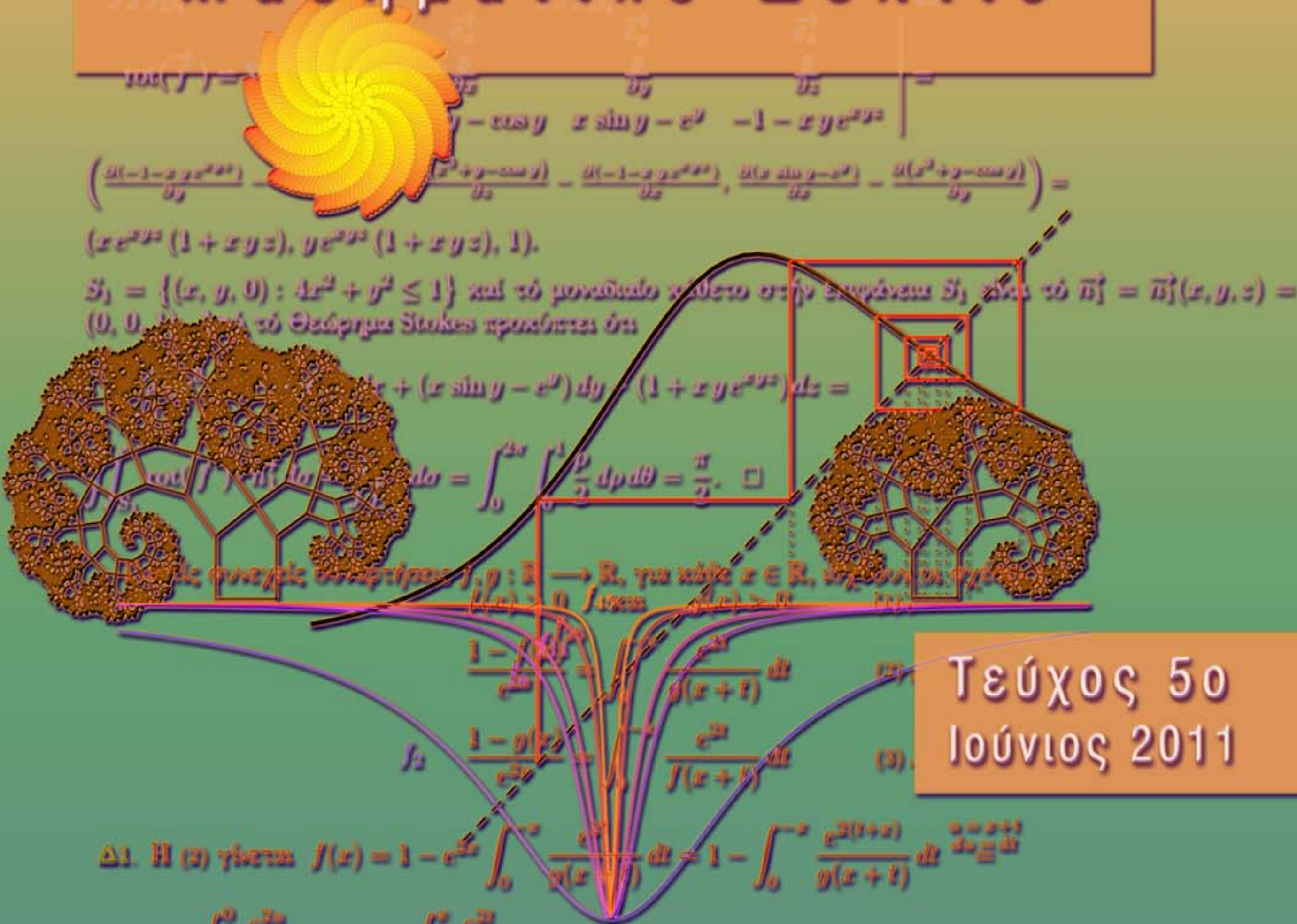
Εικοσιδωδεκάεδρον

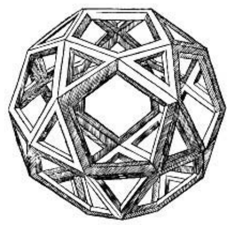
Μαθηματικό Δελτίο



Τεύχος 5ο
Ιούνιος 2011

www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr. Η επιλογή γίνεται από τους Επιμελητές του.
Τελική επεξεργασία-σελιδοποίηση-σχήματα: *Νίκος Μαυρογιάννης*. Εξώφυλλο: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LaTeX.
Μπορεί να αναπαραχθεί και να διανεμηθεί ελεύθερα.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.
Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron
Απόδοση: *Πάνος Γιαννόπουλος*

Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (http://www.mathematica.gr) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Διευθύνοντα Μέλη του mathematica.gr

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Ένας εξερευνητής έχει βρεθεί σε μία ζούγκλα που κατοικείται από δύο φυλές ιθαγενών. Η πρώτη φυλή αποτελείται από φιλήσυχους ιθαγενείς οι οποίοι λένε πάντα την αλήθεια. Η δεύτερη φυλή αποτελείται από ανθρωποφάγους που λένε πάντοτε ψέματα. Κατά τα άλλα είναι απολύτως όμοιοι. Τρέχοντας για να ξεφύγει από ένα λιοντάρι που τον κυνηγούσε, βρέθηκε μπροστά σε ένα σταυροδρόμι του οποίου, όπως γνώριζε, ο ένας δρόμος οδηγούσε στο χωριό των φιλήσυχων και ο άλλος στο χωριό των ανθρωποφάγων. Δεν μπορούσε όμως να θυμηθεί ποιος δρόμος οδηγεί πού. Μπροστά στο σταυροδρόμι καθόταν ένας ιθαγενής μιας εκ των δύο φυλών. Ο εξερευνητής είχε χρόνο να του κάνει μόνο μία ερώτηση. Τι θα τον ρωτήσει για να οδηγηθεί στο χωριό των φιλήσυχων ιθαγενών;*

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Πέντε κορίτσια θέλουν να ζυγιστούν. Πηγαίνουν σε μια ζυγαριά που λειτουργεί με νόμισμα (αν τις θυμόσαστε...). Έχουν, όμως, μόνο ένα νόμισμα, γι αυτό κάνουν το εξής: Ανεβαίνουν δύο μαζί και καταγράφουν το βάρος τους (άθροισμα). Μετά κατεβαίνει η μία και ανεβαίνει μια άλλη και γίνεται πάλι καταγραφή της ένδειξης και στην συνέχεια επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία μέχρι να πάρουν τις παρακάτω μετρήσεις* $183, 186, 187, 190, 191, 192, 193, 194, 196, 200$ *Ποιο είναι το βάρος του κάθε κοριτσιού; (Τα βάρη δεν είναι σε κιλά αλλά σε κάποιες αγγλοσαξωνικές μονάδες).*

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

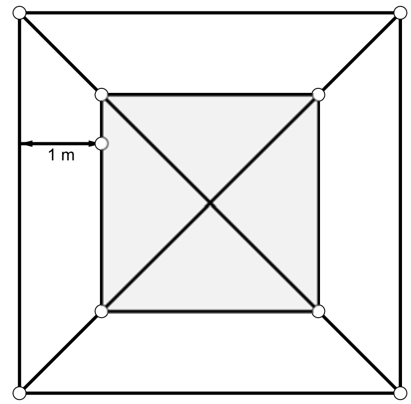
ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτάθηκε από qwerty) Ο γυμναστής ενός σχολείου βάζει τους μαθητές σε τριάδες, μετά σε τετράδες και τέλος σε εξάδες. Σε κάθε περίπτωση του περισσεύουν* 2 *μαθητές. Αν οι μαθητές του σχολείου είναι περίπου* 100*, να βρεθεί πόσοι ακριβώς είναι οι μαθητές.*

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μάκης Χατζόπουλος) Να βρεθεί η τιμή του ακόλουθου κλάσματος, εάν τα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία:*

$$\frac{L\cdot I\cdot S\cdot A\cdot R\cdot I\cdot B\cdot L\cdot O}{G\cdot S\cdot P\cdot O\cdot T\cdot L\cdot I\cdot S\cdot A}$$

