y_n = as_1^n + bs_2^n$  για κάποια  $a, b \in \mathbb{R}$ , όπου  $s_1, s_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + x - 1 = 0$  με  $s_1 > 0 > s_2$ . Ομοίως βρίσκουμε  $x_n = as_1^{1-n} + bs_2^{1-n}$ .

Θα δείξουμε ότι  $ab = 0$ . Έστω ότι  $ab \neq 0$ . Επειδή η  $f$  είναι μονότονη, το  $y_{n+2}y_{n+1} = (y_n - y_{n+1})(y_{n-1} - y_n) = (f(y_{n-1}) - f(f(y_{n-1}))) (y_{n-1} - f(y_{n-1}))$  διατηρεί πρόσημο που είναι το ίδιο με το πρόσημο του  $x_{n-1}x_{n-2} = (x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})$ .

Όμως αφού  $\frac{y_{n+1}}{y_n} \rightarrow s_2$  και  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow s_1^{-1}$ , θα έπρεπε  $s_1s_2 \geq 0$  ενώ  $s_1s_2 = -1$ . Συνεπώς για κάθε  $s$ , είτε  $a = 0$ , είτε  $b = 0$ . Άρα είτε  $f(s) = s_1s$ , είτε  $f(s) = s_2s$ .

Θα δείξουμε ότι είτε  $f(x) = s_1x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είτε  $f(x) = s_2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Έστω  $x > 0$ , με  $f(x) = s_2x$  και  $f$  αύξουσα. Τότε αν  $0 > y > xs_2/s_1$  θα είχαμε είτε  $f(y) = s_2y > 0 > f(x)$ , είτε  $f(y) = s_1y > xs_2 = f(x)$ . Και στις δύο περιπτώσεις αυτό είναι άτοπο. Άρα αν η  $f$  είναι αύξουσα τότε  $f(x) = s_1x$  για κάθε  $x > 0$ . Αφού για τα θετικά όμως έχουμε πάρει όλες τις θετικές τιμές μέσω της  $f$ , λόγω του 1-1 θα έχουμε  $f(x) = s_1x$  και για κάθε  $x \leq 0$ .

Ομοίως αν η  $f$  είναι φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι  $f(x) = s_2x$  για κάθε  $x$ .

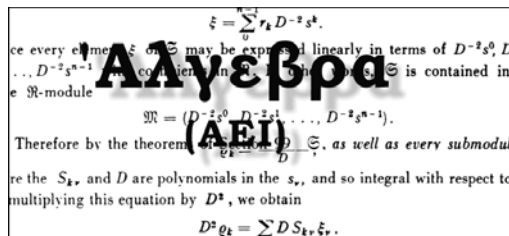
Τέλος παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις που βρήκαμε ικανοποιούν την συναρτησιακή εξίσωση.

**ΑΣΚΗΣΗ 34** (Σεραφεΐμ Τσιπέλης) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

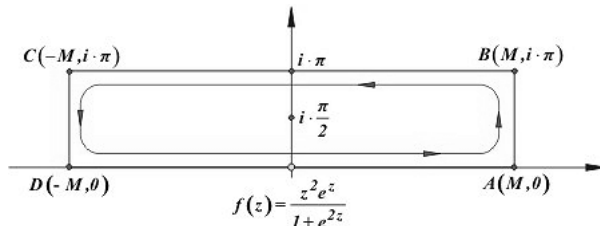
Ed'w <http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=3614>

**Λύση 1** (Ροδόλφος Μπορής) Το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $f(x) = x(\pi - x)$  στο  $[0, \pi]$  σε σειρά Fourier είναι  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ , όπου  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \right)$ . Οπότε για  $x = \pi/2$  παίρνουμε το ζητούμενο.



