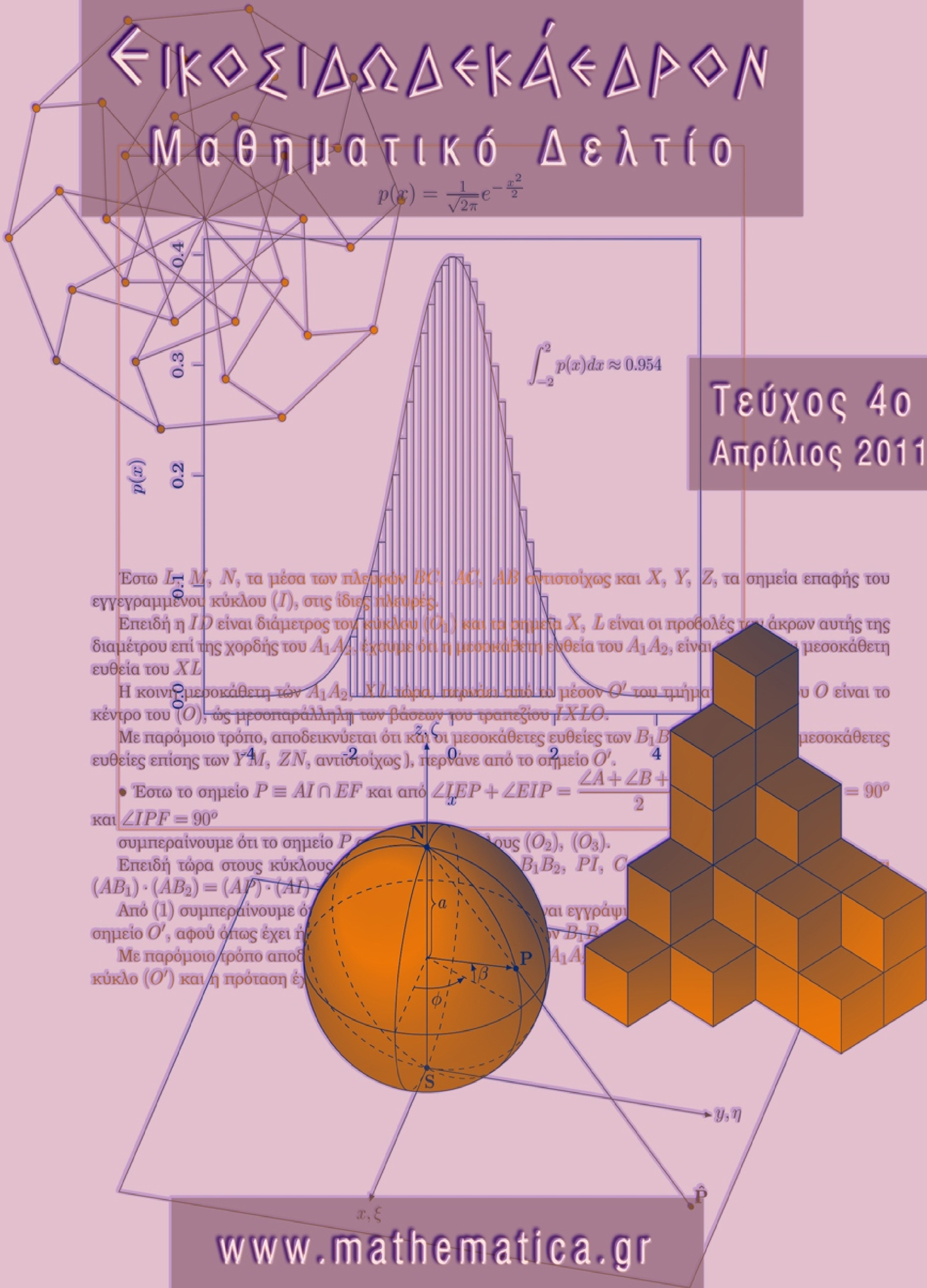
Εικοσιδωδεκάεδρον

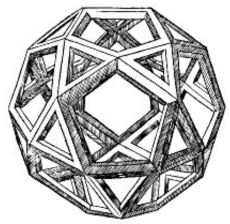
Μαθηματικό Δελτίο



Τεύχος 4ο

Απρίλιος 2011

www.mathematica.gr



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή :http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση : Πάνος Γιαννόπουλος

Διευθύνοντα Μέλη του mathematica.gr

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτάθηκε από την Φωτεινή Καλδή) Έχετε στη διάθεση σας δύο μπουκάλια. Το πρώτο χωράει 5 λίτρα και το δεύτερο 3. Μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτά τα 2 μπουκάλια και απεριόριστη ποσότητα νερού να μετρήσετε ακριβώς 4 λίτρα·*

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτάθηκε από τον Σωτήρη Χασάπη) Ένα κουτί περιέχει αριθμημένες σφαίρες από 1 έως $6k+2$, k φυσικός αριθμός. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί και η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται πάνω σε αυτή να διαιρείται με το 6 είναι $\frac{5}{31}$. Πόσες σφαίρες έχει το κουτί·*

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Να υπολογιστεί η παράσταση:*
$A=2^{2011}-(2^{100}+2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}+...+2^{2010})$

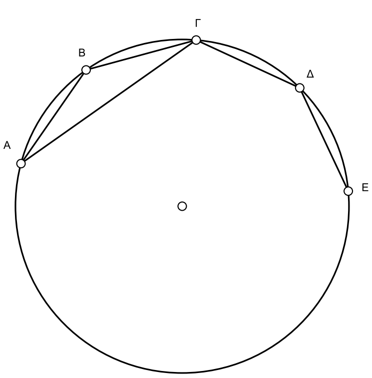
ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτάθηκε από το Βασίλη Μαυροφρύδη) Να γραφεί η παράσταση*

$$A=\left(3^4\right)^2+3^{10}:9+3^5\cdot 3^3-2\cdot 3^9$$

ως δύναμη του -3, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Αν η γωνία ΑΓΔ του κανονικού πολυγώνου του σχήματος είναι ίση με 120 μοίρες, πόσες πλευρές έχει το πολύγωνο αυτό;*



ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) «Ευτυχισμένε Πυθαγόρα, Ελικώνιε απόγονε των Μουσών, πες μου σε παρακαλώ πόσοι φοιτούν στην σχολή σου;»*

«Βεβαίως θα σου πω Πολυκράτη. Οι μισοί ασχολούνται με τα ωραία μαθηματικά, το ένα τέταρτο εξάλλου καταπιάνεται με την έρευνα της αθάνατης φύσης, ενώ το ένα έβδομο παραμένει τελείως αμίλητο και σκέφτεται παραμύθια. Υπάρχουν ακόμα και τρεις γυναίκες από τις οποίες ξεχωρίζει η Θεανώ.»

Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών του Πυθαγόρα.

Σύμφωνα με τον Μιχάλη Λάμπρου το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στη συλλογή Παλατινή Ανθολογία, η οποία είναι μία συλλογή αρχαίων ποιημάτων από 300 περίπου συγγραφείς. Ένα από τα βιβλία, το 14 από τα συνολικά 15, περιέχει αινίγματα, γρίφους και προβλήματα αριθμητικής.

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) Για να μην ξεχνάμε τους μικρούς μας φίλους, ας παραγοντοποιηθεί η παράσταση*

$$(x^2+4x+1)(x^2+4x+7)+9$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτάθηκε από τον Κώστα Καπένη) Αν a,b,c πλευρές του τριγώνου $\triangle ABC$ και επιπλέον ισχύει*

$$2(ab-c^2)=(a+b)(a+b-2c)$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτάθηκε από τον KARKAR) Να βρεθούν όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών για τους οποίους ισχύουν:*

$$\begin{cases} x^2=1-y \\ y^2=1-x \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη) Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών το σύστημα:* $x(x+y)+z=y(y+1)-3z+1=0$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ και σημείο Μ στην ΑΓ έτσι, ώστε ΜΝ=ΜΒ. Να αποδειχθεί ότι η ΜΔ είναι κάθετη στην ΜΝ.*

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι ίση με 120 μοίρες. Στην ημιευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ και στη διχοτόμο της γωνίας Α παίρνουμε σημείο Ε έτσι, ώστε ΑΔ=2ΑΕ = 4ΑΒ. Να αποδειχθεί ότι:*
α) η γωνία ΒΕΔ είναι ίση με 120 μοίρες.
β) ΒΓ // ΕΔ και ΒΖ = 3ΑΒ ,όπου Ζ είναι το μέσο του ΕΔ.
γ) η ευθεία ΒΔ περνάει από το μέσο του ΓΖ.

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Αντώνης Κυριακόπουλος) Να λυθεί η εξίσωση:*

$$\sigma\upsilon\nu^{2\mu+1}x+\eta\mu^{2\nu}x=1\ (1),$$

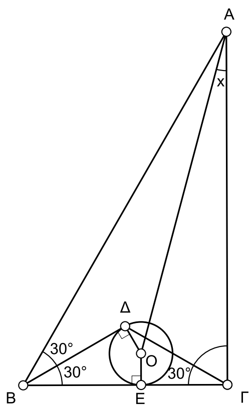
όπου μ και ν είναι δύο δοσμένοι φυσικοί θετικοί αριθμοί με $\nu\geq 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Χρήστος Κανάβης) Να λυθεί το σύστημα:*

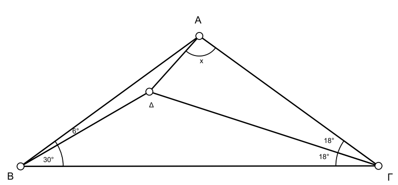
$$\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{25}{4}+9\left(\frac{25}{36}\right)^z \\ 6\left(\frac{3}{4}\right)^y=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^x \\ 15\left(\frac{5}{6}\right)^z=\frac{9}{4}+4\left(\frac{9}{16}\right)^y \end{array}\right\}$$

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτάθηκε από τον Μιχάλη Νάννο) Δίνεται τρίγωνο* $\mathrm{AB\Gamma}$ $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$ *αντίστοιχα, εσωτερικό σημείο Δ τέτοιο ώστε* $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 30^\circ$ *και σημείο* E *στη* $\mathrm{B}\Gamma$ *τέτοιο ώστε στον κύκλο* $(\mathrm{O}, \mathrm{O}\Delta = \mathrm{OE})$ *τα* Δ, E *να είναι εφαπτόμενα σημεία. Βρείτε τη γωνία* $x = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$.



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτάθηκε από τον Μιχάλη Νάννο) Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου* $\mathrm{AB\Gamma}(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$ *παίρνουμε σημείο* Δ *τέτοιο ώστε:* $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 6^\circ, \Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^\circ, \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 18^\circ$. *Βρείτε τη γωνία* $x = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) Αν για τα διανύσματα* $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ *ισχύει:*

$$\left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| + \left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = 6$$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq 9$.
β) Αν επιπλέον $\overrightarrow{\alpha}^2 + \overrightarrow{\beta}^2 = 9$, *να δείξετε ότι τα διανύσματα* $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ *είναι κάθετα.*

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Καρδάση) Δίνεται το διάνυσμα* $\overrightarrow{\alpha} \neq 0$ *Να λύσετε την εξίσωση*

$$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}| \cdot \overrightarrow{x} = |\overrightarrow{x} + 8\overrightarrow{\alpha}| \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτάθηκε από την Φωτεινή Καλδή) Αν* A, B *ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου* Ω *με*

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, *όπου* X *ένα ενδεχόμενο του* Ω, *τέτοιο ώστε* $X - A = B$

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη) Έστω δείγμα θετικών παρατηρήσεων*

$$x_1, x_2, ..., x_{2009}$$

και η συνάρτηση f *με παράγωγο*

$$f'(x) = (x - s)(x - CV)$$

όπου s, CV *η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής αντίστοιχα του παραπάνω δείγματος* $(s \neq 5)$. *Η μικρότερη παρατήρηση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του 1 και η θέση τοπικού μεγίστου είναι ίση με το μισό της θέσης τοπικού ελαχίστου.*
Α. να δείξετε ότι $\bar{x} = 2$
Β. εάν η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = -x + 1$$

είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f *στο σημείο με τετμημένη 3*
i. Να δείξετε ότι $s = 4$
ii. Να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{2009}, y_{2009})$$

της εφαπτομένης (ε).
iii. Να βρείτε τη μέση τιμή των τετραγώνων των τετμημένων των παραπάνω σημείων

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτάθηκε από τον Χάρη Γ. Λάλα) Έστω οι μιγαδικοί* z, w *τέτοιοι ώστε*

$$|z - 2| = |z + 4i|$$

και

$$|w + 2| = |w - 4i|$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w *κινούνται σε ευθείες παράλληλες .*
β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$.
γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z + w|$.
δ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w - 2i|$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτάθηκε από τον Χάρη Γ. Λάλα) Έστω οι μιγαδικοί* z_1, z_2, z_3 *οι οποίοι είναι διαφορετικοί ανά δύο και οι εικόνες τους είναι τα σημεία Α , Β , Γ . Αν ισχύει ότι*

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

και

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

να δείξετε ότι
α) $z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = 0$
β) $z_3^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
γ) $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$ *και* $|z_1| = |z_2| = |z_3|$
δ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο .

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτάθηκε από τον Θωμά Ραϊκόφτσαλη) Έστω η γνήσια φθίνουσα συνάρτηση* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *η οποία ικανοποιει για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *τη σχέση*

$$f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

Να βρεθεί το $f(1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτάθηκε από τον Φώτη Κουτσουμπίδη) Να βρεθεί η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *αν ισχύει:*

$$f(f(x) + f(y)) = x + f(y) + 2010$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη) Να αποδείξετε ότι για κάθε* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *ισχύει*

$$\frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x} - 1 \geq x$$

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτάθηκε από τον Κώστα Τηλέγραφο) Έστω μια συνάρτηση* f *συνεχής στο διάστημα* $[0, 3]$ *που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο* $(0, 3)$. *Αν ισχύει* $f(0) = f(3) = 0$ *και* $f(1)f(2) < 0$, *να αποδείξετε ότι υπάρχει* $k \in [0, 3)$ *τέτοιο ώστε*

$$f(k)f'(k) + \left[f'(k)\right]^2 - 2k = 0$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτάθηκε απο τον Βασίλη Μαυροφρύδη)* *Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[a,b]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε x του $[a,b]$. Ορίζουμε $F(x) = \int_a^b |f(t) - f(x)|\ dt$. Να βρείτε την θέση ακροτάτου της F και το είδος του.*

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτάθηκε απο τον Βασίλη Μαυροφρύδη)* *Έστω η συνάρτηση*

$$f : [0, +\infty) \to R$$

με συνεχή παράγωγο. Να δείξετε ότι

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f(t) + f'(t)|\, dt$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Juniors

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου)* *Ένας τετραψήφιος αριθμός $\overline{ABAB}$ πολλαπλασιάζεται με τον τριψήφιο αριθμό $\overline{CCC}$ και δίνει γινόμενο τον αριθμό 639027.*

Πόσο είναι το άθροισμα $A + B + C$ των ψηφίων A, B, C;

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτάθηκε από τον Γιάννη Τσόπελα)* *Να λυθεί στους πραγματικούς το σύστημα :*

$$x + y \geq 1$$
$$x^2 + xy + y^2 \leq \frac{2}{3}$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Seniors

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη)* *Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in \mathbb{Q} \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

(α) *η f είναι 1-1*

(β) *η f είναι επί*

(γ) $a_1 = a_2 = 0, b_1b_2 \neq 0, \frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}$ *και* $\frac{c_1 - c_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτάθηκε από τον Δημήτρη Χριστοφίδη)* *Δίνονται n σημεία πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Ενώνουμε όλα τα σημεία μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα. Να βρεθεί σε πόσα χωρία χωρίζεται το εσωτερικό του κύκλου αν γνωρίζουμε πως δεν υπάρχουν τρία από τα ευθύγραμμα τμήματα που να έχουν κοινό σημείο τομής.*

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη-ΕΜΕ 1985)* *Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $L(k)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $[x] = kx - 1985$. Να αποδειχθεί ότι:*

(i) *Αν $k > 2$ τότε $1 \leq L(k) \leq 2$.*

(ii) *Αν $0 < k < \dfrac{1}{1986}$, τότε $L(k) = 0$.*

(iii) *Υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε $L(k) = 1985$.*

([...]=ακέραιο μέρος)

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη-ΕΜΕ 1984)* *Να εξετάσετε αν υπάρχει ένα πεντάγωνο (όχι κατανάγκη επίπεδο) που οι πλευρές του να είναι ίσες και οι γωνίες του ορθές.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτάθηκε από τον Λεωνίδα Λαμπρόπουλο-Από φυλλάδιο ασκήσεων του Χρήστου Αθανασιάδη.)* *Έστω γραμμικός μετασχηματισμός T που δρα πάνω σε ένα n-διάστατο διανυσματικό χώρο. Αν έχει $n + 1$ ιδιοδιανύσματα με την ιδιότητα οποιαδήποτε n από αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι $T = \lambda I$ για κάποια σταθερά λ.*

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη)* *Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ και a ένας θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε $f(f(x)) = x^a$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι*

$$\int_0^1 f^2(x)\ dx \geq \frac{2a - 1}{a^2 + 6a - 3}.$$

Η άσκηση είναι από τον Mihai Piticari.