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ένας κήπος σχήματος τετραγώνου, όπως δείχνει το σχήμα, περιβάλλεται από έναν διάδρομο με πλάτος 1 μέτρο. Αν ο διάδρομος έχει εμβαδόν 40 τμ, πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου;*

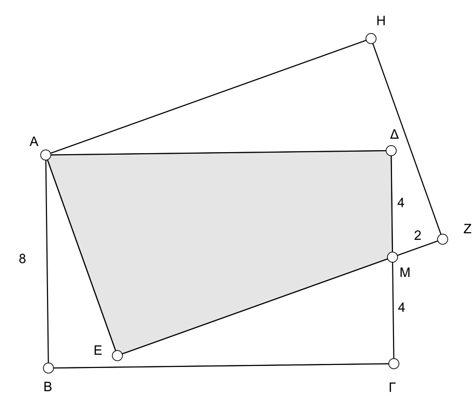


ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να υπολογιστεί η τιμή του αθροίσματος* S*, αν γνωρίζουμε ότι έχει* 2011 *όρους:*

$$S = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - \ldots$$

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Στο παρακάτω σχήμα τα δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ είναι ίσα. Η πλευρά ΕΖ διχοτομεί την πλευρά ΓΔ. Αν ΑΒ = 8 και ΜΖ = 2 , να βρεθεί το εμβαδόν του μη επικαλυπτόμενου χωρίου των δύο ορθογωνίων.*



ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Μπίσδας) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση*

$$(x+1)(x-1)\left(x^2-5\right)(x+2)(x-2)\left(x^2-2\right)-4$$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να λύσετε την εξίσωση:*

$$\frac{x-1}{2+3+4}+\frac{x-2}{1+3+4}+\frac{x-3}{1+2+4}+\frac{x-4}{1+2+3}=4$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο themiskant) Να λυθεί η εξίσωση:*

$$x^4 + 5x^3 - 6394x^2 - 32000x - 38400 = 0$$

όταν ισχύει $x > 0$.

Μαθηματικά Α' Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Γιώργος Τσικαλουδάκης) Έστω Α,Β σημεία εσωτερικά γωνίας* $x\hat{O}y$. *Να βρεθούν σημεία Γ, Δ των* Ox, Oy *αντίστοιχα τέτοια, ωστε η διαδρομή ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ να είναι η ελάχιστη δυνατή.*

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΒΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τεμνει την ΑΔ στο Ε και τη διχοτόμο της γωνίας ΔΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι:*

1. *Οι γωνίες ΑΒΔ και ΔΑΓ είναι ίσες.*
2. *Το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές.*
3. *Η ΡΕ είναι κάθετη στην ΑΒ.*
4. *Το τετράπλευρο ΑΕΡΖ είναι ρόμβος.*

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιάννης Τσόπελας) Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \ln(\alpha \ln x) + \frac{\beta}{\ln x} + 1$$

όπου α *ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου με* $\alpha_5 = 11, \alpha_{13} = 35$ *και* β *η μέγιστη τιμή της συνάρτησης*

$$g(x) = 2\eta\mu x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Υπολογίστε τα α, β *το πεδίο ορισμού της* f, *την μονοτονία, τις ρίζες και το πρόσημό της.*

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης) Δίνεται η συνάρτηση* f *με τύπο*