**ΑΣΚΗΣΗ 35** (Στέλιος Μαργαρίτης) Δίνεται ο θετικά ορισμένος πίνακας  $A$  και η τετραγωνική μορφή  $Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$ . Δείξτε ότι η μορφή  $Q$  ελαχιστοποιείται στο σημείο  $x_0$  για το οποίο ισχύει ότι  $Ax_0 = b$  και ότι το ελάχιστο ισούται με

**Λύση 2** (Σεραφεΐμ Τσιπέλης) Ο μετασχηματισμός Laplace  $\int_0^{\infty} x^a e^{-yx} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{y^{a+1}}$  (για  $a = 2$  και  $y = 2k+1$ ) μας δίνει  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} x^2 e^{-(2k+1)x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2kx} dx$  και άρα το αριστερό μέλος ισούται με  $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{x^2 e^{-x}}{1+e^{-2x}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} \right) dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} \right) dx$  Θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = \frac{z^2 e^z}{1+e^{2z}}$  και το ολοκλήρωμα αυτής επί του ορθογωνίου με κορυφές  $A(M, 0)$ ,  $B(M, \pi i)$ ,  $C(-M, \pi i)$  και  $D(-M, 0)$ .



Η  $f$  έχει εντός του ορθογωνίου απλό πόλο τον μιγαδικό αριθμό  $z_0 = \frac{\pi i}{2}$  με  $\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{z^2 e^z}{1+e^{2z}} = \frac{\pi^2 i}{8}$  και επομένως  $\int_{ABCD} f(z) dz = 2\pi i \text{Res } f(z) = -\frac{\pi^3}{4}$ .

Επίσης για  $z = M + iy$  ή  $z = -M + iy$  με  $y \in [0, \pi]$  ισχύει  $|f(z)| \leq \frac{e^z (M^2 + 1)}{e^{2M} - 1}$  το οποίο τείνει στο 0 όταν το  $M$  τείνει στο άπειρο.

Άρα όταν το  $M$  τείνει στο άπειρο τότε  $\int_{ABCD} f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{(x+\pi i)^2 e^{x+\pi i}}{1+e^{2x+2\pi i}} dx$ .

Επομένως  $2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} dx + 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^x}{1+e^{2x}} dx - \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = -\frac{\pi^3}{4}$ . Όμως η συνάρτηση  $\frac{x e^x}{1+e^{2x}}$  είναι περιττή, άρα  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^x}{1+e^{2x}} dx = 0$ . Επίσης  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2}$ . Οπότε  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} \right) dx = \frac{1}{8} \left( -\frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi^3}{2} \right) = \frac{\pi^3}{32}$ .

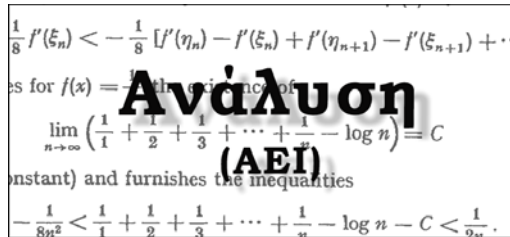
**Λύση 3** (Μιχάλης Λάμπρου) Πάλι με σειρά Fourier παίρνουμε τον γνωστό τύπο  $\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$  για  $-\pi < x < \pi$ . Ολοκληρώνοντας από 0 έως  $t$  και χρησιμοποιώντας ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2 = \pi^2/12$  παίρνουμε  $\frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2}$ . Ολοκληρώνοντας ξανά από 0 έως  $x$  παίρνουμε  $\frac{x^3 - \pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$ . Τέλος θέτοντας  $x = \pi/2$  παίρνουμε το ζητούμενο.

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

**Λύση** (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έχουμε

$$0 \leq \langle x - A^{-1}b, A(x - A^{-1}b) \rangle = \langle x, Ax \rangle - \langle x, b \rangle - \langle A^{-1}b, Ax \rangle + \langle A^{-1}b, b \rangle = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle + \langle A^{-1}b, b \rangle = 2Q(x) + \langle A^{-1}b, b \rangle \text{ με ισότητα αν και μόνο αν } x = A^{-1}b.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 36** (Αναστάσιος Κοτρώνης) Έστω πολυώνυμο  $f \in \mathbb{Z}[x]$  με ρίζες τα  $x_1, \dots, x_n$  και έστω  $M = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$ . Έστω  $m \in \mathbb{Z}$  με  $|m| > M + 1$  και  $|f(m)|$  πρώτος. Να δείχθει ότι το  $f$  είναι ανάγωγο στο  $\mathbb{Z}[x]$ .