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτάθηκε από τον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο)* *Έστω p πρώτος και έστω A ένας $(p-1) \times (p-1)$ πίνακας επί του σώματος των ρητών τέτοιος ώστε $A^p = I \neq A$. Να δειχθεί ότι αν $f(x)$ είναι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο του $p - 1$, τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι αντιστρέψιμος.*
(Είναι το πρόβλημα 1425 του Mathematics Magazine.)

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτάθηκε από τον Ηράκλειο)* *Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο*

$$x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x], \text{ όπου } p \text{ πρώτος},$$

είναι ανάγωγο αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ακέραιοι a, b με $a + b = p$ και $ab \equiv 1 \bmod p$.

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτάθηκε από τον Στάθη Καραδήμα)* *Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x)}{3 + 2\cos(nx)} dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτάθηκε από τον Αναστάσιο Κοτρώνη)* *Έστω $a > 0$. Ας βρεθεί, αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{1\leq k\leq n^a} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

Γεωμετρία ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτάθηκε από τον Stuart Clark)* *Τα διανύσματα θέσεως των σημείων A,B, C είναι αντίστοιχα $< 1, 1, 1 >$, $< 1, -1, 2 >$, $< 0, 2, -1 >$. Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο που ορίζεται από το ABC και κάθετο στο διάνυσμα $< 1, 0, 1 >$.*

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτάθηκε από τον Νίκο Μαυρογιάννη)* *Να αποδειχθεί ότι αν*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

με
1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2) $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ *για όλα τα* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$
τότε η f είναι γραμμική.

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτάθηκε από τον Σωτήρη Χασάπη)* *Να δειχθεί ότι ο αριθμός 20801 διαιρεί τον $20^{15} - 1$.*

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτάθηκε από τον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο)* *Να βρεθούν όλα τα ζεύγη των ακεραίων n και m τέτοια ώστε*

$2m \equiv -1 \pmod{n}$ *και* $n^2 \equiv -2 \pmod{m}$.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Κυριαζή)* *Έστω*

$$f(x) = x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}$$

και S *το σύνολο των σημείων* (x, y) *του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τις δύο παρακάτω σχέσεις:*

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\leq 0 \\ f(x) - f(y) &\leq 0 \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν τα στοιχεία του S.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(προτάθηκε από τον Στράτη Αντωνέα) Να λυθεί το σύστημα:*

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + \sin y = \sin(x+y) \\ |x| + |y| = 1 \end{array}\right\}$$

Ο Φάκελος του καθηγητή. Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτάθηκε από τον Στράτη Αντωνέα) Δίνονται τα πολυώνυμα*

$$p(x) = (x+1)^n - x^n - 1$$

και

$$\phi(x) = (x^2 + x + 1)^m$$

όπου n, m *θετικοί ακέραιοι. Για ποιές τιμές των* n, m *το πολυώνυμο* $\phi(x)$ *διαιρεί το* $p(x)$;

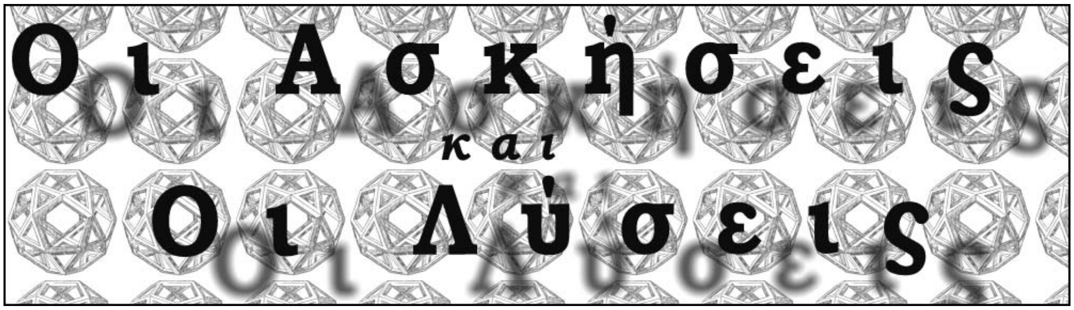
ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Κυριαζή) Έστω η εξίσωση*

$$ax^2 - bx + c = 0$$

με a, b, c *θετικούς ακέραιους. Να προσδιορίσετε τους* a, b, c *αν γνωρίζετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες που ανήκουν στο διάστημα* $(0, 1)$ *και το άθροισμα*

$$a + b + c$$

είναι το ελάχιστο δυνατό.



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτάθηκε από την Φωτεινή Καλδή) Έχετε στη διάθεση σας δύο μπουκάλια. Το πρώτο χωράει 5 λίτρα και το δεύτερο 3. Μπορείτε χρησιμοποιώντας αυτά τα 2 μπουκάλια και απεριόριστη ποσότητα νερού να μετρήσετε ακριβώς 4 λίτρα·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=9089

Λύση (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Αφού ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 5 και 3 είναι $\gcd(5,3) = 1$, η απάντηση είναι: ναι! Πιο αναλυτικά: Έχουμε

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$$

οπότε

$$8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 4$$

ή καλύτερα

$$(8-5) \cdot 3 + (-4+3) \cdot 5 = 4$$

δηλ.

$$3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 4$$

Οπότε, εν συντομία,
1) Γεμίζουμε το δοχείο των τριών λίτρων και ρίχνουμε το περιεχόμενο στο δοχείο των 5 λίτρων.
2) Ξαναγεμίζουμε το δοχείο των τριών λίτρων και ρίχνουμε το περιεχόμενο στο δοχείο των 5 λίτρων μέχρι αυτό να γεμίσει.
3) Αδειάζουμε το δοχείο των 5 λίτρων κι έπειτα ρίχνουμε το 1 λίτρο που απέμεινε στο δοχείο των 3 λίτρωνσε αυτό.
4) Τέλος, γεμίζουμε το δοχείο των τριών λίτρων και ρίχνουμε το περιεχόμενο στο δοχείο των 5 λίτρων που τώρα θα περιέχει 4 λίτρα.

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτάθηκε από τον Σωτήρη Χασάπη) Ένα κουτί περιέχει αριθμημένες σφαίρες από* 1 *έως* $6k+2$, k *φυσικός αριθμός. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα από το κουτί και η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται πάνω σε αυτή να διαιρείται με το* 6 *είναι* $\frac{5}{31}$. *Πόσες σφαίρες έχει το κουτί·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=9436

Λύση (Ανδρέας Πούλος) Από τους $6k+2$ αριθμούς οι k είναι διαιρέτες του 6. Άρα η πιθανότητα να που ζητάμε είναι

$$\frac{k}{6k+2}$$

Όμως αυτή η πιθανότητα είναι $\frac{5}{31}$. Επιλύοντας την εξίσωση

$$\frac{k}{6k+2} = \frac{5}{31}$$

βρίσκουμε ότι $k = 10$. Άρα το κουτί περιέχει 62 σφαίρες.

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Να υπολογιστεί η παράσταση:*

$$A = 2^{2011} - (2^{100} + 2^{100} + 2^{101} + 2^{102} + 2^{103} + \ldots + 2^{2010})$$

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=33&p=76486

Λύση (T-REX) Είναι : $2^{100} + 2^{100} = 2 \cdot 2^{100} = 2^{101}$ Στη συνέχεια παίρνουμε : $2^{101} + 2^{101} = 2 \cdot 2^{101} = 2^{102}$ Όλα συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο και στο τέλος θα μείνει μέσα στην παρένθεση μόνο αυτό :

$2^{2010} + 2^{2010} = 2 \cdot 2^{2010} = 2^{2011}$ Επομένως : $A = 2^{2011} - 2^{2011} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτάθηκε από το Βασίλη Μαυροφρύδη) Να γραφεί η παράσταση*

$$A = \left(3^4\right)^2 + 3^{10} : 9 + 3^5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^9$$

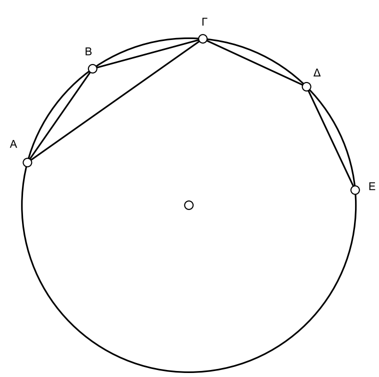
ως δύναμη του -3, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=33&p=75977

Λύση (Αρσενόη Μουτσοπούλου) Έχουμε: $(3^4)^2 + 3^{10} : 9 + 3^5.3^3 - 2.3^9 = 3^8 + 3^{10} : 9 + 3^8 - 2.3^9 = 3^8 + 3^{10} : 3^2 + 3^8 - 2.3^9 = 3^8 + 3^8 + 3^8 - 2.3^1.3^8 = 3.3^8 - 6.3^8 = -3.3^8 = -3^9 = (-3)^9$.

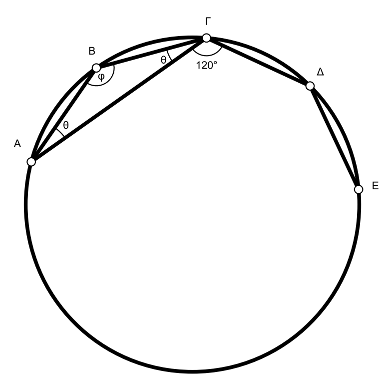
Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Αν η γωνία ΑΓΔ του κανονικού πολυγώνου του σχήματος είναι ίση με 120 μοίρες, πόσες πλευρές έχει το πολύγωνο αυτό;*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=13081

Λύση 1 (chris t) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΑΓ.



Επομένως

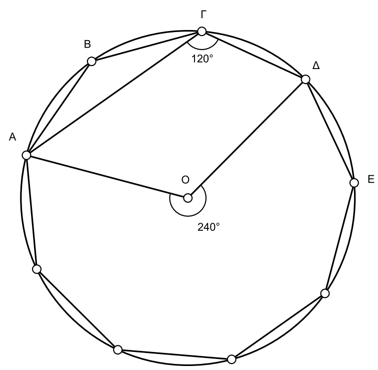
$$\theta = \frac{180 - \varphi}{2} \quad (1)$$

όμως

$$\vartheta + \mathrm{A\Gamma\Delta} = \varphi \text{ ή } \vartheta = \varphi - 120^\circ \ (2)$$

από (1) και (2) έχουμε $\varphi - 120^\circ = \frac{180-\varphi}{2}$ οπότε φ = 140° άρα $180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu} = 140^\circ$ που με επίλυση δίνει ν = 9. Το κανονικό εννεάγωνο λοιπόν.

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) Εφόσον $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta = 120^\circ$ τότε $\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{E}}\Delta = 240^\circ$ και $\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{B}}\Delta = 120^\circ$.



Άρα η κάθε χορδή-πλευρά κανονικού ν-γώνου αντιστοιχεί σε τόξο $\dfrac{120^\circ}{3} = 40^\circ$, οπότε όλος ο κύκλος έχει $\dfrac{360^\circ}{40^\circ} = 9$ ίσα τόξα, συνεπώς πρόκειται για το κανονικό 9-γωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) «Ευτυχισμένε Πυθαγόρα, Ελικώνιε απόγονε των Μουσών, πες μου σε παρακαλώ πόσοι φοιτούν στην σχολή σου;»*

«Βεβαίως θα σου πω Πολυκράτη. Οι μισοί ασχολούνται με τα ωραία μαθηματικά, το ένα τέταρτο εξάλλου καταπιάνεται με την έρευνα της αθάνατης φύσης, ενώ το ένα έβδομο παραμένει τελείως αμίλητο και σκέφτεται παραμύθια. Υπάρχουν ακόμα και τρεις γυναίκες από τις οποίες ξεχωρίζει η Θεανώ.»

Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών του Πυθαγόρα.

Σύμφωνα με τον Μιχάλη Λάμπρου το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στη συλλογή Παλατινή Ανθολογία, η οποία είναι μία συλλογή αρχαίων ποιημάτων από 300 περίπου συγγραφείς. Ένα από τα βιβλία, το 14 από τα συνολικά 15, περιέχει αινίγματα, γρίφους και προβλήματα αριθμητικής.

http:// http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=13918

Λύση (Αρσενόη Μουτσοπούλου) Το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την εξίσωση: Αν x ο αριθμός των, μαθητών

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$

$$28 \cdot \frac{x}{2} + 28 \cdot \frac{x}{4} + 28 \cdot \frac{x}{7} + 28 \cdot x$$

$$14x + 7x + 4x + 84 = 28x$$

$$84 = 28x - 14x - 7x - 4x$$

$$84 = 3x$$

$$x = 28$$

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) Για να μην ξεχνάμε τους μικρούς μας φίλους, ας παραγοντοποιηθεί η παράσταση*

$$(x^2 + 4x + 1)(x^2 + 4x + 7) + 9$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=10984

Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) Θέτω $a = x^2 + 4x$ αρα η παράσταση γίνεται:

$$(a+1)(a+7) + 9 = ... = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε

$$(x^2 + 4x + 4)^2 = (x+2)^4$$

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή) $(x^2+4x+1)(x^2+4x+7)+9 = \big((x^2+4x+4)-3\big)\big((x^2+4x+4)+3\big)+9 = (x^2+4x+4)^2 - 9 + 9 = (x^2+4x+4)^2 = (x+2)^4$

Λύση 3 (Irakleios) Θέτω $a = x^2 + 4x + 7, a(a-6) + 9 = (a-3)^2 = (x^2+4x+4)^2 = (x+2)^4$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτάθηκε από τον Κώστα Καπένη) Αν a, b, c πλευρές του τριγώνου $\triangle ABC$ και επιπλέον ισχύει*

$$2(ab - c^2) = (a+b)(a+b-2c)$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&p=58341#p58341

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

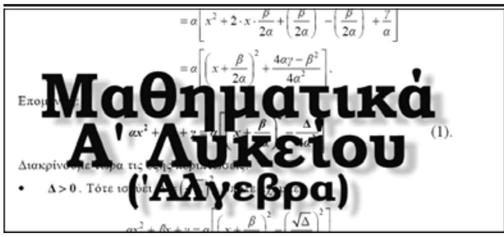
$$2(ab - c^2) = (a+b)(a+b-2c) \Leftrightarrow$$

$$2ab - 2c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = b = c$$



Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτάθηκε από τον KARKAR) Να βρεθούν όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών για τους οποίους ισχύουν:*

$$\begin{cases} x^2 = 1 - y \\ y^2 = 1 - x \end{cases}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=13998

Λύση (Ηλίας Καμπελής)

$$\begin{cases} x^2 = 1 - y \ \ (1) \\ y^2 = 1 - x \ \ (2) \end{cases}$$

Πρέπει $x \leq 1$ και $y \leq 1$

Από την (1) είναι $y = 1 - x^2$ και αντικαθιστώντας στη (2) μετά από πράξεις έχουμε:

$x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow$
$x\left(x^3 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$
$x\left(x^3 - x - x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$
$x\left[x\left(x^2 - 1\right) - (x-1)\right] = 0 \Leftrightarrow$
$x(x-1)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = 1$ ή $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (δεκτές όλες)

- Αν $x = 0$ τότε $y = 1$
- Αν $x = 1$ τότε $y = 0$
- Αν $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -\phi$ τότε $y = 1 - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $y = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Αν $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ τότε $y = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow$ $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Σημείωση: Ανάλογη λύση δόθηκε και από το μέλος stavros11

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη) Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών το σύστημα:* $x(x+y) + z = y(y+1) - 3z + 1 = 0$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=12903

Λύση (Θάνος Μάγκος) Το σύστημα γράφεται

$$x^2 + xy + z = 0,$$

$$y^2 + y - 3z + 1 = 0$$

Με απαλοιφή του z αναγόμαστε στην εξίσωση

$$3x^2 + y^2 + 3xy + y + 1 = 0$$

η οποία γράφεται ως

$$3\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2 = 0$$

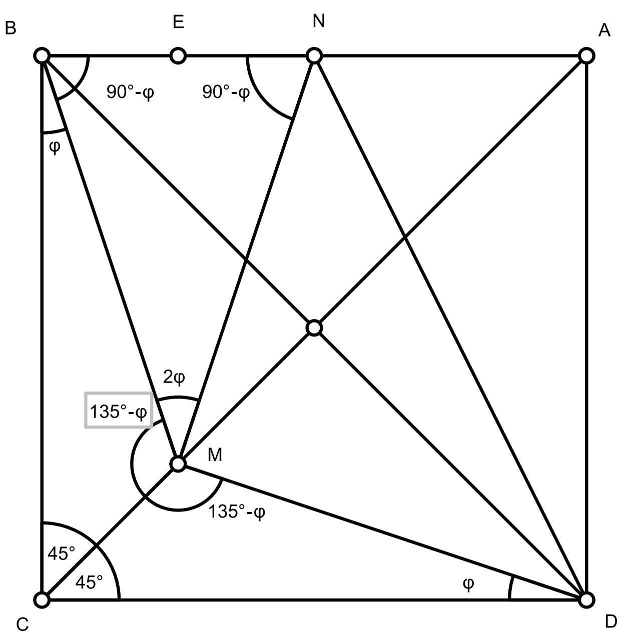
οπότε προκύπτει $y = -2$ και $x = 1$. Με αντικατάσταση σε μία από τις αρχικές εξισώσεις βρίσκουμε $z = 1$. Η τριάδα $(1, -2, 1)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος και άρα είναι η μοναδική του λύση.

Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ και σημείο Μ στην ΑΓ έτσι, ώστε ΜΝ=ΜΒ. Να αποδειχθεί ότι η ΜΔ είναι κάθετη στην ΜΝ.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=72965#p72965

Λύση 1 (Ηλίας Καμπελής) Τα τρίγωνα ΒΓΜ και ΔΜΓ είναι ίσα γιατί ΓΜ κοινή, ΜΒ=ΜΔ αφού το Μ ανήκει της ΒΔ και ΒΓ=ΓΔ ως πλευρές του ΑΒΓΔ.



Έτσι αν $\Gamma\overset{\wedge}{\mathrm{B}}\mathrm{M} = \varphi$ τότε και $\Gamma\overset{\wedge}{\Delta}\mathrm{M} = \varphi$. Από τα τρίγωνα ΒΓΜ και ΔΜΓ θα είναι

$$\Gamma\overset{\wedge}{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \Gamma\overset{\wedge}{\mathrm{M}}\Delta = 135^\circ - \varphi$$

Στο ισοσκελές ΒΜΝ είναι

$$\mathrm{M}\overset{\wedge}{\mathrm{B}}\mathrm{N} = \mathrm{B}\overset{\wedge}{\mathrm{N}}\mathrm{M} = 90^\circ - \varphi$$

οπότε

$$\mathrm{B}\overset{\wedge}{\mathrm{M}}\mathrm{N} = 2\varphi$$

Έτσι

$$\mathrm{N}\overset{\wedge}{\mathrm{M}}\Delta = 360^\circ - 2\varphi - 135^\circ + \varphi - 135^\circ + \varphi = 90^\circ$$

οπότε

$$\mathrm{MN} \perp \mathrm{M}\Delta$$

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή) $MB = MN$ (υπόθεση) $MB = MD$... (από ίσα τρίγωνα CMB, MCD...) στον κύκλο (M, MB) $N\hat{B}D = 45^o$... (εγγεγραμμένη στο τόξο ND)... άρα η επίκεντρη... $N\hat{M}D = 90^o$.

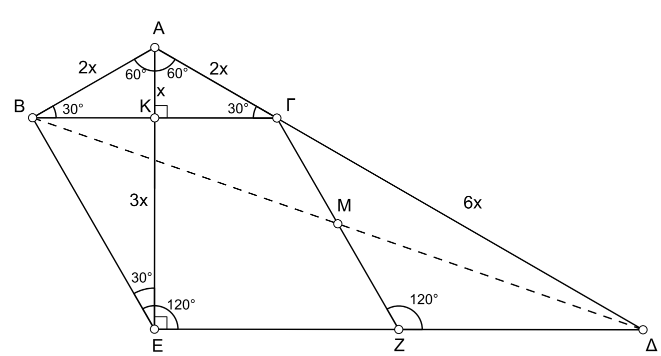
ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι ίση με 120 μοίρες. Στην ημιευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ και στη διχοτόμο της γωνίας Α παίρνουμε σημείο Ε έτσι, ώστε ΑΔ=2ΑΕ = 4ΑΒ. Να αποδειχθεί ότι:*
α) η γωνία ΒΕΔ είναι ίση με 120 μοίρες.
β) ΒΓ // ΕΔ και ΒΖ = 3ΑΒ ,όπου Ζ είναι το μέσο του ΕΔ.
γ) η ευθεία ΒΔ περνάει από το μέσο του ΓΖ.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=68651#p68651

Λύση 1 (Μιχάλης Νάννος) Θέτω $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 2x$ και από εκφώνηση θα έχω

$$\mathrm{AE} = 4x,\ \mathrm{A}\Delta = 8x$$

Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΓ.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ με $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 30^\circ$ θα ισχύει

$$\mathrm{AK} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = x$$

οπότε παίρνω

$$\mathrm{KE} = 3x,\ \Gamma\Delta = 6x$$

Εφόσον

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$$

θα ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Θαλή, δηλαδή ΒΓ // ΕΔ.

Έτσι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma = 90^\circ$ και από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΚ, ΑΒΕ (δύο πλευρές ανάλογες και οι περιεχόμενες γωνίες ίσες) έχω ότι

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 30^\circ$$

συνεπώς

$$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Delta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ ισχύει

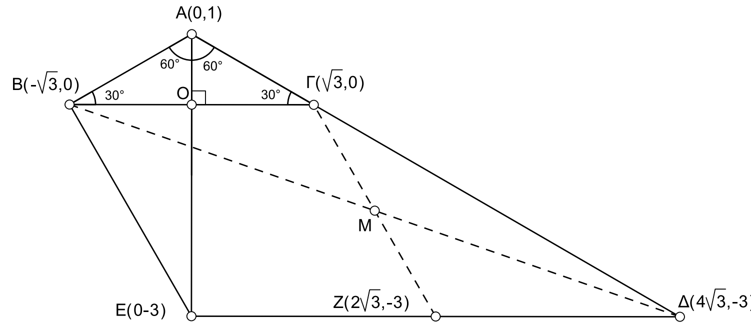
$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{BK}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\mathrm{BK}} \Rightarrow \mathrm{BK} = \sqrt{3}x$$

επομένως $\mathrm{B}\Gamma = 2\sqrt{3}x$ Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ ισχύει

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\mathrm{E}\Delta}{4x} \Rightarrow \mathrm{E}\Delta = 4\sqrt{3}x$$

επομένως $\Delta\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{E}\Delta}{2} = 2\sqrt{3}x$ Λόγω του παραλληλογράμμου ΒΓΔΖ (ΒΓ = // ΔΖ) έχω ότι $\mathrm{BZ} = 6x$ ή $\mathrm{BZ} = 3\mathrm{AB}$. Εφόσον οι διαγώνιες διχοτομούνται, η ΒΔ θα περνάει από το μέσο Μ της διαγωνίου.

Λύση 2 (Γιώργος Ρίζος) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο Ο παίρνουμε τα σημεία $A(0,\ 1)$, $B\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$, $\Gamma\left(\sqrt{3},\ 0\right)$, τα οποία σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 120^\circ$ και ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 2.



Η ΑΟ είναι διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{A}}$. Στην προέκταση της ΑΟ παίρνουμε σημείο $\mathrm{E}\,(0,\ -3)$, οπότε ΑΕ = 4 = 2ΑΒ. Η ΑΓ σχηματίζει με τον Οξ γωνία 150°, οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και εξίσωση:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \sqrt{3}\right) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$$

Έστω Δ σημείο της προέκτασης της ΑΓ με συντεταγμένες $\Delta\left(\alpha,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha + 1\right),\ \alpha > \sqrt{3}$ ώστε

$$(\mathrm{A}\Delta) = 8 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha\right)^2} = 8 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{3} = 64 \Rightarrow \alpha^2 = 48$$

και αφού $\alpha\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 4\sqrt{3}$, οπότε $\Delta\left(4\sqrt{3}, -3\right)$.

α, β) Είναι $\Delta\mathrm{E}//x'x \Rightarrow \Delta\mathrm{E}//\mathrm{B}\Gamma$ Είναι

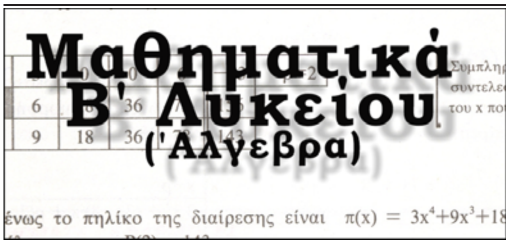
$$\varepsilon\phi\left(\widehat{\mathrm{BEO}}\right) = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{EO}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{\mathrm{BEO}} = 30^\circ$$

άρα $\widehat{\mathrm{BE}\Delta} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

Το μέσο Ζ της ΒΔ έχει συντεταγμένες $\mathrm{Z}\left(2\sqrt{3},\ -3\right)$ οπότε

$$(\mathrm{BZ}) = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 9} = \sqrt{36} = 6 = 3\mathrm{AB}$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Z}\Delta//\mathrm{B}\Gamma,\quad \mathrm{Z}\Delta = \mathrm{B}\Gamma$ οπότε το ΖΔΓΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα οι διαγώνιοί του ΒΔ, ΓΖ διχοτομούνται. (Το (γ) το αντιμετώπισα μόνο με Γεωμετρία, εφόσον είναι προφανές)



Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Αντώνης Κυριακόπουλος) Να λυθεί η εξίσωση:*

$$\sigma\upsilon\nu^{2\mu+1}x+\eta\mu^{2\nu}x=1\ (1),$$

όπου μ και ν είναι δύο δοσμένοι φυσικοί θετικοί αριθμοί με $\nu\geq 2$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=13747

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Προφανώς, οι x για τους οποίους είναι $\cos x=0$ ή $\cos x=1$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι.

Έστω x μία λύση της εξίσωσης, διαφορετική από τις παραπάνω. Επειδή $|\sin x|<1$, είναι και $\sin^{2n}x<1$, οπότε βρίσκουμε $\cos^{2m+1}x>0$, δηλαδή $\cos x>0$.

Εξάλλου, η (1) γράφεται ως

$$\cos^{2m+1}x+\sin^{2n}x=\sin^2 x+\cos^2 x$$

δηλαδή

$$\cos^{2m+1}x-\cos^2 x=\sin^2 x-\sin^{2n}x\geq 0$$

άρα

$$\cos^{2m+1}x\geq\cos^2 x$$

οπότε είναι $\cos x\geq 1$, άτοπο.

Άρα οι λύσεις της (1) είναι οι

$$x=2k\pi,\ x=l\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{με}\ k,l\in\mathbb{Z}.$$

Λύση 2 (Αντώνης Κυριακόπουλος)

Έστω ότι $x\in R$ είναι μια λύση της εξίσωσης (1), οπότε η ισότητα (1) ισχύει. Βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^{2\mu+1}x\leq\sigma\upsilon\nu^2 x,\ (2)$$

και

$$\eta\mu^{2\nu}x\leq\eta\mu^2 x,\ (3)$$

Αν σε μία τουλάχιστον από τις σχέσεις (2) και (3) ισχύει η ανισότητα, τότε προσθέτοντας αυτές κατά μέλη, θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^{2\mu+1}x+\eta\mu^{2\nu}x<1$$

άτοπο, λόγω της (1).

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^{2\mu+1}x=\sigma\upsilon\nu^2x\\ \eta\mu^{2\nu}x=\eta\mu^2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2x\left(\sigma\upsilon\nu^{2\mu-1}x-1\right)=0\\ \eta\mu^2x\left(\eta\mu^{2\nu-2}x-1\right)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=1)\\ \left(\eta\mu x=0\ \text{ή}\ \left(\eta\mu^2x\right)^{\nu-1}=1\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=1)\\ \left(\eta\mu x=0\ \text{ή}\ \left(\eta\mu^2x\right)^{\nu-1}=1\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(\sigma\upsilon\nu x=0\ \ \eta\ \ \sigma\upsilon\nu x=1)\\ (\eta\mu x=0\ \text{ή}\ \eta\mu^2x=1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=1)\\ (\eta\mu x=0\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=0)\end{cases}\Rightarrow$$

$$[\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ή}\ (\sigma\upsilon\nu x=1\ \text{και}\ \eta\mu x=0)]\Rightarrow(\sigma\upsilon\nu x=0\ \text{ή}\ \sigma\upsilon\nu x=1)$$

$$\Rightarrow\left(x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\ \text{ή}\ x=2\kappa\pi,\kappa\in Z\right).$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί:

$$x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\ \text{και}\ x=2\kappa\pi,\ \text{όπου}\ \kappa\in Z$$

επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση και άρα είναι οι ζητούμενες λύσεις.

Λύση 3 (Σωτήρης Λουρίδας)

Για τα τόξα x που δίνουν $(\cos x\neq 0)\wedge(\cos x\neq 1)$, έχουμε:

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}=\left(cos^2x,\sin^2 x\right)\\ \overrightarrow{b}=\left(cos^{2m-1}x,\sin^{2n-2}x\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\\ |\overrightarrow{a}|=\sqrt{cos^4x+\sin^4 x}<\sqrt{cos^2x+\sin^2 x}=1\\ \left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{cos^{2(2m-1)}x+\sin^{2(2n-2)}x}<\sqrt{cos^2x+\sin^2 x}=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|<1=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\Rightarrow$$

$$1<\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}\right),\ \text{άτοπο.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Χρήστος Κανάβης) Να λυθεί το σύστημα:*

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{25}{4}+9\left(\frac{25}{36}\right)^z\\ \\ 6\left(\frac{3}{4}\right)^y=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^x\\ \\ 15\left(\frac{5}{6}\right)^z=\frac{9}{4}+4\left(\frac{9}{16}\right)^y\end{array}\right\}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=13062

Λύση 1 (Σπύρος Καπελλίδης) Θέτουμε

$$(\frac{1}{2})^x = a,\ (\frac{3}{4})^y = b,\ (\frac{5}{6})^z = c$$

και έχουμε

$$a = \frac{25}{4} + 9c^2,\ 6b = \frac{1}{4} + a^2,\ 15c = \frac{9}{4} + 4b^2.$$

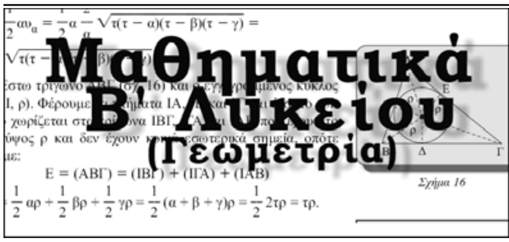
Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$(a - \frac{1}{2})^2 + (2b - \frac{3}{2})^2 + (3c - \frac{5}{2})^2 = 0.$$

Δηλαδή

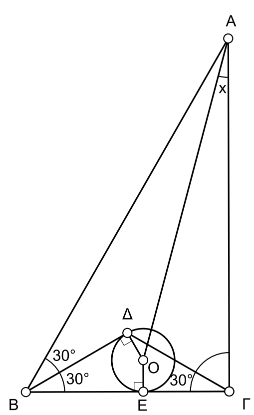
$$(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{2}, (\frac{3}{4})^y = \frac{3}{4}, (\frac{5}{6})^z = \frac{5}{6}$$

από όπου $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, η οποία δεν αληθεύει το αρχικό, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.



Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτάθηκε από τον Μιχάλη Νάννο) Δίνεται τρίγωνο* $\mathrm{AB\Gamma}$ $(30°, 60°, 90°)$ *αντίστοιχα, εσωτερικό σημείο* Δ *τέτοιο ώστε* $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 30°$ *και σημείο* E *στη* $\mathrm{B\Gamma}$ *τέτοιο ώστε στον κύκλο* $(\mathrm{O}, \mathrm{O\Delta} = \mathrm{OE})$ *τα* Δ, E *να είναι εφαπτόμενα σημεία. Βρείτε τη γωνία* $x = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=76018#p76018

Λύση 1 (Στράτης Αντωνέας) Έστω $B\Gamma = a$. Τότε $A\Gamma = a\sqrt{3}$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι:

$$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2B\Delta \cdot \Delta\Gamma \cdot \cos 120° = 3B\Delta^2$$

Άρα

$$B\Gamma = B\Delta\sqrt{3} \Rightarrow BE = B\Delta = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEO είναι:

$$OE = BE \cdot \tan 15° = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$$E\Gamma = B\Gamma - BE = a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$$

Φέρνουμε $OK \perp A\Gamma$. Είναι $OK = E\Gamma = \dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$.

$$AK = A\Gamma - K\Gamma = A\Gamma - OE =$$

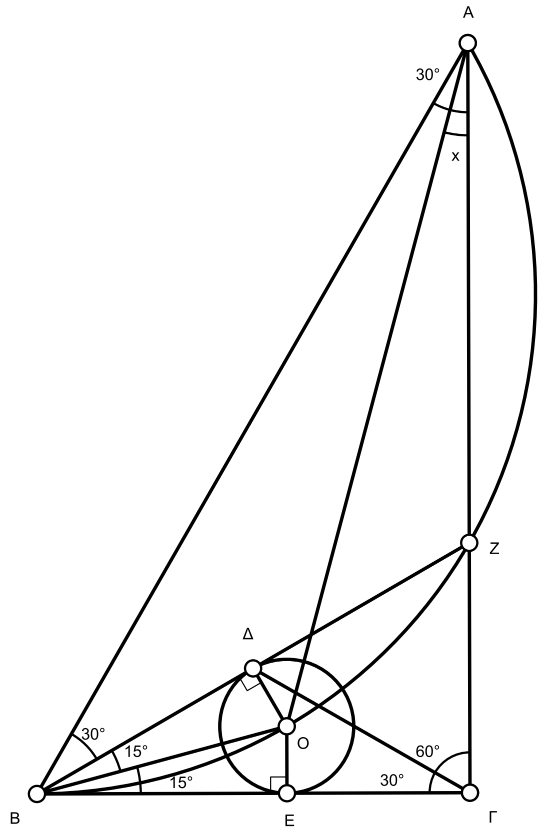
$$a\sqrt{3} - \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{a(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOK είναι:

$$\tan x = \frac{OK}{AK} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

Άρα $x = 15°$.