$$f(x) = ln(e^x + 1)$$

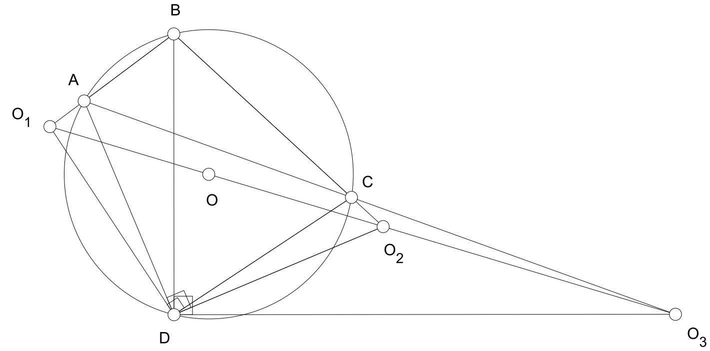
1. *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* f.
2. *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$.
3. *Να λυθεί η εξίσωση* $f\left(\sqrt{3}\eta\mu x\right) = f(\sigma\upsilon\nu x)$.
4. *Να λυθεί η ανίσωση* $f(2x) > f(x)$.
5. *Να δείξετε ότι* $f(-x) = f(x) - x$ *για κάθε* $x\epsilon\mathbb{R}$.

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Σε τυχαίο σημείο* C *της διαμέτρου* AB *ημικυκλίου* (O, R) *φέρνουμε την κάθετη* Cx. *Με διαμέτρους τις* CA *και* CB *γράφουμε ημικύκλια* $(K), (L)$ *αντίστοιχα στο εσωτερικό του ημικυκλίου* (O, R).

Αν (K') *είναι ο κύκλος που εφάπτεται του* (K), *του* (O) *και της ημιευθείας* Cx *και* (L') *ο κύκλος που εφάπτεται του* (L), *του* (O) *και της ημιευθείας* Cx *να δειχθεί ότι οι κύκλοι* (K') *και* (L') *είναι ίσοι.*

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Τετράπλευρο* $ABCD$ *είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O).
Οι κάθετες στο σημείο D *στις* DC, DA, DB *τέμνουν τις ευθείες* AB, BC, CA *αντίστοιχα στα σημεία* O_1, O_2, O_3.
Να δειχθεί ότι τα σημεία O_1, O_2, O_3 *ανήκουν σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο* O *του κύκλου* (O).



Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Α. Κυριακόπουλος) Έστω η εξίσωση:*

$$\lambda x + \sqrt{4 - \lambda^2} \cdot \mathrm{y} - 2 = 0 \ \ (1)$$

1. *Να βρείτε τους αριθμούς* $\lambda \in \mathbb{R}$, *για τους οποίους η εξίσωση (1) παριστάνει μια ευθεία* ε_λ. *Έστω Σ το σύνολο των αριθμών αυτών.*
2. *Να αποδείξετε ότι όταν το* λ *διατρέχει το σύνολο Σ, οι ευθείες* ε_λ *εφάπτονται σε ένα σταθερό κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.*

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Δίνεται τετράπλευρο* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *και σημεία* K, Λ *στις πλευρές* $\overline{\mathrm{AB}}$ *καί* $\overline{\Delta\Gamma}$ *αντίστοιχα, έτσι ώστε*

$$\overline{\mathrm{AK}} = \nu\,\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\overline{\Delta\Lambda} = \nu\,\overline{\Delta\Gamma}$$

με $0 < \nu < 1$. *Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των* $\overline{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{K\Lambda}}$ *και* $\overline{\mathrm{A\Delta}}$ *βρίσκονται στην ίδια ευθεία.*

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας) Έστω ο δειγματικός χώρος*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \}$$

για τα απλά ενδεχόμενα του οποίου ισχύουν

$$P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4}$$

και τα ενδεχόμενα:

$$A = \{\kappa \in \Omega | \text{η διακύμανση του δείγματος των αριθμών}$$

$$\kappa, 2\kappa, 4\kappa, 5\kappa \quad \text{είναι μεγαλύτερη του } 10\}$$

$$B = \{x \in \Omega \text{ όπου } ln(x^2 - x + 1) > 0\}$$

1. *Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του* Ω.
2. *Να αποδείξετε ότι* $A = \{3, 4\}$ *και* $B = \{2, 3, 4\}$
3. *Να βρείτε τις πιθανότητες* $P(A - B)$ *και* $P(A' \cup B)$
4. *Αν* X *ένα ενδεχόμενο του* Ω*,να βρείτε την μικρότερη τιμή της πιθανότητας* $P(X)$ *ώστε* $A \cup X = \Omega$