**Λύση** (Χρήστος Κυριαζής) Έστω ότι  $f(x) = g(x)h(x)$  με  $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ . Τότε  $|f(m)| = |g(m)||h(m)|$  και αφού το  $|f(m)|$  είναι πρώτος τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $|g(m)| = 1$ . Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι  $g(x) = k(x - x_1) \cdots (x - x_r)$  για κάποιο  $k \in \mathbb{Z}$  διάφορο του μηδενός και  $1 \leq r \leq n - 1$ . Όμως  $|m - x_i| \geq |m| - |x_i| > M + 1 - |x_i| \geq 1$  για κάθε  $1 \leq i \leq r$ . Άρα  $1 = |g(m)| = |k| \prod_{i=1}^r |m - x_i| > |k| \geq 1$ , άτοπο.

**Σχόλιο** (Νίκος Μαυρογιάννης) Με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη έχουμε την πιο κάτω γενίκευση το κριτηρίου.

Έστω πολυώνυμο  $f \in \mathbb{Z}[x]$  και  $m \in \mathbb{Z}$  τέτοια ώστε ο  $|f(m)|$  είναι πρώτος και  $|m - \alpha| > 1$  για κάθε ρίζα  $\alpha$  του  $f$ . Τότε το  $f$  είναι ανάγωγο στο  $\mathbb{Z}[x]$ .

Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

**ΑΣΚΗΣΗ 37** (Αναστάσιος Κοτρώνης) Να υπολογισθεί το

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x) \ln x}{x(1-x)} dx.$$

**Λύση** (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x(1-x)} dx \stackrel{x=1-u}{dx=-du} = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(u) \ln(1-u)}{(1-u)u} du \Rightarrow$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(u) \ln(1-u)}{(1-u)u} du \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x(1-x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x(1-x)} dx.$$

$$\text{Επίσης } \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x} dx \stackrel{u=1-x}{du=-dx} = \int_0^1 \frac{\ln(1-u) \ln(u)}{1-u} du = \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{1-x} dx.$$

Τότε

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x(1-x)} dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \ln(1-x) \ln(x) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x} dx + \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{1-x} dx \right) =$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x} dx$$

και

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x) \ln(x)}{x} dx = - \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right) dx =$$

$$- \int_0^1 \ln(x) \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \right) dx =$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} \cdot \int_0^1 \ln(x) \cdot x^k dx \right) =$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} \cdot \left( -\frac{1}{(k+1)^2} \right) \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = \zeta(3)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 38** (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n} dx - 1 \right) = \frac{\pi^2}{12}$$

**Λύση** (Αναστάσιος Κοτρώνης)

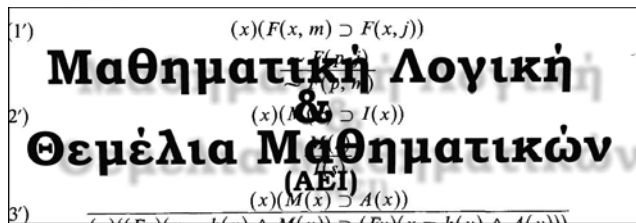
$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 (1+x^n)^{1/n} - 1 dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/n}{k} x^{nk} dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/n}{k} \int_0^1 x^{nk} dx =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/n}{k} \frac{1}{nk+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2}{nk+1} \frac{\frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{n} - 2 \right) \cdots \left( \frac{1}{n} - (k-1) \right)}{k!} =$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \frac{(n-1)(2n-1) \cdots ((k-1)n-1)}{n^{k-2} k! (nk+1)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}}{(k-1)! k^2 n^{k-1} + k! n^{k-2}} \right) =$$

(η εναλλαγή ορίων δικαιολογείται λόγω απόλυτης σύγκλισης)

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}}{(k-1)! k^2 n^{k-1} + k! n^{k-2}} \right) =$$

(για σταθερό  $k$  έχουμε πηλίκο πολυωνύμων του  $n$  ίδιου βαθμού  $k-1$ )

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Επιμελητής: Δημήτρης Σκουτέρης

**ΑΣΚΗΣΗ 39** (Σπύρος Καπελλίδης) Να αποδειχθεί ότι κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών δεν είναι καλώς διατεταγμένο ως προς τη φυσική διάταξη.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=64&t=8313>

**Λύση 1** (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω  $A$  ένα καλώς διατεταγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  (ως προς τη φυσική διάταξη).