Λύση 2 (Στάθης Κούτρας) Έστω Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΔ με την ΑΓ.



Τότε από τα εφαπτόμενα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι γνωστό ότι ΒΟ διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{EB\Delta}}$ οπότε

$$\widehat{\mathrm{OB\Delta}} = \widehat{\mathrm{OBE}} = \frac{30^0}{2} = 15^0$$

Επίσης

$$\widehat{\mathrm{BZ\Gamma}} = \widehat{\mathrm{ZBA}} + \widehat{\mathrm{BAZ}} = 30^0 + 30^0 = 60^0$$

ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΔ.
$\widehat{\mathrm{BZ\Gamma}} = 60^0 = \widehat{\mathrm{\Delta\Gamma Z}} \Rightarrow$ το τρίγωνο ΔΖΓ είναι ισόπλευρο άρα

$$\mathrm{\Delta Z} = \mathrm{Z\Gamma} \overset{\widehat{\mathrm{\Gamma BZ}}=30^0, \widehat{\mathrm{Z\Gamma B}}=90^0}{=} \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \frac{\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Delta Z}}{2} \Rightarrow$$

$$\ldots \mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta Z} \overset{\mathrm{B}\overset{\triangle}{\mathrm{O}}\mathrm{Z}}{\Rightarrow} \widehat{\mathrm{BZO}} = \widehat{\mathrm{ZB\Delta}} = 15^0 \Rightarrow$$

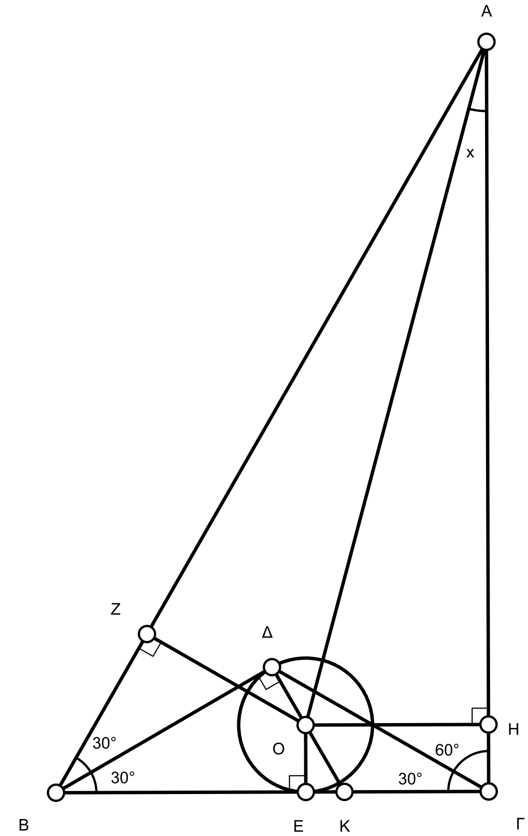
$$\widehat{\mathrm{OZ\Gamma}} = 60^0 - 15^0 = 45^0 = \widehat{\mathrm{OBA}}$$

Οπότε το τετράπλευρο ΑΖΟΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (μια εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική) άρα θα είναι και

$$\widehat{\mathrm{OA\Gamma}} = \widehat{x} = \widehat{ZBO} = 15^0$$

(δύο διαδοχικές κορυφές που «βλέπουν» την απέναντι πλευρά υπό ίσες γωνίες)

Λύση 3 (KARKAR) Έστω $(BC) = 1$. Φέρω τις $OZ \perp AB, OH \perp AC$ και OK (προέκταση της DO).



Εύκολα βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου BDK και είναι:

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{3}, \;\; DK = \frac{1}{3}, \;\; BK = \frac{2}{3}$$

Τώρα επειδή BO, διχοτόμος βρίσκω

$$DO = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

και με Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$BO = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

Αλλά το BZD είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε

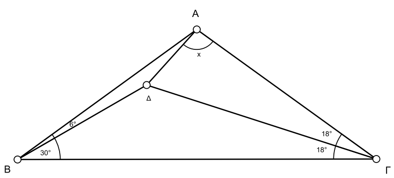
$$OZ = BO\frac{\sqrt{2}}{2} ... = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

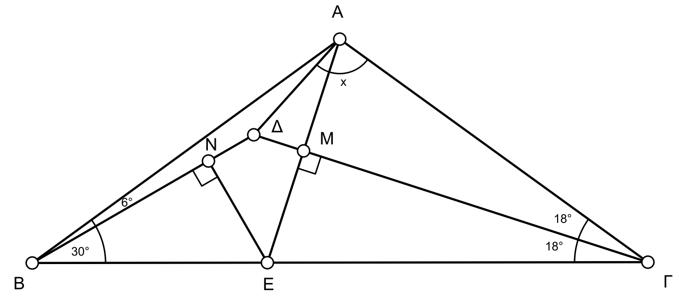
Επίσης είναι

$$OH = EC = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

δηλαδή $OZ = OH$ και επομένως η AO είναι διχοτόμος της γωνίας A.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτάθηκε από τον Μιχάλη Νάννο) Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου* $\mathrm{AB\Gamma}(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$ *παίρνουμε σημείο* Δ *τέτοιο ώστε:* $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 6^\circ, \Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^\circ, \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 18^\circ$. *Βρείτε τη γωνία* $x = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$.

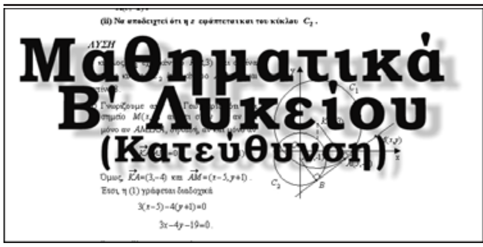




http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=74911#p74911

Λύση (Ανδρέας Βαρβεράκης) Μία γεωμετρική αντιμετώπιση:

Έστω Ε σημείο της ΒΓ με ΓΕ=ΓΑ και Ν η προβολή του Ε στη ΒΔ. Τότε, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΓ, ΒΕΑ έχουν γνωστές γωνίες ($\widehat{E\mathrm{A}\Gamma} = \widehat{\mathrm{AE}\Gamma} = 72^\circ$, $\widehat{\mathrm{E}\Gamma\mathrm{A}} = 36^\circ$, $\widehat{BEA} = 108^\circ$, $\widehat{\mathrm{EBA}} = \widehat{\mathrm{EAB}} = 36^\circ$, ΒΕ=ΕΑ και η ΓΜ είναι κάθετη στην ΑΕ. $EN = \frac{EB}{2} = EM$, επομένως η ΕΔ διχοτομεί τη γωνία ΑΕΝ που, η οποία ισούται με 48°. Επομένως $\widehat{MA\Delta} = \widehat{ME\Delta} = 24^\circ$ και $\widehat{\Delta A\Gamma} = 24^\circ + 72^\circ = 96^\circ$.



Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καρδαμίτση) Αν για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ ισχύει:*

$$\left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| + \left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = 6$$

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq 9$.
β) Αν επιπλέον $\overrightarrow{\alpha}^2 + \overrightarrow{\beta}^2 = 9$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι κάθετα.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=3678

Λύση (Βασίλης Μαυροφρύδης) α) έχουμε ότι

$$2\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} - \vec{\beta} \Rightarrow$$

$$2\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| + \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 6$$

και

$$2\vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} \Rightarrow$$

$$2\left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| + \left|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right| = 6$$

επομένως

$$4\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right| \leq 36 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right| \leq 9$$

Ξέρουμε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq \left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|$$

άρα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq 9$$

με την ισότητα να ισχύει όταν τα διανύσματα μας είναι ομόρροπα
Για το β) υψώνοντας την αρχική μας σχέση στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| \cdot \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 9$$

(χρησιμοποιήσαμε την βασική άσκηση 2i) σελ 48 του σχολικού βιβλίου). Άρα τα μέτρα έχουν γινόμενο 9 και άθροισμα 6. Τουτέστιν έκαστο 3. υψώνοντας ένα μέτρο στο τετράγωνο παίρνουμε το $\overrightarrow{\alpha}\,\overrightarrow{\beta} = 0$ επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ είναι κάθετα .

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Καρδάση) Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} \neq 0$ Να λύσετε την εξίσωση*

$$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}| \cdot \overrightarrow{x} = |\overrightarrow{x} + 8\overrightarrow{\alpha}| \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=1990

Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) Αν $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha}$, τότε θα είχαμε:

$$\vec{0} = 9|\overrightarrow{\alpha}|\overrightarrow{\alpha} \Rightarrow |\overrightarrow{\alpha}| = 0 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{\alpha} = \vec{0}$$

(Άτοπο αφού $\overrightarrow{\alpha} \neq 0$)
Αρα έχουμε:

$$\vec{x} = \frac{|\vec{x} + 8\overrightarrow{\alpha}|}{|\vec{x} - \overrightarrow{\alpha}|} \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

Θέτω

$$\lambda = \frac{|\vec{x} + 8\overrightarrow{\alpha}|}{|\vec{x} - \overrightarrow{\alpha}|} \geq 0$$

Συνεπώς

$$\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{\alpha} \ \ (1)$$

Τότε, αντικαθιστώντας στην αρχική, έχουμε, μετά απο πράξεις:

$$|\overrightarrow{\alpha}| \cdot |\lambda - 1| \cdot \lambda \cdot \overrightarrow{\alpha} = |\overrightarrow{\alpha}| \cdot |\lambda + 8| \cdot \overrightarrow{\alpha}$$

Λαμβάνοντας υπ'οψη πως

$$|\overrightarrow{\alpha}| \neq 0$$

έχουμε: $|\lambda - 1|\lambda = |l + 8|$
Αν $\lambda > 1$ έχουμε: $(\lambda - 1)\lambda = \lambda + 8 \Rightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -2$(απορρίπτεται). Τελικά $\lambda = 4$

Αν $0 \leq \lambda \leq 1$ τότε : $-\lambda^2 = 8$. Αδύνατη. Αρα αντικαθιστώντας στην (1) για $\lambda = 4$, προκύπτει: $\overrightarrow{x} = 4\overrightarrow{\alpha}$, λύση που επαληθεύει και την αρχική μας ισότητα
Λύση 2 (Γιώργος Ρίζος) Είναι $\vec{x} = \kappa \cdot \vec{\alpha}, \quad \kappa > 0$, αφού, όπως έδειξε ο Χρήστος παραπάνω δεν είναι $\vec{x} = \vec{\alpha}$ Η εξίσωση γράφεται:

$$|\kappa \cdot \vec{\alpha} - \vec{\alpha}|\, \kappa{\cdot}\vec{\alpha} = |\kappa \cdot \vec{\alpha} + 8 \cdot \vec{\alpha}|{\cdot}\vec{\alpha} \ \ \Leftrightarrow \ \ |\kappa - 1|{\cdot}\kappa = |\kappa + 8|$$

αφού $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.
Οπότε:

$$\left|\kappa^2 - \kappa\right| = |\kappa + 8| \ \ \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \kappa^2 - \kappa = \kappa + 8 \\ \eta \\ \kappa^2 - \kappa = -\kappa - 8 \end{array}\right. \quad (\kappa > 0) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \kappa^2 - 2\kappa - 8 = 0 \\ \eta \\ \kappa^2 = -8 \ \text{απορρίπτεται} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \ \kappa = 4, \ \kappa = -2 \ \text{απορρίπτεται}$$

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτάθηκε από την Φωτεινή Καλδή) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με*

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X ένα ενδεχόμενο του Ω, τέτοιο ώστε $X - A = B$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=13836

Λύση (Μάκης Χατζόπουλος) 1. *Θα δείξουμε ότι τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.* Τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους γιατί, από το ενδεχόμενο X αφαιρούμε τα στοιχεία του A, αν το A είχε κοινά στοιχεία με το B τότε από το ενδεχόμενο X αφαιρούμε στοιχεία και από το B, άτοπο, γιατί το X - A τότε δεν θα μπορούσε να είναι ίσο με το B.
Άλλος τρόπος είναι ο εξής:

$$y \in B \Rightarrow y \in (X - A) \Rightarrow \{y \in X \ \kappa\alpha\iota\, y \notin A\}$$

άρα $y \in B \Rightarrow y \notin A$ οπότε $A \cap B = \emptyset$
2. *Εύρεση της πιθανότητας του ενδεχομένου A:*

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4} = P\left(A\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$P\left(A\right) = \frac{1}{4}$$

3. *Εύρεση της μέγιστης και ελάχιστης τιμής του $P(X)$*
A' τρόπος

$$\begin{array}{l} X - A \subseteq X \Rightarrow \\ B \subseteq X \Rightarrow \\ P\left(B\right) \leq P\left(X\right) \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \leq P\left(X\right) \end{array}$$

η ελάχιστη τιμή και

$$\begin{array}{l} X - A = B \Rightarrow \\ X \subseteq A \cup B \Rightarrow \\ P\left(X\right) \leq P\left(A \cup B\right) \Rightarrow \\ P\left(X\right) \leq \frac{3}{4} \end{array}$$

η μέγιστη τιμή

Β' τρόπος

$$X - A = B \Rightarrow X = A \cup B \Rightarrow ... \ (1)$$

μετά είναι εύκολο να βρούμε ελάχιστη και μέγιστη

Μια απόδειξη για την σχέση (1):

$$\begin{aligned} & y \in X \Rightarrow \\ & \{y \in (X - A) \ \vee \ y \in (X \cap A)\} \Rightarrow \\ & \{y \in B \ \vee \ y \in A\} \Rightarrow y \in A \cup B \end{aligned}$$

οπότε $X \subseteq A \cup B$ Το αντίστροφο,

$$\begin{aligned} & y \in A \cup B \Rightarrow \\ & \{y \in A \vee \ y \in B\} \Rightarrow \\ & \{y \in A \ \vee \ y \in (X - A)\} \Rightarrow \\ & y \in X \end{aligned}$$

οπότε $A \cup B \subseteq X$ Άρα, $A \cup B = X$

Ανάλογη λύση δημοσίευσε και το μέλος μας sxima

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη)*

Έστω δείγμα θετικών παρατηρήσεων

$$x_1, x_2, ..., x_{2009}$$

και η συνάρτηση f με παράγωγο

$$f'(x) = (x - s)(x - CV)$$

όπου s, CV η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής αντίστοιχα του παραπάνω δείγματος ($s \neq 5$). Η μικρότερη παρατήρηση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του 1 και η θέση τοπικού μεγίστου είναι ίση με το μισό της θέσης τοπικού ελαχίστου.