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης)* *Έστω*

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 2010, 2011\}$$

ένας δειγματικός χώρος κάποιου πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + (1-x)^2$ *με* $x \in \mathbb{R}$ *ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.*
β. Αν $A \subseteq \Omega$ *να βρείτε το πλήθος* $N(A)$ *των στοιχείων του ενδεχομένου* A *αν γνωρίζετε ότι η παράσταση* $(P(A))^2 + (P(A'))^2$ *έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή.*
γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$ *για κάθε* $x \in [0, 1]$.
δ. Αν $B, \Gamma \subseteq \Omega$ *με*

$$(P(B))^2 + (P(\Gamma))^2 + (P(B'))^2 + (P(\Gamma'))^2 = 2$$

να δείξετε ότι $B = \Gamma$ *ή* $B \cup \Gamma = \Omega$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο barsakis) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του* z, *όταν οι εικόνες των παρακάτω μιγαδικών είναι σημεία συνευθειακά :*

1. $i,\ z,\ zi$
2. $1, z+i, iz+1$
3. $1,\ z,\ z^2+1$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο g.liolios) Τα σημεία* M_λ *και* M_1 *είναι εικόνες των μιγαδικών* $z_\lambda = 2\lambda + 2\lambda i$ *με* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $z_1 = 3 - i$ *και* M *είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου* $OM_\lambda MM_1$ *(Ο είναι η αρχή των αξόνων).*

1. *Να βρεθεί εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το σημείο* M *που είναι η εικόνα του μιγαδικού* $z = x + yi$.
2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού* w *οταν* $w = \frac{1}{z}$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση,Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Δίνεται συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ώστε*

$$f(x-y) = f(x) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

1. *Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της* f *διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*
2. *Να αποδείξετε ότι η* f *είναι περιττή.*
3. *Έστω ότι η εξίσωση* $f(x) = 0$ *έχει μοναδική λύση την* $x = 0$.
   (α) *Να αποδείξετε ότι η* f *είναι αντιστρέψιμη.*
   (β) *Δίνεται μιγαδικός αριθμός* z *με* $|z| = 1$, *για τον οποίο ισχύει*
   $$f\left(\left|z + \frac{i}{z}\right|\right) + f(3) = f(7)$$
   Να βρείτε το $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δυο συναρτήσεις* f, g *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$ *έχουν την ιδιότητα:*

$$g(f(x)) = x^3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. *Να αποδειχθεί ότι η* f *είναι αντιστρέψιμη.*
2. *Η* g *έχει σύνολο τιμών το* $\mathbb{R}$.
3. *Δεν μπορεί να ισχύει η σχέση* $f(g(x)) = x^2$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$x^5 - 5x^6 + 13x^3 - 19x^2 + 16x - 8 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ *η οποία είναι κυρτή στο* $[\alpha, +\infty)$ *και* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. *Να δειχθεί ότι η* f *είναι γνησίως φθίνουσα.*

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνάρτηση* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και τέτοια ώστε για κάθε* x, y *να ισχύει* $xf(y) + yf(x) \leq 1$.
i) Να αποδείξετε ότι $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$.
ii) Να βρεθεί ο τύπος μιας τέτοιας συνάρτησης ώστε να ισχύει η ισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης* $I(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu^2 x|\,dx$, *όπου* $a > 0$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται η συνάρτηση* f *με τύπο:*

$$f(x) = \frac{1}{\sin x},\ \ x \in (0, \pi)$$

α) Να μελετήσετε την f *ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.*
β) Να βρείτε της ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f *τον άξονα* $x'x$ *και τις ευθείες με εξισώσεις* $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης) Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *κοίλη στο* $\mathbb{R}$ *με* $f(0) = 0$ *και* $f(2) = 4$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ *ισχύει :* $x \cdot f'(x) < f(x)$.
β) Αν $h(x) = \int_2^x \frac{f(t)}{t} dt$ *με* $x > 0$, *να δείξετε ότι*
i) Η $h(x)$ *είναι κοίλη στο* $(0, +\infty)$ *και*
ii) $h(x) \leq 2x - 4$ *για κάθε* $x > 0$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq \max\{f'(x), f'(y)\}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y$.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται συνάρτηση f με την ιδιότητα*

$$f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:
i) Οι x,y είναι ομόσημοι
ii) Οι x,y είναι ετερόσημοι.
δ) Αν η f έχει αρχική, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη, ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt, x \in \mathbb{R}$$