Για κάθε  $x \in A$  έστω  $x'$  το μικρότερο στοιχείο του συνόλου  $\{y \in A : y > x\}$ . Τότε τα διαστήματα  $(x, x')$  είναι ξένα μεταξύ τους.

Έστω  $A_n$  το σύνολο όλων των  $x$  ώστε το διάστημα  $(x, x')$  να έχει μήκος τουλάχιστον  $1/n$ . Τότε  $A = \cup_n A_n$ . Όμως κάθε  $A_n$  είναι αριθμήσιμο (κάθε  $A_n$  περιέχει το πολύ  $n$  στοιχεία που έχουν το ίδιο ακέραιο μέρος) άρα και το  $A$  είναι αριθμήσιμο.

**Λύση 2** (Σπύρος Καπελλίδης) Ισχυρισμός 1 Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$  και για κάθε  $a \in A$  υπάρχει  $\varepsilon_a$  ώστε  $A \cap (a, a + \varepsilon_a) = \emptyset$ , τότε  $|A| \leq \aleph_0$ . Απόδειξη Θεωρούμε το σύνολο  $U = \{(a, a + \varepsilon_a) / \varepsilon_a > 0, (a, a + \varepsilon_a) \cap A = \emptyset\}$ . Τα στοιχεία του  $U$  είναι ξένα μεταξύ τους διαστήματα, άρα  $|U| \leq \aleph_0$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $f : U \rightarrow A$  με  $f((a, a + \varepsilon_a)) = a$ . Η απεικόνιση είναι προφανώς επί, άρα  $|A| = |f(U)| \leq |U| \leq \aleph_0$ . Ισχυρισμός 2 Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$  με  $|A| > \aleph_0$ , τότε υπάρχει  $a \in A$  και γνησίως φθίνουσα ακολουθία  $a_n$  στοιχείων του ώστε  $a_n \rightarrow a$ . Απόδειξη Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι υπάρχει  $a \in A$  ώστε για κάθε  $b > a$ , το διάστημα  $(a, b)$  να περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του  $A$ . Έστω  $a_1 \in A$  με  $a < a_1 < a + 1$ ,  $a_2 \in A$  με  $a < a_2 < \varepsilon_1 = \min\{a_1, a + \frac{1}{2}\}$ . Υποθέτουμε πως έχουμε ορίσει  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  με  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$  και  $a < a_k < a + \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  και ορίζουμε  $a_{n+1} \in A$  με

$a < a_{n+1} < \varepsilon_n = \min\{a_n, a + \frac{1}{n+1}\}$ . Τότε η ακολουθία  $a_n$  που ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο είναι γνησίως φθίνουσα και  $a_n \rightarrow a$ . Το ότι το  $A$  δεν είναι καλώς διατεταγμένο είναι συνέπεια του ότι το σύνολο  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

**ΑΣΚΗΣΗ 40** (Δημήτρης Χριστοφίδης)

Δίνονται ακολουθίες συνόλων

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Να βρεθούν όλα τα σύνολα  $X$  που ικανοποιούν την

$$A_n \cup X = B_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

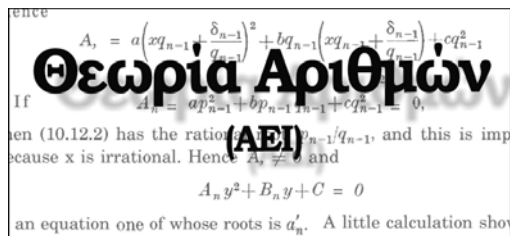
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=64&t=10554>

**Λύση** (Δημήτρης Σκουτέρης) Προφανώς για να υπάρχει λύση πρέπει να ισχύει  $A_n \subseteq B_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επίσης πρέπει να ισχύει  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n - A_n) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Αλλιώς, αν το  $B_k \not\supseteq A_k$  περιέχει στοιχείο που δεν περιέχεται στο  $B_m$ , τότε το  $X$  που χρειάζεται για την  $k$ -οστή εξίσωση δε θα επαληθεύει την  $m$ -οστή.