Α. να δείξετε ότι $\bar{x} = 2$

Β. εάν η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = -x + 1$$

είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 3

i. Να δείξετε ότι $s = 4$

ii. Να βρείτε τη μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{2009}, y_{2009})$$

της εφαπτομένης (ε).

iii. Να βρείτε τη μέση τιμή των τετραγώνων των τετμημένων των παραπάνω σημείων

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=12996

Λύση (Χρήστος Στραγάλης)

Α) Αφού η μικρότερη παρατήρηση είναι μεγαλύτερη του 1 συμπεραίνουμε οτι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2009}}{2009} > \frac{1 + 1 + ... + 1}{2009} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{s}{\bar{x}} < s \Rightarrow CV < s$$

Λύνουμε την ανίσωση $f'(x) \geq 0$ και κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - s)(x - CV) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, CV] \cup [s, +\infty)$$

x	$-\infty$	CV		s	∞
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο $x = CV$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = s$ και προκύπτει

$$s = 2CV \Rightarrow \frac{s}{CV} = 2 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 2}$$

Β) i) Αφού η ευθεία $(\varepsilon) : y = -x + 1$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 3 έχουμε οτι: $f'(3) = -1 \Rightarrow (3 - s)(3 - CV) = -1 \Rightarrow 9 - 3CV - 3s + sCV = -1 \Rightarrow 9 - \frac{3}{2}s - 3s + \frac{s^2}{2} = -1 \Rightarrow s^2 - 9s + 20 = 0 \Rightarrow (s - 4)(s - 5) = 0 \overset{s \neq 5}{\Rightarrow} s = 4$

ii)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_{2009}}{2009} =$$

$$\frac{(-x_1 + 1) + (-x_2 + 1) + ... + (-x_{2009} + 1)}{2009} =$$

$$\frac{2009 - (x_1 + x_2 + ...x_{2009})}{2009} = 1 - \bar{x} = 1 - 2 = -1$$

iii) $S_x^2 = \dfrac{1}{2009}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i\right)^2}{2009}\right] = \bar{x^2} - (\bar{x})^2 = \bar{x^2} - 4 \Rightarrow \bar{x^2} = 4 + 16 = 20$

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτάθηκε από τον Χάρη Γ. Λάλα) Έστω οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε*

$$|z-2| = |z+4i|$$

και

$$|w+2| = |w-4i|$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w κινούνται σε ευθείες παράλληλες .
β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w|$.
γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z+w|$.
δ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-w-2i|$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2661

Λύση (Δημήτρης Κατσίποδας)
α. $|z-2| = |z+4i|$ (1) Η (1) παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου $A(2,0)$ και $B(0,-4)$ Έχω $\lambda_{AB} = 2$, οπότε

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{2}$$

και $M(1,-2)$ το μέσο του ΑΒ. Συνεπώς

$$\varepsilon_1 : y+2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow x+2y+3=0$$

και

$$|w+2| = |w-4i|\,(2)$$

Όμοια η (2) παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ, όπου $\Gamma(-2,0)$ και $\Delta(0,4)$, οπότε

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = 2$$

άρα

$$\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{2}$$

και $\Lambda(-1,2)$ μέσο του ΓΔ. Συνεπώς

$$\varepsilon_2 : y-2 = -\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow x+2y-3=0$$

Έχουμε

$$\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$$

Άρα οι εικόνες των z, w κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες.
β. Είναι:

$$|z-w|_{\min} = d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$d(M, \varepsilon_2) = \frac{|1+2(-2)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

γ. Επειδή η εικόνα του w κινείται στην ευθεία

$$\varepsilon_2 : x+2y-3=0$$

η εικόνα του $-w$ θα κινείται στην συμμετρική της ε_2 : ως προς το $O(0,0)$, δηλαδή στην ε_1. Άρα, οι εικόνες των z και w κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία. Άρα,

$$|z+w|_{\min} = |z-(-w)|_{\min} = 0$$

δ. Έστω $v = w+2i$ με $v = \alpha+\beta i$ και $w = x+yi$ με $\alpha, \beta, x, y \in \Re$. Έχουμε ότι η εικόνα του w κινείται στην ευθεία ε_2

Οπότε $\alpha+\beta i = x+yi+2i$ και $x+2y-3=0$, συνεπώς η εικόνα του v κινείται στην ευθεία $\varepsilon_3 : \;\; x+2y-7=0$

$$|z-w-2i|_{\min} =$$

$$|z-(w+2i)|_{\min} =$$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = d(M, \varepsilon_3) =$$

$$\frac{|1+2(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτάθηκε από τον Χάρη Γ. Λάλα) Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί ανά δύο και οι εικόνες τους είναι τα σημεία Α , Β , Γ . Αν ισχύει ότι*

$$z_1+z_2+z_3 = 0$$

και

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$$

να δείξετε ότι
α) $z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1 = 0$
β) $z_3^3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
γ) $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3|$
δ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο .

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2606

Λύση (Χρήστος Λαζαρίδης)
α) Έχουμε:

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\left(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$$

β) Έχουμε:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow$$

$$z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_3^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z_3^2 = -z_1 z_3 - z_2 z_3 \Rightarrow$$

$$z_3^2 = z_1 z_2 \Rightarrow$$

$$z_3^3 = z_1 z_2 z_3$$

όμοια

$$z_1^3 = z_1 z_2 z_3$$

και

$$z_2^3 = z_1 z_2 z_3$$

γ)Αν $z_1 = 0$ τότε $z_2 + z_3 = 0$ και $z_2^2 + z_3^2 = 0$. Είναι

$$z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_3 \Rightarrow$$

$$(z_2)^2 = (-z_3)^2 \Leftrightarrow z_2^2 = z_3^2$$

άρα η $z_2^2 + z_3^2 = 0$ γίνεται $2z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$
Οπότε $z_2 = z_3$ άτοπο αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 οι οποίοι είναι διαφορετικοί ανά δύο. Όμοια αν $z_2 = 0$ή$z_3 = 0$ άρα$z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$. Από β) $z_3^2 = z_1 z_2 \Rightarrow |z_3|^3 = |z_1|\,|z_2|$ $z_1^2 = z_2 z_3 \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|\,|z_3|$ Με διαίρεση κατά μέλη: $|z_3|^3 = |z_1|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_3|$
Σχόλιο : Από τις σχέσεις $z_1^3 = z_1 z_2 z_3$, $z_2^3 = z_1 z_2 z_3$, $z_3^3 = z_1 z_2 z_3$ έχουμε $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$ και με μέτρα έχουμε το ζητούμενο.
δ) $z_3^2 = z_1 z_2$, $z_2 z_3 = z_1^2$. Με αφαίρεση κατά μέλη:

$$z_3\left(z_3 - z_2\right) = z_1\left(z_2 - z_1\right)$$

Παίρνουμε τα μέτρα και απλοποιούμε όποτε

$$|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτάθηκε από τον Θωμά Ραϊκόφτσαλη) Έστω η γνήσια φθίνουσα συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τη σχέση*

$$f(x) f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

Να βρεθεί το $f(1)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=2712

Λύση (Κώστας Σερίφης) Ισχύει:

$$f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2f(x)}$$

Για $x : f(x) + \frac{1}{x}$, $x > 0$ είναι:

$$f\left(f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\left(f(x) + \frac{1}{x}\right)}\right) = \frac{1}{2f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right)}$$

ή

$$f\left(\frac{1}{2f(x)} + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}}\right) = f(x)$$

και εφόσον η f είναι 1-1

$$\frac{1}{2f(x)} + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}} = x$$

$$2xf^2(x) - f(x) = \frac{1}{x}$$

η οποία, με δεδομένο ότι $f(x) > 0$, έχει λύση την

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος και συνεπώς είναι η ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτάθηκε από τον Φώτη Κουτσουμπίδη)* *Να βρεθεί η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν ισχύει:*

$$f\left(f\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=x+f\left(y\right)+2010$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=1350

Λύση (Γιώργος Ροδόπουλος) Στη σχέση

$$f(f(x)+f(y))=x+f(y)+2010\ \ (1)\ \ x,\,y\in\mathbb{R}$$

με εναλλαγή των $x,\,y$ παίρνουμε ότι

$$f(f(y)+f(x))=y+f(x)+2010\ \ (2)\ \ x,\,y\in\mathbb{R}$$

Έστω $x,\,y\in\mathbb{R}$ με $f(x)=f(y)$ τότε

$$f(x)+f(y)=f(y)+f(x)$$

δηλαδή

$$f(f(x)+f(y))=f(f(y)+f(x))$$

οπότε από (1) , (2) προκύπτει

$$x+f(y)+2010=y+f(x)+2010$$

ή

$$x=y$$

Συνεπώς η f είναι 1-1 και έτσι αντιστρέφεται. Θέτουμε στην (1) όπου x το $f^{-1}\left(x\right)$ και όπου y το $f^{-1}(y)$, τότε παίρνουμε:

$$f(x+y)=f^{-1}(x)+y+2010,\ x,\,y\in\mathbb{R}$$

τώρα για $y=-x$ προκύπτει

$$f(0)=f^{-1}(x)-x+2010$$

ή

$$f^{-1}(x)=x+f(0)-2010,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Εύκολα τώρα βρίσκουμε ότι

$$f(x)=x+2010-f(0),x\ \text{ στο }\ \mathbb{R}$$

Για $x=0$ βρίσκουμε $f(0)=1005$ και έτσι τελικά

$$f\left(x\right)=x+1005\ \ x\in\mathbb{R}$$

Προφανώς η f επαληθεύει την (1) Από (1),(2) προκύπτει

$$y+f(x)=x+f(y)\ \ (3)\ \ x,\,y\in\mathbb{R}$$

Έστω $y\in\mathbb{R}$ πρέπει η $f(x)=y$ να έχει λύση ως προς x, που είναι το $x=2y-f(y)$ όπως διαπιστώνουμε με την βοήθεια της (3).

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη)* *Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει*

$$\frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}-1\geq x$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=13654

Λύση (Χρήστος Κυριαζής)

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}+1<x+1<\frac{\pi}{2}+1$$

Τώρα αν

$$-\frac{\pi}{2}+1<x+1\leq 0$$

η δοθείσα ισχύει μιάς και

$$e^x>0,\quad \sigma\upsilon\nu x>0,\quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\,-1\right]$$

Αν

$$0<x+1<\frac{\pi}{2}+1$$

τότε:

$$e^x\geq x+1(x+1>0)$$
$$\sigma\upsilon\nu x>0\Rightarrow\tfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}>0$$

πάντα στο διαστημα μας

$$(-1,\frac{\pi}{2})$$

οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο. Αρα για κάθε

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

ισχύει η δοθείσα ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτάθηκε από τον Κώστα Τηλέγραφο) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$ που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $(0, 3)$. Αν ισχύει $f(0) = f(3) = 0$ και $f(1)f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $k \in [0, 3)$ τέτοιο ώστε*

$$f(k)f'(k) + \left[f'(k)\right]^2 - 2k = 0$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=13312

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) αν $g(x) = f(x)f'(x) + (f'(x))^2 - 2x$ τότε η g είναι συνεχής στο $[0, 3]$ Από Rolle για την f υπάρχει

$$m \in (0, 3) : f'(m) = 0 \Rightarrow g(m) = -2m < 0$$

$$g(0) = (f'(0))^2 \geq 0$$

αν $f'(0) = 0$ το ζητούμενο $k = 0$ αν $f'(0) \neq 0$ τότε από θεώρημα Bolzano για την g στο $[0, m]$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

Σημείωση: *Δεν χρησιμοποιήθηκε το αλλο δεδομενο $f(1)f(2) < 0$ και υπέθεσα ότι υπάρχει παράγωγος στο 0.*

Αν δεν υπάρχει η $f'(0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $f(1)f(2) < 0$ για να δείξουμε το ζητούμενο Είναι

$$g(x) \geq f(x)f'(x) - 2x = 1/2(f(x) - 2x^2)'$$

έστω

$$(f(x) - 2x^2)' > 0$$

στο $(0, 3)$ τότε η

$$h(x) = (f(x) - 2x^2)$$

θα έπρεπε να είναι γν. αύξουσα Από Bolzano για την f στο $[1, 2]$ υπάρχει $p \in (1, 2) : f(p) = 0$ άρα

$$f^2(p) - 2p^2 < f^2(3) - 2.3^2$$

δηλαδή $p^2 > 9$ άτοπο αρα δεν είναι αύξουσα οπότε υπάρχουν

$$a < b : h(a) > h(b)$$

συνεπώς από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $q : h'(q) \leq 0$ και επειδή η h' είναι συνεχής $h'(x)/2 \leq 0$ κοντά στο q άρα και $g(x) \leq 0$ κοντά στο q . Με θεώρημα Bolzano για την g στο 0 και κοντά στο q καταλήγουμε στο ζητούμενο

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτάθηκε απο τον Βασίλη Μαυροφρύδη) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[a, b]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε x του $[a, b]$. Ορίζουμε $F(x) = \int_a^b |f(t) - f(x)|\,dt$. Να βρείτε την θέση ακροτάτου της F και το είδος του.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=4746

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Είναι

$$F(x) = \int_a^x |f(t) - f(x)|dt + \int_x^\beta |f(t) - f(x)|dt$$

με x στο εσωτερικό του $[a, b]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Άρα, αφού στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $a \leq t \leq x$, ενώ στο δεύτερο $x \leq t \leq \beta$, εύκολα λόγω της μονοτονίας της f, η F γίνεται

$$F(x) = \int_a^x (f(x) - f(t))\,dt + \int_x^\beta (f(t) - f(x))\,dt$$

ή καλύτερα

$$F(x) = f(x)(x - a) - \int_a^x f(t)dt + \int_x^\beta f(t)dt - f(x)(\beta - x).$$

Η F είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$F'(x) = f'(x)(2x - a - \beta).$$

Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η F έχει ελάχιστο στο $x = (a+b)/2$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτάθηκε απο τον Βασίλη Μαυροφρύδη) Έστω η συνάρτηση*

$$f : [0, +\infty) \to R$$

με συνεχή παράγωγο. Να δείξετε ότι

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f(t) + f'(t)|\, dt$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=4654

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt && \Leftrightarrow \\
e^x|f(x)| &\leq e^x|f(0)| + e^x \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt && \Leftrightarrow \\
e^x|f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x e^t|f(t) + f'(t)| dt && \Leftarrow \\
e^x|f(x)| &\leq |f(0)| + \int_0^x \left|[f(t)e^t]'\right| dt && \overset{\boxed{*}}{\Leftrightarrow} \\
e^x|f(x)| &\leq |f(0)| + \left|\int_0^x [f(t)e^t]' dt\right| && \Leftrightarrow \\
e^x|f(x)| &\leq |f(0)| + |e^x f(x) - f(0)|
\end{aligned}$$

που ισχύει.

$\boxed{*}$ Για $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχή, είναι

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Ένας τετραψήφιος αριθμός* $\overline{ABAB}$ *πολλαπλασιάζεται με τον τριψήφιο αριθμό* $\overline{CCC}$ *και δίνει γινόμενο τον αριθμό* 639027.

Πόσο είναι το άθροισμα $A+B+C$ *των ψηφίων* A, B, C;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=12719

Λύση (Δημήτρης Ιωάννου) Έχουμε:

$$(1000A+100B+10A+B)(100C+10C+C) = 111{\cdot}3{\cdot}19{\cdot}101$$

και άρα

$$101(10A + B) \cdot 111C = 111 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 101,$$

οπότε

$$(10A + B)C = 3 \cdot 19$$

Αφού πρόκειται για ψηφία, έχουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $C = 3$ και $10A + B = 19$, απ' όπου έπεται ότι $A = 1$ και $B = 9$.

2η περίπτωση: $C = 1$ και $10A + B = 57$, απ' όπου προκύπτει $A = 5$ και $B = 7$ (αφού τα A και B είναι ψηφία)

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, το ζητούμενο άθροισμα είναι $A + B + C = 13$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτάθηκε από τον Γιάννη Τσόπελα) Να λυθεί στους πραγματικούς το σύστημα :*

$$\begin{aligned} x + y &\geq 1 \\ x^2 + xy + y^2 &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=13221

Λύση 1 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Θέτουμε

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)\,.$$

Τότε

$$x + y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \geqslant 1$$
$$\Rightarrow a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

και

$$x^2 + y^2 + xy \leqslant \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)(a+b) \leqslant \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \leqslant \frac{2}{3}$$

δηλαδή

$$\frac{2}{3} \geqslant \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{2}b^2,$$

που είναι αδύνατο.

Μια δεύτερη προσέγγιση (Γεωμετρικότερη).

Με στροφή του συστήματος αξόνων κατά $\frac{\pi}{4}$, στο νέο σύστημα συντεταγμένων, η σχέση $x^2 + y^2 + xy \leqslant \frac{2}{3}$ παριστά το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ που είναι εσωτερικά της έλλειψης $\frac{x^2}{4/9} + \frac{y^2}{4/3} = 1$, ενώ η σχέση $x + y \geqslant 1$ παριστά τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Τα δύο χωρία δεν έχουν κοινά σημεία. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Αφού δεν μπορεί να ισχύουν οι εξισώσεις του συστήματος και τα x, y να είναι και τα δύο μή θετικά, έχουμε:

Αν το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση, τότε έστω

$$x > 0 \Rightarrow x^2 + xy \geqslant x \geqslant 1 - y \Rightarrow y^2 - y + \frac{1}{3} \leqslant 0,$$

με $\Delta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} < 0$ άτοπο.