και να βρείτε τον τύπο της, αν $f(1)=2012$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$(x-y)f(x)+h(x)-xy+y^2 \le h(y) \le$$
$$(x-y)g(x)+h(x)-xy+y^2$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για κάθε θετικό ακέραιο n να αποδειχθεί ότι*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<3$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle\ AB\Gamma$ και σημείο Δ στην πλευρά $A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E, τέτοιο ώστε $\Gamma E = A\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $\Delta B=\Delta E$.*

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Σε οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle\ ABC$ η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\angle A$ τέμνει τη BC στο L και τον περιγεγραμμένο κύκλο στο N. Από το L φέρουμε κάθετες προς τις AB, AC και έστω K, M τα ίχνη τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AKNM$ και το τρίγωνο ABC έχουν ίσα εμβαδά.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν οι θετικοί αριθμοί $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ώστε*

$$a_1+a_2+...+a_n=n$$

και

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2+a_{k+1}^2+2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

(όπου $a_{n+1}=a_1$).

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) (Ανισότητα Turkevici) Αν $x,y,z,t>0$, να αποδειχθεί, ότι*

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xyzt \ge$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2x^2+z^2x^2+y^2t^2$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Σε τρίγωνο $\triangle\ ABC$, $(AB \neq AC)$, φέρνουμε τα ύψη του AD, BE, CZ και έστω H το ορθόκεντρό του. Αν M είναι το μέσο της πλευράς BC και N το σημείο τομής των ευθειών ZE και BC, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (C) διαμέτρου AH και ο κύκλος (C') διαμέτρου MN τέμνονται ορθογωνίως.*

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Κώστας Βήττας) Δίνεται κύκλος (O) και έστω P, σταθερό σημείο εκτός αυτού. Θεωρούμε μεταβλητή χορδή AB του (O), ώστε η ευθεία AB να περνάει από σταθερό σημείο, έστω Q. Αποδείξτε ότι η ευθεία $A'B'$, όπου $A' \equiv (O)\cap PA$ και $B' \equiv (O)\cap PB$, περνάει από σταθερό σημείο έστω R, επί της ευθείας PQ.*

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Σιλουανός Μπραζιτίκος - Θέμα 28ης ΒΜΟ) Δίνονται οι πραγματικοί x,y,z ώστε $x+y+z=0$. Να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{x\,(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y\,(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z\,(z+2)}{2z^2+1}\ge 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p τέτοιους ώστε ο αριθμός p^3+p^2+p+1 να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Πέτρος Βαλέττας) Έστω $f_1,\ldots,f_n$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ οι οποίες δεν είναι ταυτοτικά μηδενικές ώστε*

$$\int_0^1 f_i(x)f_j(x)\,dx=0$$

για $i\neq j$. Να αποδειχθεί ότι

$$\prod_{j=1}^{n}\int_0^1 f_j^2(x)\,dx \geqslant n^n\left(\prod_{j=1}^{n}\int_0^1 f_j(x)\,dx\right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής περιοδική συνάρτηση με άρρητη περίοδο και έστω F μια αρχική της f. Αν η ακολουθία $a_n=F(n)-n$ συγκλίνει, να αποδείξετε ότι $f(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Δίνεται πεπερασμένος δακτύλιος R. Να δειχθεί ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $k\neq\ell$ ώστε $x^k=x^\ell$ για κάθε $x\in R$.*

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Αν T είναι ένας αυτομορφισμός που απεικονίζει περισσότερα από τα τρία τέταρτα των στοιχείων της G στους αντιστρόφους τους, να δείξετε ότι $T(x)=x^{-1}$ για κάθε $x\in G$ κι ότι η G είναι αβελιανή.*