Με δεδομένες αυτές τις συνθήκες, είναι λύση οποιοδήποτε  $X$  για το οποίο ισχύει

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n - A_n) \subseteq X \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Επιμελητής: Νίκος Κατσιόπης



**ΑΣΚΗΣΗ 41** (Κώστας Ζυγούρης) Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$\underbrace{111\dots111}_{91 \text{ μονάδες}}$$

είναι σύνθετος.

Πηγή: Τάσος Αγάπης, Αριθμοί και άλλα, Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, 1998.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=11074>

**Λύση 1** (Νίκος Κατσιπής) Έχουμε ότι

$$\underbrace{111\dots111}_{91} = 10^{90} + 10^{89} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{91} - 1}{9}.$$

Επειδή,  $91 = 13 \cdot 7$  συμπεραίνουμε ότι  $10^{13} - 1 \mid 10^{91} - 1$ . Άρα,  $10^{91} - 1 = (10^{13} - 1) \cdot \alpha$ , όπου  $\alpha$  κάποιος φυσικός  $\neq 1$ . Οπότε,

$$\underbrace{111\dots111}_{91} = \frac{10^{91} - 1}{9} = \frac{(10^{13} - 1) \cdot \alpha}{9}.$$

Και από εδώ εύκολα έπεται το συμπέρασμα.

**Λύση 2** (Μιχάλης Λάμπρου) Επειδή  $91 = 7 \cdot 13$ , παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \underbrace{111\dots111}_{91} &= \underbrace{1111111}_{7} \underbrace{1111111}_{7} \dots \underbrace{1111111}_{7} = \\ &= \left( \underbrace{100000010000001\dots0000001}_{13} \right) \times \underbrace{1111111}_{7}. \end{aligned}$$



Άρα, ο  $\underbrace{111\dots111}_{91}$  είναι σύνθετος.

**ΑΣΚΗΣΗ 42** (Νίκος Κατσιπής) Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathbb{A} = \{2^n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

περιέχει ένα τουλάχιστον υποσύνολο με άπειρα στοιχεία τέτοια ώστε οποιαδήποτε δύο να είναι πρώτα μεταξύ τους.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=10742>

**Λύση** (Δημήτρης Σκουτέρης) Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω,  $\mathbb{S}$  ένα πεπερασμένο υποσύνολο μεγίστου πληθαισμού του  $\mathbb{A}$  του οποίου τα στοιχεία είναι ανα δυο πρώτα μεταξύ τους (υπάρχει τέτοιο σύνολο, για παράδειγμα το  $\mathbb{S} = \{2^2 - 3, 2^3 - 3\}$ ). Επίσης, έστω  $p_1, p_2, \dots, p_n$  όλοι οι πρώτοι διαιρέτες των στοιχείων του συνόλου  $\mathbb{S}$  (επειδή τα στοιχεία του συνόλου είναι περιττοί αριθμοί, έχουμε ότι  $p_i \neq 2$ ). Τότε, από το μικρό Θεώρημα του Fermat, ο  $2^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_n-1)} - 1$  διαιρείται από όλους τους  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Οπότε, ο  $2^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_n-1)} - 3$  δεν διαιρείται με κανένα από τους  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Άρα, ο  $2^{(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_n-1)} - 3$  είναι πρώτος με όλα τα στοιχεία του  $\mathbb{S}$ , άτοπο.

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

**ΑΣΚΗΣΗ 43** (Θάνος Μάγκος) Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2x} = \sqrt{1-x^2} + x$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=12132>

**Λύση** (Κωνσταντίνος Τσουβαλάς)

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1-\cos a}}{2 \cos a} &= \sin a + \cos a \Leftrightarrow \\ 2 \cos^2 a - 1 + \sin 2a &= \sqrt{1-\cos a} \Leftrightarrow \\ \sin 2a + \cos 2a &= \sqrt{1-\cos a} \end{aligned}$$

Όμως:

$$\sin 2a + \cos 2a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) + \cos 2a =$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(2a - \frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα

$$\sqrt{2} \cos\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1-\cos a}$$

εδώ πρέπει

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right) > 0$$

(Υψώνουμε στο τετράγωνο)