Λύση 3 (Γιάννης Τσόπελας) Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί x, y που να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x + y \geq 1, \quad x^2 + y^2 + xy \leq \frac{2}{3}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$x^2 + x(y-1) + y^2 - y + \frac{1}{3} \leq 0 \quad (1)$$

Είναι

$$\Delta = (y-1)^2 - 4\left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right)$$
$$= -3y^2 + 2y - \frac{1}{3}$$
$$= -\frac{1}{3}(3y-1)^2.$$

Αν

$$y \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 + x(y-1) + y^2 - y + \frac{1}{3} > 0,$$

άτοπο. Επομένως $y = \frac{1}{3}$. Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε :

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \leq 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 \leq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Τελικά, είναι $x + y = \frac{2}{3}$ που αντιφάσκει με την $x + y \geq 1$.

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in \mathbb{Q} \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

(α) η f είναι 1-1

(β) η f είναι επί

(γ) $a_1 = a_2 = 0, b_1b_2 \neq 0, \frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}$ και $\frac{c_1 - c_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=8128

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Για το $(3) \implies (2), (1)$:

Έστω οτι ισχύει το (3). Ο κάθε κλάδος της συνάρτησης, ως γραμμικός, θα είναι 1-1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει είτε $\frac{x - c_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$ είτε $\frac{x - c_2}{b_2} \notin \mathbb{Q}$ (ακριβώς ένα από τα δύο, αφού $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{c_2-c_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$) κι έτσι η συνάρτηση θα είναι 1-1 και επί.

Για το $2 \implies 3$:

Έστω ότι η συνάρτηση είναι επί. Πρέπει να ισχύει $a_2 = 0,\ b_2 \neq 0$, αλλιώς μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων μένει έξω από το πεδίο τιμών της συνάρτησης (αυτά που δεν καλύπτονται από την παραβολή και δεν ανήκουν στο αριθμήσιμο πεδίο τιμών του πρώτου κλάδου). Πρέπει όμως να είναι και $a_1 = 0,\ b_1 \neq 0$, αλλιώς τα σημεία x με $\frac{x-c_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$ που είναι εκτός του πεδίου τιμών της παραβολής δεν ανήκουν στο πεδίο τιμών.

Για κάθε x πρέπει να ισχύει είτε $\frac{x-c_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$ είτε $\frac{x-c_2}{b_2} \notin \mathbb{Q}$ (τουλάχιστον ένα από τα δύο). Θέτοντας $x = c_2$ βλέπουμε ότι $\frac{c_2-c_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$. Θέτοντας επίσης $x = c_2 + b_2$ διαπιστωνουμε οτι $\frac{b_2}{b_1} \in \mathbb{Q}$.

Για το $1 \implies 3$:

Έστω ότι η συνάρτηση είναι 1-1. Πρέπει να είναι $a_2 = 0,\ b_2 \neq 0$, αλλιώς, λόγω αριθμησιμότητας των ρητών, θα υπάρχουν οπωσδήποτε δύο άρρητοι με ίσες τιμές.

Για να διατηρήσουμε το 1-1 μεταξύ των κλάδων πρέπει, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ να ισχύει $\frac{a_1 r^2 + b_1 r + c_1 - c_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$. Θέτοντας $r = 0$ έχουμε $\frac{c_1 - c_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, ενώ θέτοντας $r = \pm 1$ έχουμε $\frac{a_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{Q}$. Αλλά, αν $a_1 \neq 0$, για να διατηρήσουμε το 1-1 στον πρώτο κλάδο πρέπει να έχουμε τ ους a_1, b_1 ασύμμετρους. Ετσι, έπεται ότι $a_1 = 0, b_1 \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτάθηκε από τον Δημήτρη Χριστοφίδη) Δίνονται n σημεία πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου. Ενώνουμε όλα τα σημεία μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα. Να βρεθεί σε πόσα χωρία χωρίζεται το εσωτερικό του κύκλου αν γνωρίζουμε πως δεν υπάρχουν τρία από τα ευθύγραμμα τμήματα που να έχουν κοινό σημείο τομής.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=6120

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Όπως είναι γνωστό για τα κυρτά πολύεδρα του χώρου ισχύει ο τύπος του Ευλερ $K + E = A + 2$, όπου K, E, A ο αριθμός των κορυφών, εδρών και ακμών αντίστοιχα. Στο επίπεδο ισχύει ο τύπος $K + E = A + 1$, οπότε $E = A - E + 1$.

[Για να το δείτε αυτό διαλέξτε μία οποιαδήποτε κορυφή και προβάλετε πάνω στο επίπεδο κάποιας έδρας, το πολύεδρό σας. Τότε το μόνο που θα συμβεί είναι να έχουμε ελάττωση των εδρών κατά μία ενώ τα υπόλοιπα θα παραμείνουν αμετάβλητα (φυσικά λόγω του προβλήματος, δεν θα έχουμε συμπτώσεις εδρών, κορυφών ή ακμών-παίρνουμε το μέγιστο πλήθος τους)].

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε το μέτρημα:

Κορυφές (Κ) : n όλα τα σημεία + $\binom{n}{4}$ τα εσωτερικά σημεία [Παρατηρήστε ότι 4 σημεία του κύκλου ορίζουν ένα εσωτερικό σημείο τομής αυτό που τέμνονται οι διαγώνιες, (το οποίο διαιρεί κάθε μία διαγώνιο σε δύο τμήματα - αυτό χρειάζεται αμέσως παρακάτω)].

Ακμές (Α) : n τα τόξα του κύκλου + $\binom{n}{2}$ οι πλευρές μαζί με τις διαγώνιες + $2 \cdot \binom{n}{4}$ τα εσωτερικά τμήματα.

Άρα από τον τύπο του Euler έχουμε

$$E = n + \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{4} - n - \binom{n}{4} + 1,$$

οπότε

$$E = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1.$$

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη-ΕΜΕ 1985) Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $L(k)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $[x] = kx - 1985$. Να αποδειχθεί ότι:*

(i) Αν $k > 2$ τότε $1 \leq L(k) \leq 2$.

(ii) Αν $0 < k < \frac{1}{1986}$, τότε $L(k) = 0$.

(iii) Υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε $L(k) = 1985$.

([...]=ακέραιο μέρος)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=75041

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης)

(i) Έστω $k > 2$ και $x \in \mathbb{R}$ ώστε
$$[x] = kx - 1985.$$
Τότε από τη σχέση
$$[x] \leq x < [x] + 1$$
προκύπτει ότι
$$\frac{1985 - k}{k - 1} < [x] \leq \frac{1985}{k - 1}.$$
Οι αριθμοί $\frac{1985 - k}{k - 1}, \frac{1985}{k - 1}$ διαφέρουν κατά $\frac{k}{k - 1}$. Όμως για $k > 2$ είναι $1 < \frac{k}{k - 1} < 2$. Άρα στο διάστημα $\left(\frac{1985 - k}{k - 1}, \frac{1985}{k - 1}\right]$ ανήκει τουλάχιστον ένας ακέραιος αλλά το πολύ 2 ακέραιοι. Άρα υπάρχουν το πολύ 2 δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει το $[x]$, άρα και το x. Έστω α ένας ακέραιος που ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1985 - k}{k - 1}, \frac{1985}{k - 1}\right]$.

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός
$$x_0 = \frac{\alpha}{k} + \frac{1985}{k}$$
είναι λύση της εξίσωσης. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $[x_0] = \alpha$. Αυτό για να ισχύει είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\alpha \leq x_0 < \alpha + 1$. Η τελευταία είναι αληθής λόγω της επιλογής του α στο διάστημα $\left(\frac{1985 - k}{k - 1}, \frac{1985}{k - 1}\right]$. Άρα η εξίσωση έχει το πολύ δύο λύσεις και τουλάχιστον μία.

(ii) Έστω $0 < k < \frac{1}{1986}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε
$$[x] = kx - 1985.$$
Τότε από τη σχέση
$$[x] \leq x < [x] + 1$$
προκύπτει ότι
$$-\frac{1985}{1 - k} \leq [x] < \frac{k - 1985}{1 - k}.$$
Από τη σχέση $0 < k < \frac{1}{1986}$ είναι εύκολο να δείξουμε ότι
$$-1986 < -\frac{1985}{1 - k} \leq [x] < \frac{k - 1985}{1 - k} < -1985$$
που είναι άτοπο.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

(iii) Έστω $k = \frac{1985}{1986}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ ώστε
$$[x] = kx - 1985.$$
Τότε όπως και στο 2) προκύπτει ότι
$$-\frac{1985}{1 - k} \leq [x] < \frac{k - 1985}{1 - k}$$
οπότε
$$-1985 \cdot 1986 \leq [x] < 1985 - 1985 \cdot 1986.$$
Στο διάστημα αυτό περιέχονται ακριβώς 1985 ακέραιοι. Άρα η εξίσωση μπορεί να έχει το πολύ 1985 λύσεις. Έστω α ένας ακέραιος που ανήκει στο διάστημα $[-1985 \cdot 1986, 1985 - 1985 \cdot 1986)$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός $x_0 = \frac{\alpha}{k} + \frac{1985}{k}$ είναι λύση της εξίσωσης. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $[x_0] = \alpha$. Αυτό για να ισχύει είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\alpha \leq x_0 < \alpha + 1$. Αυτό είναι αληθές λόγω της επιλογής του α στο διάστημα $[-1985 \cdot 1986, 1985 - 1985 \cdot 1986)$. Άρα $L\left(\frac{1985}{1986}\right) = 1985$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτάθηκε από τον Σπύρο Καπελλίδη-ΕΜΕ 1984) Να εξετάσετε αν υπάρχει ένα πεντάγωνο (όχι κατανάγκη επίπεδο) που οι πλευρές του να είναι ίσες και οι γωνίες του ορθές.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=74877

Λύση 1 (Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο πεντάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5$. Θέτουμε $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{A_3A_4}$, $\vec{v}_4 = \overrightarrow{A_4A_5}$ και $\vec{v}_5 = \overrightarrow{A_5A_1}$, οπότε είναι $\sum_{i=1}^{5} \vec{v}_i = \vec{0}$ (1), $|\vec{v}_i| = r > 0$ για $i = 1, \ldots, 5$ και $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 = \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_5 = \vec{v}_5 \cdot \vec{v}_1 = 0$.

Θέτουμε $a_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$, $a_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4$, $a_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4$, $a_4 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_5$, $a_5 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_5$. Υψώνοντας την (1) στο τετράγωνο, βρίσκουμε ότι $\sum_{i=1}^{5} a_i = -\frac{5r^2}{2}$ (2). Λύνοντας την (1) ως προς $\vec{v}_i$, για $i = 1, \ldots, 5$ και υψώνοντας στο τετράγωνο βρίσκουμε ότι το άθροισμα κάθε τριών από τους a_i είναι ίσο με $-\frac{3r^2}{2}$. Επομένως, λόγω της (2), το άθροισμα κάθε δύο από τους a_i είναι ίσο με $-r^2$, οπότε τελικά είναι: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = -\frac{r^2}{2}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ δεν είναι συνεπίπεδα, γιατί $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$ και τα $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ δεν είναι παράλληλα (αφού $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -\frac{r^2}{2} \neq \pm r^2$). Άρα, τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$, οπότε θα υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3 τέτοιοι, ώστε $\vec{v}_4 = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ (3). Πολλαπλασιάζοντας την (3) διαδοχικά με $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ προκύπτει το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} = x_1 - \frac{x_3}{2} \\ -\frac{1}{2} = x_1 \\ 0 = -\frac{x_1}{2} + x_3 \end{array} \right\}$, το οποίο έχει λύση $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, οπότε $\vec{v}_4 = -\frac{2}{3}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 - \frac{1}{3}\vec{v}_3$ (4). Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (4) με $\vec{v}_5$, βρίσκουμε ότι $0 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{6}$, δηλαδή $r = 0$, άτοπο. Ώστε, τέτοιο πεντάγωνο δεν υπάρχει.

Λύση 2 (Γιώργος Μπαλόγλου) Έστω $ABCDE$ το ζητούμενο πεντάγωνο, με $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = 1$ και $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = 90°$. Θα δείξω ότι $\angle EAB = 60$.

Επειδή $\angle BCD = \angle CDE = 90°$, $|CD| = 1, |BC| = |DE| = 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα B και E κείνται στις περιφέρειες των βάσεων, ακτίνος 1 και κέντρων C, D, αντίστοιχα, κυλίνδρου ύψους 1 που έχει ως άξονα την CD. Επειδή $\angle ABC = \angle DEA = 90°$, τα μοναδιαία τμήματα AB και AE εφάπτονται του κυλίνδρου στα B και E, αντίστοιχα.

Παρατηρούμε εδώ ότι αν X είναι σημείο στην περιφέρεια της άνω βάσης τυχόντος κυλίνδρου και Y είναι σημείο τέτοιο ώστε το YX να είναι σταθερού μήκους ευθύγραμμο τμήμα εφαπτόμενο του κυλίνδρου στο X, τότε η απόσταση του Y από τον άξονα του κυλίνδρου είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση της γωνίας YXX', όπου X' το μοναδικό σημείο στην περιφέρεια της κάτω βάσης για το οποίο η XX' είναι παράλληλη προς τον άξονα του κυλίνδρου ($\star$).

Από την παραπάνω παρατήρηση προκύπτουν άμεσα, λόγω $|AB| = |AE| = 1$, οι $CD//BE$ και $\angle ABE = \angle AEB$: συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο EBA είναι ισόπλευρο και συνεπώς $\angle EAB = 60°$. (Είναι δηλαδή το $ABCDE$ 'σύνθεση' ενός τετραγώνου ($BCDE$) και ενός ισοπλεύρου τριγώνου (EBA) ορθογωνίων προς άλληλα.)

($\star$): για μια αυστηρή απόδειξη αυτής της έμπειρικής' παρατήρησης ας προσεχθεί ότι αν Y', Y'' είναι οι προβολές του Y στις XX' και ΚΛ, αντίστοιχα (όπου ΚΛ ο άξονας του κυλίνδρου), τότε η YY' εφάπτεται του κυλίνδρου στο Y' και επομένως $|YY''|^2 = |YY'|^2 + |Y'Y''|^2$, με $|Y'Y''|$ σταθερό (ίσο προς την ακτίνα του κυλίνδρου) και $|YY'|$ αύξουσα συνάρτηση της γωνίας $\angle YXY' = \angle YXX'$ (καθότι $|YX|$ σταθερό).

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτάθηκε από τον Λεωνίδα Λαμπρόπουλο-Από φυλλάδιο ασκήσεων του Χρήστου Αθανασιάδη.) Έστω γραμμικός μετασχηματισμός T που δρα πάνω σε ένα n-διάστατο διανυσματικό χώρο. Αν έχει $n+1$ ιδιοδιανύσματα με την ιδιότητα οποιαδήποτε n από αυτά να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι $T = \lambda I$ για κάποια σταθερά λ.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=5627

Λύση 1 (Ηλίας Ζαδίκ) Έστω ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $x_1, \ldots, x_{n+1}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ αντίστοιχα. Τότε υπάρχουν $a_2, \ldots, a_{n+1}$ κανένα από τα οποία δεν είναι μηδέν ώστε:

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n+1} a_i x_i.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον T και έχουμε

$$\sum_{i=2}^{n+1} \lambda_1 a_i x_i = \lambda_1 x_1 = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i a_i x_i$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του μετασχηματισμού είναι ίσες με λ_1 και άρα έπεται το ζητούμενο.

Λύση 2 (Νίκος Κολλιόπουλος) Θεωρούμε όλες τις διαγωνοποιήσεις $A = P_k D_k {P_k}^{-1}$ όπου για $k = n+1$ έχουμε την διαγωνοποίηση ως προς τα πρώτα n ιδιοδιανύσματα και για $k = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε τη διαγωνοποίηση οπου αντικαθιστούμε το k-οστό ιδιοδιάνυσμα και την k-οστή ιδιοτιμή με το $(n+1)$-οστό ιδιοδιάνυσμα και την $(n+1)$-οστή ιδιοτιμή αντίστοιχα. Τότε παίρνοντας τα ίχνη προκύπτει άμεσα ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες.