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{2n\pi}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \pi - \frac{\pi}{2}\ln(2\pi)$$

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Mulder) Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $4\kappa + 3$ (ή ισοδύναμα της μορφής $4\kappa - 1$), όπου κ φυσικός αριθμός.*

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Νίκος Κατσίπης) Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση*

$$x^2 = y^7 + 7$$

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Σπύρος Βασιλόπουλος) Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a + b + c = 0$ τότε να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

και τα (μεταβλητά) σημεία του $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Να αποδείξετε πως η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{2x}{1 + e^{2x}}, x \geq 0$$

υπολογισμένη στο μηδέν είναι πάντα ακέραιος, για κάθε n φυσικό. (Με λίγα λόγια: $f^{(n)}(0) \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$)

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$$

Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Έστω ότι $a, b, c \in \mathbb{C}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί αριθμοί ώστε:*

$$(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5 = 0$$

Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Νίκος Μαυρογιάννης) (Ο Μετασχηματισμός του $M\ddot{o}bius$) Θεωρούμε σταθερούς μιγαδικούς αριθμούς a, b, c, d*
Αν $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w αν η εικόνα του z ανήκει
α) Σε σταθερό κύκλο;
β) Σε σταθερή ευθεία;

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σωτήρης Χασάπης) Ένας εξερευνητής έχει βρεθεί σε μία ζούγκλα που κατοικείται από δύο φυλές ιθαγενών. Η πρώτη φυλή αποτελείται από φιλήσυχους ιθαγενείς οι οποίοι λένε πάντα την αλήθεια. Η δεύτερη φυλή αποτελείται από ανθρωποφάγους που λένε πάντοτε ψέματα. Κατά τα άλλα είναι απολύτως όμοιοι. Τρέχοντας για να ξεφύγει από ένα λιοντάρι που τον κυνηγούσε, βρέθηκε μπροστά σε ένα σταυροδρόμι του οποίου, όπως γνώριζε, ο ένας δρόμος οδηγούσε στο χωριό των φιλήσυχων και ο άλλος στο χωριό των ανθρωποφάγων. Δεν μπορούσε όμως να θυμηθεί ποιος δρόμος οδηγεί πού. Μπροστά στο σταυροδρόμι καθόταν ένας ιθαγενής μιας εκ των δύο φυλών. Ο εξερευνητής είχε χρόνο να του κάνει μόνο μία ερώτηση. Τι θα τον ρωτήσει για να οδηγηθεί στο χωριό των φιλήσυχων ιθαγενών;*

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=44&p=52498

Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή) Ποιός δρόμος οδηγεί στο χωριό σου· Και εκεί θα πάει. Αν ρωτήσει αυτόν που λέει πάντα την αλήθεια θα τον στείλει στο χωριό του, που είναι το χωριό των φιλήσυχων. ενώ αν ρωτήσει αυτόν που λέει πάντοτε ψέματα δεν θα τον στείλει στο χωριό του, που είναι το χωριό των ανθρωποφάγων, αλλά στο χωριό των άλλων. Δηλαδή και πάλι θα πάει στο χωριό των φιλήσυχων.

Λύση 2 (nickthegreek) Με κάποιον τρόπο πρέπει να φέρουμε τις δύο φυλές σε αντίθεση... Νομίζω μια σωστή ερώτηση θα ήταν: Αν ρωτούσα έναν από τους ανθρώπους της άλλης φυλής (όχι την δικιά σου δηλαδή) «Ποιος δρόμος είναι σωστός;¨ τι θα μου έλεγε;» Αν ο ιθαγενής ήταν ανθρωποφάγος, θα έλεγε ψέματα, δηλαδή θα έλεγε ότι οι φιλήσυχοι θα του πουν έναν από τους δύο δρόμους ο οποίος όμως θα ήταν λάθος. Αν ο ιθαγενής ήταν φιλήσυχος, τότε θα του έλεγε την αλήθεια ότι η άλλη φυλή (οι ανθρωποφάγοι) θα τον πήγαιναν από τον λάθος δρόμο πάλι. Άρα σε κάθε περίπτωση η απάντηση στην ερώτηση που κάνει ο εξερευνητής είναι ο λάθος δρόμος.Το μόνον που έχει να κάνει είναι να διαλέξει τον άλλο δρόμο και αυτός θα είναι ο σωστός!