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos a \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(4a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos a \Leftrightarrow$$

$$4a - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + (\pi - a), k \in \mathbb{Z} \text{ ή } 4a - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - (\pi - a), k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \text{ ή } a = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Επειδή όμως το  $a$  είναι τόξο του πρώτου και δεύτερου τεταρτημορίου η μόνη δεκτή λύση που προκύπτει είναι η  $a = \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \cos \frac{3\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{5}$

**ΑΣΚΗΣΗ 44** (Θάνος Μάγκος) Για τις γωνίες τριγώνου  $ABC$  ισχύει

$$a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B = c^2 \cos^2 C.$$

Ποιο συμπέρασμα εξάγεται για τις γωνίες του;

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=11927>

**Λύση** (Φωτεινή Καλδή)

$$a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B = c^2 \cos^2 C \Rightarrow \sin^2(2A) + \sin^2(2B) = \sin^2(2C) \Rightarrow$$



**ΑΣΚΗΣΗ 45** (Μπάμπης Στεργίου) Αν για μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$  οι συναρτήσεις  $f(x)\sin^3 x$ ,  $f(x)\cos^3 x$  έχουν αρχική, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση  $f$  έχει αρχική.

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=65401#p65401>

**Λύση** (Μιχάλης Λάμπρου) Υποθέτω ότι υπάρχει ευκολότερος τρόπος, αλλά ας δούμε μία μέθοδο. Εξ υποθέσεως υπάρχουν παραγωγίσιμες  $P$ ,  $Q$  με

$$P'(x) = f(x)\sin^3 x, Q'(x) = f(x)\cos^3 x \quad (*)$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$((2P(x)\cos x + 2Q(x)\sin x)\sin 2x - (P(x)\sin x - Q(x)\cos x)\cos 2x)' = f(x) + H(x) \quad (**)$$

όπου  $H$  συνεχής. Πράγματι, το αριστερό μέλος με χρήση της  $(*)$  ισούται

$$(2f(x)\sin^3 x \cos x + 2f(x)\cos^3 x \sin x)\sin 2x - (f(x)\sin^3 x \sin x - f(x)\cos^3 x \cos x)\cos 2x + H(x) =$$

$$\begin{aligned} & 2f(x)(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin x \cos x \sin 2x - \\ & f(x)(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)\cos 2x + H(x) = \\ & = f(x)\sin 2x \cdot \sin 2x + f(x)(\cos 2x) \cdot \cos 2x + H(x) = \\ & = f(x) + H(x). \end{aligned}$$

Από εδώ εύκολα τελειώνει η άσκηση: Αφού  $H$  συνεχής, υπάρχει  $G$  με  $G' = H$ . Άρα η  $(**)$  μας δίνει

$$\begin{aligned} & ((2P(x)\cos x + 2Q(x)\sin x)\sin 2x - (P(x)\sin x - Q(x)\cos x)\cos 2x - G(x))' = \\ & = f(x) + H(x) - H(x) = f(x) \end{aligned}$$

δηλαδή βρήκαμε αντιπαράγωγο της  $f$ . ό.έ.δ.

**Σχόλιο** (Μπάμπης Στεργίου) Η ιδέα είναι αυτή που περιέγραψες πολύ καλά στη λύση σου. Αλλά επειδή η μαθηματική σου διαίσθηση σε κάνει να πιστεύεις ότι μπορεί να υπάρχει και πιο απλή λύση, νομίζω ότι μια υπόδειξη (δεν νομίζω ότι όμως ότι κερδίζουμε και πολλά) που είχα δει είναι η εξής:

$$\sin^2(2A) = (\sin(2C - \sin(2B)))(\sin(2C) + \sin(2B)) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin^2(2A) &= \sin(2A) \cdot \sin(2B - 2C), (\sin(2A) \neq 0) \Rightarrow \\ \sin(2A) &= \sin(2B - 2C) \Rightarrow \\ 2A &= 2B - 2C \Rightarrow B = 90^\circ \quad \text{ή} \quad 2A = \\ 180^\circ - 2B + 2C &\Rightarrow C = 45^\circ \end{aligned}$$

... μπορεί να είναι και  $A = 90^\circ$  και τότε  $\sin^2(2B) = \sin^2(2C)$ , ορθογώνιο-ισοσκελές τρίγωνο

Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

Αναπτύσσουμε την ταυτότητα  $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$  και με οδηγό τους όρους που σχηματίζουμε, πολλαπλασιάζουμε τις δοσμένες συναρτήσεις με κατάλληλους τριγωνομετρικούς συντελεστές (που είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις), προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε αυτό που θέλουμε. Το άθροισμα συναρτήσεων που έχουν αρχική έχει προφανώς αρχική. Έμμεσα όμως πρέπει να χρησιμοποιείται η πρόταση σύμφωνα με την οποία το γινόμενο μιας συνεχώς παραγωγίσιμης συνάρτησης και μιας που έχει αρχική, είναι συνάρτηση που έχει αρχική. Μπορεί η παραπάνω ιδέα να φαίνεται ότι συντομεύει ίσως τη λύση, αλλά αυτή που έκανες είναι κατά τη γνώμη μου πιο φυσική.

**ΑΣΚΗΣΗ 46** (Σπύρος Καπελλίδης) Έστω  $P(x)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $n$  και  $n$  απλές ρίζες  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Αν  $Q(x)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές βαθμού  $\leq n - 1$ , να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xQ(x)}{P(x)}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=64368#p64368>

**Λύση 1** (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω  $C$  ένας κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το  $(0,0)$  και ακτίνα  $R > \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ . Η ιδέα είναι να υπολογίσουμε το  $\int_C \frac{Q(z)}{P(z)} dz$  με δυο διαφορετικούς τρόπους.

1ος τρόπος: Η συνάρτηση έχει (απλούς) πόλους στα  $x_1, \dots, x_n$  και άρα το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned} & 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(z = x_k; Q(z)/P(z)) = \\ & 2\pi i \sum_{k=1}^n Q(x_k) \lim_{z \rightarrow x_k} \frac{z - x_k}{P(x_k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} \end{aligned}$$

2ος τρόπος: Μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(z - x_k)}$$

Πάλι με μιγαδική ανάλυση βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με  $2\pi i \sum_{k=1}^n A_k$ . Τέλος δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n A_k.$$

**Λύση 2** (Δημήτρης Σκουτέρης) Υπόδειξη για στοιχειώδη λύση: Αναλύστε τη ρητή συνάρτηση

$$\frac{x^k}{(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_{n-1})} \quad k < n-1$$

σε άθροισμα μερικών λόγων. Θεωρήστε  $x, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$  τις ρίζες του  $P$ .

**Λύση 3** (Ηλίας Ζαδίκ) Με γραμμική άλγεβρα: Το παραπάνω αρκεί να αποδειχτεί για  $q(x) = x^r$  και  $p$  μονικό. Μπορούμε να πάρουμε την ανδερμονδε ορίζουσα των  $(x_1, \dots, x_n)$  με εκθέτες έως  $n-2$  και να προσθέσουμε μια γραμμή ακόμα με τα  $x_1^r, \dots, x_n^r$  πάνω από τις αντίστοιχες στήλες των  $x_i$ . Αν  $r < n-1$  η μηδενική ορίζουσα που έχει ο πίνακας (έχει δύο ίδιες γραμμές) αναπτυσσόμενη ως προς την γραμμή που προσθέσαμε, σε συνδυασμό με τις υπο-ορίζουσες ανδερμονδε που σχηματίζονται, μας δίνει το ζητούμενο. Αν  $r = n-1$  τότε ο πίνακας μας έχει

ορίζουσα την ανδερμονδε των  $(x_1, \dots, x_n)$  ως τον εκθέτη  $n-1$ . Αυτήν την φορά και αναπτύσσοντας πάλι ως προς την γραμμή με τα  $x_i^{n-1}$  παίρνουμε εκ νέου το ζητούμενο.