Λύση 3 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Για κάθε ιδιοτιμή λ, ο ιδιοχώρος του λ είναι ο $E_\lambda = \{v : Tv = \lambda v\}$. Είναι εύκολο να δειχθεί πως το E_λ είναι διανυσματικός χώρος. Η διάσταση του χώρου ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα του λ και είναι γνωστό ότι είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα του λ, την πολλαπλότητα δηλαδή του λ ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T. Ισχύει λοιπόν ότι

$$\sum_\lambda \dim(E_\lambda) \leqslant n.$$

Αφού έχουμε $n+1$ διανύσματα, από περιστεροφωλιά υπάρχει λ με $\dim(E_\lambda) = k$ αλλά τουλάχιστον $k+1$ από τα αρχικά διανύσματα ανήκουν στον E_λ. Αφού όμως κάθε n διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, πρέπει $k = n$. Άρα $E_\lambda = V$, όπου V ο αρχικός n-διάστατος χώρος, και άρα $T = \lambda I$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτάθηκε από τον Βασίλη Μαυροφρύδη) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ και a ένας θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε $f(f(x)) = x^a$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι*

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \frac{2a-1}{a^2+6a-3}.$$

Η άσκηση είναι από τον Mihai Piticari.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=6112

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Με στοιχειώδεις μεθόδους βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Επιστρατεύουμε ολοκλήρωση Stieltjes

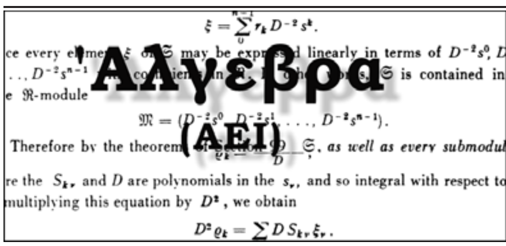
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f[f(x)]\,df(x) = \int_0^1 x^a\,df(x) = 1 - \int_0^1 f(x)\,dx^a = 1 - a\int_0^1 x^{a-1} f(x)\,dx,$$

δηλαδή

$$\int_0^1 (1 + ax^{a-1}) f(x)\,dx = 1,$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{\int_0^1 (1+ax^{a-1})^2\,dx} = \frac{2a-1}{a^2+6a-3}.$$



Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτάθηκε από τον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο) Έστω p πρώτος και έστω A ένας $(p-1)\times(p-1)$ πίνακας επί του σώματος των ρητών τέτοιος ώστε $A^p = I \neq A$. Να δειχθεί ότι αν $f(x)$ είναι ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο του $p-1$, τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι αντιστρέψιμος.*
(Είναι το πρόβλημα 1425 του Mathematics Magazine.)

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=10347

Λύση 1 (Δημήτρης Σκουτέρης) Το ελάχιστο πολυώνυμο της p-οστής ρίζας της μονάδας επί του $\mathbb{Q}$, για p πρώτο, είναι το κυκλοτομικό πολυώνυμο

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1.$$

Αφού ο A ειναι ρητός και $(p-1)\times(p-1)$, οι ιδιοτιμές του θα είναι υποχρεωτικά όλες οι p-οστές ρίζες της μονάδας εκτός του 1 (η άλλη περίπτωση είναι η $A = I$ που απορρίπτεται). Αφού καμία από αυτές τις ιδιοτιμές δεν είναι ρίζα ρητού πολυωνύμου βαθμού μικρότερου του $p-1$, κανένα από τα πολυώνυμα $f(A)$ δεν θα έχει μηδενική ιδιοτίμη και έτσι είναι όλα αντιστρέψιμα.

Λύση 2 (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Εφ' όσον $A^p - I = 0$, το ελάχιστο πολυώνυμο $p(x)$ του A διαιρεί το $x^p - 1$. Είναι

$$x^p - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}).$$

Αφού το $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$ (από το κριτήριο του Eisenstein) και αφού $A \neq I$ και $\deg(p(x)) \leq p-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^{p-1}.$$

Οπότε αν $f(x)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές και βαθμό μικρότερο ή ίσο του $p-1$, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $f(x)$ και $p(x)$ είναι το μοναδιαίο πολυώνυμο. Άρα

$$g(x)f(x) + h(x)p(x) = 1$$

για κάποια πολυώνυμα $g(x), h(x)$ επί του $\mathbb{Q}$.

Συνεπώς, $g(A)f(A) + h(A)p(A) = I$.

Αφού $p(A) = 0$, παίρνουμε $g(A)f(A) = I$, κι άρα ο $f(A)$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $g(A)$.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτάθηκε από τον Ηράκλειο) Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο*

$$x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x], \text{ όπου } p \text{ πρώτος,}$$

είναι ανάγωγο αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ακέραιοι a, b με $a + b = p$ και $ab \equiv 1 \bmod p$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=11962

Λύση (Στράτης Αντωνέας) Υποθέτουμε ότι το

$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

είναι ανάγωγο. Αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a + b = p$ και $ab \equiv 1 \bmod p$, τότε

$$f(x) = x^2 + 1 = x^2 + px + 1 = x^2 + (a+b)x + ab = \\ = (x+a)(x+b),$$

άτοπο αφού το $f(x)$ είναι ανάγωγο.

Έστω ότι δεν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ με

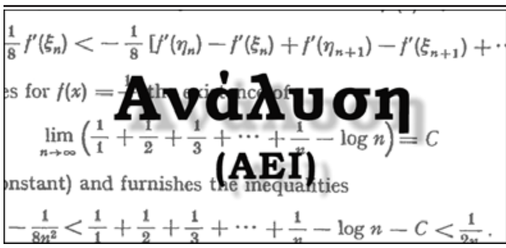
$$p = a + b \text{ και } ab \equiv 1 \bmod p.$$

Αν το $f(x) = x^2 + 1$ έχει ρίζες στο $\mathbb{Z}_p[x]$, τις r, s, τότε

$$r + s \equiv 0 \bmod p \text{ και } rs \equiv 1 \bmod p.$$

Υπάρχουν $a, b \in \{0, 1, \ldots p-1\}$ με $a \equiv r \bmod p$ και $b \equiv s \bmod p$. Τότε $a + b \equiv r + s \equiv 0 \bmod p$ και άρα $a + b = p$ και $ab \equiv rs \equiv 1 \bmod p$, άτοπο.

Αφού το $f(x)$ είναι δευτέρου βαθμού και δεν έχει ρίζες, θα είναι ανάγωγο.



Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτάθηκε από τον Στάθη Καραδήμα) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x)}{3 + 2\cos(nx)} dx.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=4428

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης) Η συνάρτηση $\varphi(x) = \cos^m(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ αναπτύσσεται σε σειρά συνημίτονων διότι είναι άρτια. Μας ενδιαφέρει ο σταθερός όρος. Δηλαδή αν $\varphi(x) = \cos^m(x) = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \cos(ix)$ μας ενδιαφέρει ο a_0.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν $m = 2k + 1$: περιττός θα έχουμε

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos^{2k+1}(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{2k+1}(u)\,du \overset{u=\pi-x}{=}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1}(x)\,dx = 0, \text{ οπότε}$$

$$\int_0^{\pi} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(ix)\,dx = \ldots = \pi\, a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a_0 = 0\,.$$

• Αν $m = 2k$: άρτιος θα έχουμε

$$\int_0^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos^{2k}(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{2k}(u)du \overset{u=\pi-x}{=}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x)\,dx =$$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x)\,dx \overset{\cos(x)=u}{=}$$

$$2\int_0^1 \frac{u^{2k}}{\sqrt{1-u^2}}\,du \overset{u=\sqrt{y}}{=} \int_0^1 \frac{y^k}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}}dy =$$

$$\int_0^1 y^{k+\frac{1}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy = B\big(k+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\big) =$$

$$\frac{\Gamma\big(k+\frac{1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(k+1\big)} = \frac{\frac{(2k)!}{4^k\,k!}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{k!} = \frac{\pi\,(2k)!}{4^k\,(k!)^2}.$$

Όμως $\displaystyle\int_0^{\pi} a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\cos(ix)\,dx = \int_0^{\pi} a_0\,dx = \pi\,a_0\,,$

που σημαίνει $a_0 = \dfrac{(2k)!}{4^k\,(k!)^2}\,.$

Άρα αν $\varphi(x) = \cos^m(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\cos(ix)$, προκύπτει

$$\begin{cases} a_0 = 0\,, & \text{αν } m = 2k+1 \\ a_0 = \dfrac{(2k)!}{4^k\,(k!)^2}\,, & \text{αν } m = 2k \end{cases}$$

Επίσης από το λήμμα Riemann Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\cos(nx)\,dx = 0\,.$$

Τότε $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{3+2\,\cos(nx)}\,dx = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{f(x)}{1+\frac{2}{3}\,\cos(nx)}\,dx =$

$$\frac{1}{3}\int_a^b f(x)\,\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\,\frac{2^k}{3^k}\,\cos^k(nx)\right)dx =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\,\frac{2^k}{3^k}\,\int_a^b f(x)\,\cos^k(nx)\,dx\right).$$

Οπότε αν $k = 2m+1$: περιττός, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\cos^k(nx)\,dx =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\cos(inx)\,dx = 0 \quad \text{και}$$

αν $k = 2m$: άρτιος, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\cos^k(nx)\,dx =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\cos(inx)\right)dx = a_0\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{(2m)!}{4^m\,(m!)^2}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Τελικά $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{f(x)}{3+2\,\cos(nx)}\,dx =$

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\,\frac{2^k}{3^k}\,\int_a^b f(x)\,\cos^k(nx)\,dx\right) \overset{k=2m}{=}$$

$$\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left((-1)^{2m}\,\frac{2^{2m}}{3^{2m}}\,\frac{(2m)!}{4^m\,(m!)^2}\,\int_a^b f(x)\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{3}\int_a^b f(x)\,dx\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(2m)!}{9^m\,(m!)^2}\right).$$

Όμως θεωρείται γνωστό ότι $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(2m)!}{(m!)^2}\,x^m\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$

Συνεπώς $\displaystyle\frac{1}{3}\int_a^b f(x)\,dx\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(2m)!}{9^m\,(m!)^2}\right) =$

$\displaystyle\frac{1}{3}\int_a^b f(x)\,dx\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_a^b f(x)\,dx$, δηλαδή

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{f(x)}{3+2\,\cos(nx)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_a^b f(x)\,dx}$$

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτάθηκε από τον Αναστάσιο Κοτρώνη)* *Έστω $a > 0$. Ας βρεθεί, αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{1\le k\le n^a}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=10924

Λύση (Αναστάσιος Κοτρώνης, Μιχάλης Λάμπρου)

• Για $a \ge 1$: Καθώς $-\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k = \ln(1-x)$ για $|x| < 1$, έχουμε ότι η δοθείσα παράσταση, πριν πάρουμε το όριο ως προς n, ισούται με

$$-\frac{1}{\ln n}\,\ln\left(1-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{\ln n}\,\mathcal{O}\left((1-1/n)^{n^a}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{\ln n}\,\mathcal{O}\left((1-1/n)^{n^a}\right).$$

Τώρα, επειδή $a \ge 1$, ισχύει

$(1-1/n)^{n^a} \le (1-1/n)^n \to 1/e$, οπότε

$$1 + \frac{1}{\ln n}\,\mathcal{O}\left((1-1/n)^{n^a}\right) \to 1.$$

• Για $0 < a < 1$: $\displaystyle\frac{1}{\ln n}\sum_{1\le k\le n^a}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k =$

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{k(k-1)}{n^2}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{k-1}{n^2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\frac{1}{k}-\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\mathcal{O}\left(\frac{k-1}{n^2}\right)\overset{[n^a]<n}{=}$$

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[n^a]}\frac{1}{k}-\frac{[n^a]}{n\ln n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\underbrace{\overset{n\to+\infty}{\sim}}_{\boxed{*}}$$

$$\frac{\ln[n^a]}{\ln n}-\frac{[n^a]}{n\ln n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\underbrace{\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}}_{\boxed{**}}a.$$

$\boxed{*}$ Από Cesaro - Stolz έπεται ότι

$\dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{\ln n}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ δηλαδή

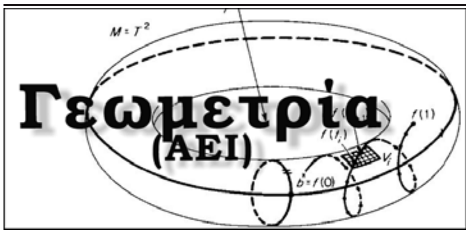
$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\overset{n\to+\infty}{\sim}\ln n,$

$\boxed{**}$ $n^a\leq[n^a]\leq n^a+1\Rightarrow\dfrac{n^a}{n\ln n}\leq\dfrac{[n^a]}{n\ln n}\leq\dfrac{n^a+1}{n\ln n}.$

Άρα από παρεμβολή είναι $\dfrac{[n^a]}{n\ln n}\to 0$ και επιπλέον

$a=\dfrac{\ln n^a}{\ln n}\leq\dfrac{\ln[n^a]}{\ln n}\leq\dfrac{\ln(n^a+1)}{\ln n}\overset{DLH}{\longrightarrow}a.$

Τελικά $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{1\leq k\leq n^a}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=\min\{1,a\}.$



Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτάθηκε από τον Stuart Clark) Τα διανύσματα θέσεως των σημείων A,B, C είναι αντίστοιχα* $<1,\,1,\,1>$, $<1,\,-1,\,2>$, $<0,\,2,\,-1>$. *Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο που ορίζεται από το ABC και κάθετο στο διάνυσμα* $<1,\,0,\,1>$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&t=13048

Λύση (Γιώργος Μπαλόγλου) Το διάνυσμα που ζητάμε, αρχικά όχι κατ' ανάγκην μοναδιαίο, θα πρέπει ταυτόχρονα να είναι κάθετο στο $\langle 1,\,0,\,1\rangle$ και σε οποιοδήποτε διάνυσμα κάθετο στο ABC, όπως ας πούμε το

$$AB\times AC=$$
$$(\langle 1,\,-1,\,2\rangle-\langle 1,\,1,\,1\rangle)\times(\langle 0,\,2,\,-1\rangle-\langle 1,\,1,\,1\rangle)=$$
$$\langle 0,\,-2,\,1\rangle\times\langle -1,\,1,\,-2\rangle=$$
$$\langle 3,\,-1,\,-2\rangle$$

και στο $\langle 1,\,0,\,1\rangle$.
Με δεύτερη εφαρμογή εξωτερικού γινομένου προκύπτει ότι ένα διάνυσμα κάθετο στα $\langle -1,\,-1,\,-2\rangle$ και $\langle 1,\,0,\,1\rangle$ είναι το $\langle 1,\,0,\,1\rangle\times\langle 3,\,-1,\,-2\rangle=\langle 1,\,5,\,-1\rangle$.
Διαιρώντας το $\langle 1,\,5,\,-1\rangle$ δια του μέτρου του

$$\sqrt{1^2+5^2+(-1)^2}=3\sqrt{3}$$

προκύπτει το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\left\langle\frac{\sqrt{3}}{9},\,\frac{5\sqrt{3}}{9},\,-\frac{\sqrt{3}}{9}\right\rangle$$

(Η απάντηση είναι μοναδική παρά πολλαπλασιασμό επί -1.)

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτάθηκε από τον Νίκο Μαυρογιάννη) Να αποδειχθεί ότι αν*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

με
1) $f\left(\mathbf{0}\right)=\mathbf{0}$
2) $\left|f\left(\mathbf{u}\right)-f\left(\mathbf{v}\right)\right|=\left|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right|$ *για όλα τα* $\mathbf{u},\mathbf{v}$
τότε η f *είναι γραμμική.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&t=4493

Λύση 1 (Αλεξάνδρα Ζαμπετάκη) [Χρήση εσωτερικού γινομένου]

Θέλουμε να δείξουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$f((a,b)+(c,d))=f(a,b)+f(c,d)$$

και

$$f(\lambda(a,b))=\lambda f(a,b)$$

Αποδεικνύω την πρώτη ιδιότητα: Θέλω να δείξω ότι:

$$f((a,b)+(c,d))=f(a,b)+f(c,d)\Leftrightarrow$$

$$f((a,b)+(c,d))-f(a,b)-f(c,d)=0$$

Αυτό αποδεικνύεται αν δείξουμε ότι

$$|f((a,b)+(c,d))-f(a,b)-f(c,d)|=0 \Leftrightarrow$$

$$|f(a+c,b+d)-f(a,b)-f(c,d)|^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(f(a+c,b+d)-f(a,b)-f(c,d))^2=0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(a+c,b+d))+f^2(a,b)+f^2(c,d)$$

$$-2f(a,b)f(a+c,b+d)-2f(c,d)f(a+c,b+d)$$

$$+2f(a,b)f(c,d)=0 \ \ (1)$$

Όμως επίσης έχουμε ότι

$$|f(a,b)-f(c,d)|=|(a,b)-(c,d)| \Leftrightarrow$$

$$|f(a,b)-f(c,d)|^2=|(a,b)-(c,d)|^2 \Leftrightarrow$$

$$f^2(a,b)+f^2(c,d)-2f(a,b)f(c,d)=$$

$$(a,b)^2+(c,d)^2-2(a,b)(c,d) \ \ \ (2)$$

Επίσης ισχύει

$$|f(a,b)-f(0,0)|=|(a,b)-(0,0)| \Leftrightarrow$$

$$|f(a,b)-(0,0)|=|(a,b)| \Leftrightarrow$$

$$|f(a,b)|^2=|(a,b)|^2 \Leftrightarrow$$

$$|f(a,b)|^2=(a,b)(a,b) \Leftrightarrow$$

$$f^2(a,b)=a^2+b^2 \ \ \ (3)$$

Η (2) λόγω της (3) συνεπάγεται ότι

$$f(a,b)f(c,d)=(a,b)(c,d)=ac+bd \ \ \ (4)$$

Η (1) λόγω των (3),(4) γίνεται

$$(a+c)^2+(b+d)^2+a^2+b^2+c^2+d^2-$$

$$2(a+c)a-2(b+d)b-2(a+c)c-2(b+d)d+2ac+2bd=0 \Leftrightarrow$$

$$a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd+a^2+c^2+b^2+d^2$$

$$-2a^2-2ac-2b^2-2bd-2ac-2c^2-2bd-2d^2+2ac+2bd=0 \Leftrightarrow$$

$$0=0$$

που ισχύει. Ανάλογα αποδεικνύω και τη δεύτερη απαίτηση γραμμικότητας: από τις (3), (4) προκύπτει η

$$f^2(\lambda a,\ \lambda b)+\lambda^2 f^2(a,\ b)-2\lambda f(\lambda a,\ \lambda b)f(a,\ b)=0$$

Λύση 2 (Νίκος Μαυρογιάννης) [Χρήση διανυσμάτων]

Ας συμβολίσουμε με Μ′ την εικόνα του Μ μέσω της f. Είναι πάντα Α′Β′=ΑΒ.