**Λύση 4** (Σπύρος Καπελλίδης) Και στοιχειωδώς: Γράφουμε το πηλίκο  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  ως άθροισμα απλών κλασμάτων, δηλαδή  $\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-x_k}$ , άρα  $\frac{xQ(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{x A_k}{x-x_k}$ , άρα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n A_k \quad (1)$$

Αφ' ετέρου

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x-x_k)Q(x)}{P(x)} = \\ \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{(x-x_k)Q'(x) + Q(x)}{P'(x)} &= \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^n A_k &= \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο



Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

**ΑΣΚΗΣΗ 47** (irakleios) Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  ώστε να ισχύει:

$$(x-1)^{143} + (x+1)^{2002} = [P(x)]^{13}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=65628#p65628>

**Λύση** (Μιχάλης Λάμπρου) Αν υπήρχε τέτοιο πολυώνυμο θα ήταν  $[P(0)]^{13} = (0-1)^{143} + (0+1)^{2002} = 0$ , δηλαδή ο σταθερός όρος του  $P$  θα ήταν 0. Άρα ο πιο χαμηλόβαθμιος όρος του  $[P(x)]^{13}$  είναι  $\geq 13$ . Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με το ίσο του  $(x-1)^{143} + (x+1)^{2002}$  που έχει μη μηδενικό πρωτοβάθμιο όρο (τον  $-143x + 2002x = 1859x$ ). Άτοπο.

**ΑΣΚΗΣΗ 48** (Σπύρος Καπελλίδης) Αν  $p(x)$  είναι ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$ , με ακέραιους συντελεστές και  $n$  πραγματικές μη ακέραιες ρίζες, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες του  $x_i, x_j$  ώστε  $x_i - x_j > 1$ .

(Προσθήκη: Δημήτρης Χριστοφίδης) Πιο ισχυρό: Αν  $p(x)$  ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού  $n$  με ακέραιους συντελεστές και  $n$  πραγματικές ρίζες εκ των οποίων τουλάχιστον 1 δεν είναι ακέραια, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο ρίζες  $x_i, x_j$  του  $p$  με

$$x_i - x_j > 1$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=66536#p66536>

**Λύση 1** (Σπύρος Καπελλίδης) Με απαγωγή σε άτοπο:

Ας πούμε ότι οι ρίζες είναι  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_1 + 1$ .

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα

- 1) Στο διάστημα  $[x_1, x_1 + 1]$  υπάρχει μοναδικός ακέραιος  $m$  ή
  - 2) Για κάποιον ακέραιο  $m$  ισχύει  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (m, m + 1)$
- Σε κάθε περίπτωση  $|n - x_i| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , άρα  $p(m) \in \mathbb{Z}$  και  $|p(m)| = |m - x_1||m - x_2|\dots|m - x_n| < 1 \Rightarrow p(m) = 0$ , άτοπο.

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα με τις ασθενέστερες υποθέσεις. Αν το πολυώνυμο έχει μη άκεραία λύση, αυτή θα πρέπει να είναι άρρητος αριθμός, συνεπώς θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο

άρρητες ρίζες.

Έστω πως για δύο οποιεσδήποτε ρίζες του πολυωνύμου  $x_i, x_j$  ισχύει  $|x_i - x_j| \leq 1$ , τότε υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα:

- 1) Για κάποιον ακέραιο  $m$  ισχύει  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (m, m + 1)$ , τότε εργαζόμενοι όπως πιο πάνω καταλήγουμε σε άτοπο.
- 2) Για κάποιον ακέραιο  $m$  ισχύει  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i = m \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_n \leq x_1 + 1$  Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως πιο πάνω για το πολυώνυμο  $q(x) = \frac{p(x)}{x-m}$  και καταλήγουμε σε άτοπο.
- 3) Για κάποιον ακέραιο  $m$  ισχύει  $x_1 = m \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = m + 1$ .

Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως πιο πάνω για το πολυώνυμο  $q(x) = \frac{p(x)}{(x-m)(x-m-1)}$  και καταλήγουμε σε άτοπο.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη

**Λύση 2, 2ο Ερώτημα** (Δημήτρης Χριστοφίδης) Μπορούμε

επίσης να αποδείξουμε το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιώντας το πρώτο. Έστω  $x_1, \dots, x_k$  οι ακέραιες ρίζες του  $p$ . Τότε το πολυώνυμο  $q(x) = \frac{p(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_k)}$  είναι μονικό, βαθμού  $n - k$

με  $n - k$  πραγματικές μη ακέραιες ρίζες. Άρα έχει τουλάχιστον δυο ρίζες  $y, z$  με  $y - z > 1$ . Αλλά τα  $y, z$  είναι και ρίζες του  $p$  άρα τελειώσαμε.