1) Αν Α, Β διαφορετικά θα είναι και τα Α′,Β′ διαφορετικά.

2) Ξέρουμε ότι το σημείο Μ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ αν και μόνο αν ισχύει

ΜΑ+ΜΒ=ΑΒ (α)

Επομένως αν το Μ ανήκει στο ΑΒ θα ισχύει η (α) και αφού Α′Β′=ΑΒ, Μ′Α′=ΜΑ, Μ′Β′=ΜΒ θα ισχύει και

Μ′Α′+Μ′Β′=Α′Β′ (β)

Επομένως η f απεικονίζει ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα. Ειδικά απεικονίζει τα μέσα ευθυγράμμων τμημάτων σε μέσα ευθυγράμμων τμημάτων.

3) Η f θα απεικονίζει τρίγωνα σε ίσα προς αυτά τρίγωνα. Επομένως και ίσα τρίγωνα σε ίσα τρίγωνα.

4) Αν τα Α,Β,Γ,Δ είναι κορυφές παραλληλογράμμου τότε προφανώς το Α′Β′Γ′Δ′ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως

$$f\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=f\left(\vec{u}\right)+f\left(\vec{v}\right)$$

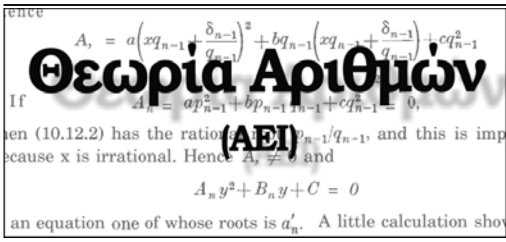
5) Ας πάρουμε δύο διάφορα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{u},\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ και $\lambda>0$ (Ο η αρχή των αξόνων). Ας πούμε ότι $\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_1}=\lambda\overrightarrow{OB}$ Τότε από τις ισότητες των τριγώνων θα είναι (η f απεικονίζει το Ο στον εαυτό του) $\mathrm{OAB}=\mathrm{OA'B'},\mathrm{OA_1B_1}=\mathrm{OA_1'B_1'}$ και επομένως από τις ιδιότητες της ομοιότητας θα είναι $A_1'B_1'=\lambda AB$ που σημαίνει ότι

$$f\left(\lambda\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\right)=\lambda f\left(\vec{u}-\vec{v}\right) \text{ (γ)}$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η παραπάνω σχέση όταν το λ είναι αρνητικό και φυσικά αφού $f(O)=O$ ισχύει και όταν το το λ είναι μηδέν. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{w}$ μπορεί να γραφεί $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$ και επομένως

$$f\left(\lambda\vec{w}\right)=\lambda f\left(\vec{w}\right) \text{ (δ)}$$

η οποία φυσικά ισχύει και όταν το διάνυσμα είναι μηδενικό. Από τις (γ), (δ) προκύπτει η γραμμικότητα.



Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτάθηκε από τον Σωτήρη Χασάπη) Να δειχθεί ότι ο αριθμός* 20801 *διαιρεί τον* $20^{15}-1$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=10981

Λύση (Νίκος Κατσίπης) Έχουμε $20801 = 11 \cdot 31 \cdot 61$, η ανάλυση του 20801 σε πρώτους παράγοντες.

▷ Το 11 διαιρεί το $20^{15}-1$, αφού

$$20^{15} = (2^5 \cdot 10^5)^3 \equiv \big((-1)(-1)\big)^3 \equiv 1 \mod 11.$$

▷ Το 31 διαιρεί το $20^{15}-1$, αφού

$$20^{15} = (4^3 \cdot 5^3)^5 \equiv (2 \cdot 1)^5 \equiv 1 \mod 31.$$

▷ Το 61 διαιρεί το $20^{15}-1$, αφού

$$20^{15} \equiv (3^4)^1 5 = 3^{60} \equiv 1 \mod 61$$

(το τελευταίο από το Θεώρημα του Fermat).

Επειδή οι $11, 31, 61$ είναι πρώτοι και ο καθένας από αυτούς διαιρεί το $20^{15}-1$, έπεται ότι

$11 \cdot 31 \cdot 61 | 20^{15}-1$, δηλαδή $20801 | 20^{15}-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτάθηκε από τον Αχιλλέα Συνεφακόπουλο) Να βρεθούν όλα τα ζεύγη των ακεραίων* n *και* m *τέτοια ώστε*

$2m \equiv -1 \pmod{n}$ *και* $n^2 \equiv -2 \pmod{m}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=10352

Λύση (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Πρώτα παρατηρούμε ότι οι m και n πρέπει να είναι περιττοί.

Για $|n| = 1$, παίρνουμε τα ζευγάρια $(m, n) = (1, \pm 1)$, $(-1, \pm 1)$ $(3, \pm 1)$, $(-3, \pm 1)$, ενώ για $|n| = 3$, παίρνουμε τα ζευγάρια $(m, n) = (1, \pm 3)$, $(-11, \pm 3)$.

Έπειτα υποθέτουμε ότι $|n| > 3$ και παρατηρούμε ότι $|m| \geq 3$. Θα δείξουμε ότι οι εναπομείνασες λύσεις είναι οι $(3, \pm 7)$, $(19, \pm 13)$, $(17, \pm 7)$, $(27, \pm 5)$ και $(-3, \pm 5)$.

Πράγματι, αρκεί να πάρουμε n να είναι θετικό και να θεωρήσουμε τις περιπτώσεις για το m:

•1η περίπτωση:

Έχουμε $m > 0$ και $2m+1 = an$ και $n^2+2 = bm$ για κάποιους περιττούς a και b.

Αν $a = 1$, τότε $bm = (2m+1)^2 + 2 = 4m^2 + 4m + 3$, κι έτσι ο m διαιρεί το 3. Έτσι παίρνουμε το ζεύγος $(3, 7)$.

Αν $a > 1$, τότε $a \geq 3$, κι έτσι $n < m$. Επιπλεόν, $ab - 2n$ πρέπει να ισούται με 1 διότι είναι περιττός με

$$ab - 2n = \frac{(2m+1)(n^2+2)}{nm} - 2n = \frac{n^2+2+4m}{nm} = \\ = \frac{n}{m} + \frac{2}{nm} + \frac{4}{n} < 1 + \frac{2}{9} + \frac{4}{3} < 3.$$

Αφού

$$ab - 2n = \frac{n^2+2+4m}{nm} = \frac{b+4}{n} = \frac{n+2a}{m}$$

παίρνουμε $n = b+4$, $m = n+2a$ και $ab = 2n+1 = 2(b+4)+1 = 2b+9$. Επομένως $(a-2)b = 9$,

και η μοναδική παραγοντοποίηση μας δίνει $(a, b) = (3, 9), (5, 3), (11, 1)$. Επομένως, $(m, n) = (19, 13), (17, 7), (27, 5)$.

•2η περίπτωση:

Έχουμε $m = -k < 0$ και $2k - 1 = \alpha n$ και $n^2 + 2 = \beta k$ για κάποιους περιττούς ακέραιους α και β.

Τότε, παρόμοια με την πρώτη περίπτωση ο $2n - \alpha\beta$ είναι περιττός με

$$2n - \alpha\beta = 2n - \frac{(2k-1)(n^2+2)}{nk} = \frac{n^2+2-4k}{nk} = \\ = \frac{\beta - 4}{n} = \frac{n - 2\alpha}{k}.$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι $\beta \geq 9$, αφού ο n πρέπει να διαιρεί τον $\beta - 4$, $n > 3$ και ο β είναι περιττός. Επομένως,

$$0 < 2n - \alpha\beta = \frac{\beta - 4}{n} < \frac{\beta}{n} < \frac{2}{\alpha} \leq 2.$$

Όπως πριν, παίρνουμε $n = \beta - 4$, $k = n - 2\alpha$ και $\alpha\beta = 2n - 1 = 2\beta - 9$. Άρα, $\beta(2 - \alpha) = 9$ κι έτσι $(\alpha, \beta) = (1, 9)$ είναι η μόνη λύση, δίνοντας το ζεύγος $(m, n) = (-3, 5)$.

Σχόλιο: Πρόκειται για το πρόβλημα 1676 του Mathematics Magazine. Σωστές λύσεις απέστειλαν 10 λύτες, και μια από αυτές δημοσιεύτηκε στον τόμο 77, No. 3, Ιούνιο 2004. Από τις 10 λύσεις 4 ήταν λανθασμένες. Η παραπάνω είναι η λύση που είχα αποστείλει.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Κυριαζή) Έστω*

$$f(x) = x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}$$

και S το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{array}{c} f(x) + f(y) \leq 0 \\ f(x) - f(y) \leq 0 \end{array}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν τα στοιχεία του S.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=14191

Λύση (Γιώργος Μανεάδης)

$$f(x) + f(y) \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 \leq 4^2$$

άρα τα σημεία S ανήκουν σε κυκλικό δίσκο κέντρου $K(-3, 3)$ και ακτίνας $\rho = 4$

$$f(x) - f(y) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+6) \leq 0(1)$$

Η ευθεία

$$\varepsilon_1, x - y = 0$$

τέμνει τον κύκλο

$$C : (x+3)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

στα $A(-3-2\sqrt{3}, -3-2\sqrt{3})$, $B(-3+2\sqrt{3}, -3-2\sqrt{3})$
Η ευθεία

$$\varepsilon_2, x + y + 6 = 0$$

τέμνει τον κύκλο

$$C : (x+3)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

στα $\Gamma(-3+2\sqrt{3}, -3-2\sqrt{3})$, $\Delta(-3-2\sqrt{3}, -3+2\sqrt{3})$. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες και τέμνονται στο κέντρο του κύκλου $C, K(-3, -3)$

$$(1) \Leftrightarrow \{x - y \leq 0 \ \wedge \ x + y + 6 \geq 0\} \, (2)$$

ή

$$\{x - y \geq 0 \ \wedge \ x + y + 6 \leq 0\} \, (3)$$

Λύση της (2) είναι τα σημεία της γωνίας ΔΟΒ
Λύση της (3) είναι τα σημεία της γωνίας ΑΟΓ
Επομένως το σύνολο S είναι τα σημεία των κυκλικών τομέων ΔΚΒ και AΚΒ. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \frac{\pi R^2}{2} = 8\pi \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(προτάθηκε από τον Στράτη Αντωνέα) Να λυθεί το σύστημα:*

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + \sin y = \sin(x+y) \\ |x| + |y| = 1 \end{array}\right\}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=14216

Λύση (Θάνος Μάγκος) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται ως

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

από όπου λαμβάνουμε

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0$$

ή

$$\cos\frac{x+y}{2} = \cos\frac{x-y}{2}$$

οπότε από εδώ έχουμε

$$x + y = 2k\pi \text{ ή } x = 2k\pi \text{ ή } y = 2k\pi, \, k \text{ ακέραιος}$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε λόγω της δεύτερης εξίσωσης

$$1 = |x| + |y| \geq |x+y| = |2k\pi| = 2\pi|k|$$

άρα $k = 0$, δηλαδή $x + y = 0$.

Τότε, λόγω της 2ης εξίσωσης προκύπτουν οι τιμές $x = -y = \dfrac{1}{2}$ και $-x = y = \dfrac{1}{2}$.

Στη 2η περίπτωση έχουμε

$$1 = |2k\pi| + |y| \geq 2\pi|k|$$

άρα $k = 0$, οπότε $x = 0$ και $y = \pm 1$

Ομοίως, και στην 3η περίπτωση προκύπτει $x = \pm 1, y = 0$. Όλα τα παραπάνω ικανοποιούν τις εξισώσεις του συστήματος.

Τελικά το σύστημα έχει τις λύσεις

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)$$

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτάθηκε από τον Στράτη Αντωνέα) Δίνονται τα πολυώνυμα*

$$p(x) = (x+1)^n - x^n - 1$$

και

$$\phi(x) = (x^2 + x + 1)^m$$

όπου n, m θετικοί ακέραιοι. Για ποιές τιμές των n, m το πολυώνυμο $\phi(x)$ διαιρεί το $p(x)$;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=66638#p66638

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) Θα πρέπει καθε ρίζα r του φ να είναι και ρίζα του p. Έστω $r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 = 1, r \neq 1$ και έστω ότι $n = 6k + v, v = 0, 1, 2, ..., 5$ τότε

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r+1)^{6k+v} - r^{6k+v} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-r^2)^{6k+v} - r^{6k+v} - 1 = 0$$

αφού $r^3 = 1$ η προηγούμενη γίνεται

$$(-r^2)^v - r^v - 1 = 0$$

που ισχύει μόνον αν $v = 1, v = 5$ οπότε

$$n = 6k + 1, n = 6k + 5$$

Θα πρεπει τώρα να δούμε αν το p μπορεί να έχει πολλαπλή ρίζα το r αν ηταν τριπλή η και περισσότερο θα έπρεπε

$$p(r) = p'(r) = p''(r) = 0$$

άρα

$$(r+1)^n - t^n - 1 = 0$$

$$n((r+1)^{n-1} - r^{n-1}) = 0$$

$$(n-1)((r+1)^{n-2} - r^{n-2}) = 0$$

Οι δυο τελευταίες δίνουν
$r^{n-2}(1+r) - r^{n-1} = 0 \Rightarrow r = 0$ (άτοπο).
Συνεπώς $m = 1, m = 2$.
-Αν $m = 2$ και $n = 6k + 5$ τότε από
$p'(r) = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow r^4 = 1 \Rightarrow r = 1$ (άτοπο).
-Αν $m = 2$ και $n = 6k + 1$ τότε οπως πριν καταλήγουμε στο $(-1)^{n-1} r^{n-1} = 1$ που ισχύει αν το $n - 1$ είναι αρτιο πλλαπλάσιο του 3 όπως εδώ Τελικά $m = 1, n = 6k + 1$ ή $n = 6k + 5$ ή $n = 6k + 1, m = 1$ ή $m = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτάθηκε από τον Χρήστο Κυριαζή) Έστω η εξίσωση*

$$ax^2 - bx + c = 0$$

με a, b, c θετικούς ακέραιους. Να προσδιορίσετε τους a, b, c αν γνωρίζετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες που ανήκουν στο διάστημα $(0, 1)$ και το άθροισμα

$$a + b + c$$

είναι το ελάχιστο δυνατό.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=9362

Λύση (Σπύρος Καπελλίδης) Έχω $f(x) = ax^2 - bx + c$

Πρέπει

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (1)$$

Τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1, x_2

Για να ικανοποιούνται τα αιτούμενα πρέπει

$$f(0) > 0$$

που είναι προφανές,

$$f(1) > 0 \Leftrightarrow a - b + c > 0 \quad (2)$$

και

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < 1 \Leftrightarrow b < 2a \quad (3)$$

Από την (3) έχουμε $b = 2a - k$ και από την (2) παίρνουμε ότι $c > a - k$

Επειδή ζητάμε ελάχιστο άθροισμα παίρνουμε $c = a - k + 1$

Συνεπώς η (1) δίνει μετά από πράξεις

$$k^2 > 4a \quad (4)$$

Από την $2a > k$ και την (4) παίρνουμε $k > 2$

-Για $k = 3$ έχουμε $a \geq k = 3 \Rightarrow 4a \geq 12 > k^2$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (4)

-Για $k = 4$ έχουμε $a \geq k = 4 \Rightarrow 4a \geq 16 = k^2$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (4)

-Για $k = 5$ και επειδή $a \geq k$, δοκιμάζω την μικρότερη δυνατή τιμή για το a, δηλαδή $a = 5$