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Πέντε κορίτσια θέλουν να ζυγιστούν. Πηγαίνουν σε μια ζυγαριά που λειτουργεί με νόμισμα (αν τις θυμόσαστε...). Έχουν, όμως, μόνο ένα νόμισμα, γι αυτό κάνουν το εξής: Ανεβαίνουν δύο μαζί και καταγράφουν το βάρος τους (άθροισμα). Μετά κατεβαίνει η μία και ανεβαίνει μια άλλη και γίνεται πάλι καταγραφή της ένδειξης και στην συνέχεια επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία μέχρι να πάρουν τις παρακάτω μετρήσεις* $183, 186, 187, 190, 191, 192, 193, 194, 196, 200$ *Ποιο είναι το βάρος του κάθε κοριτσιού; (Τα βάρη δεν είναι σε κιλά αλλά σε κάποιες αγγλοσαξωνικές μονάδες).*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=9653

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Τα 5 κορίτσια κάνουν

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

διαφορετικά ζεύγη, όσο και τα ζυγίσματα. Συνεπώς το κορίτσια ζυγίστηκαν από τέσσερις φορές το καθένα. Άρα το συνολικό βάρος των κοριτσιών είναι

$$\frac{(183+186+187+190+191+192+193+194+196+200)}{4} = 478$$

Αν τα κορίτσια έχουν βάρος, κατά σειρά μεγέθους

$$\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$$

τότε τα δύο ελαφρύτερα, ζυγίζουν

$$\alpha + \beta = 183$$

και τα δύο βαρύτερα

$$\delta + \varepsilon = 200$$

Άρα το μεσαίο, γ , ζυγίζει

$$\gamma = 478 - (\alpha + \beta + \delta + \varepsilon) = 478 - 183 - 200 = 95$$

Ο δεύτερος πιο ελαφρύς συνδυασμός είναι ο

$$\alpha + \gamma = 186$$

Άρα

$$\alpha = 186 - 95 = 91$$

οπότε και

$$\beta = 183 - \alpha = 183 - 91 = 92$$

Όμοια από τον δεύτερο πιο βαρύ συνδυασμό

$$\gamma + \varepsilon = 196$$

έχουμε

$$\varepsilon = 196 - \gamma = 196 - 95 = 101$$

και άρα

$$\delta = 200 - \varepsilon = 99$$

Τα κορίτσια ζυγίζουν $91, 92, 95, 99, 101$. Με έλεγχο βλέπουμε ότι τα ζυγίσματα που δόθηκαν (και δεν χρησιμοποιήθηκαν στη λύση) είναι συμβατά με τα νούμερα αυτά. Υποθέτω ότι τα βάρη είναι σε λίβρες, γιατί με την λιτότητα που έχουμε τα κορίτσια πρέπει να χάσουν ... πολλά κιλά.

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτάθηκε από qwerty) Ο γυμναστής ενός σχολείου βάζει τους μαθητές σε τριάδες, μετά σε τετράδες και τέλος σε εξάδες. Σε κάθε περίπτωση του περισσεύουν 2 μαθητές. Αν οι μαθητές του σχολείου είναι περίπου 100, να βρεθεί πόσοι ακριβώς είναι οι μαθητές.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=16302&p=84664#

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αν από τον αριθμό που ζητάμε αφαιρέσουμε 2, τότε ο νέος αριθμός θα διαιρείται με $3, 4$ και 6. Επομένως ο αριθμός που ζητάμε θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ των $3, 4, 6$, δηλαδή του 12. Το κοντινότερο (στο 100) του 12 είναι το 96. Άρα το πλήθος των μαθητών είναι 98.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μάκης Χατζόπουλος) Να βρεθεί η τιμή του ακόλουθου κλάσματος, εάν τα διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία:*

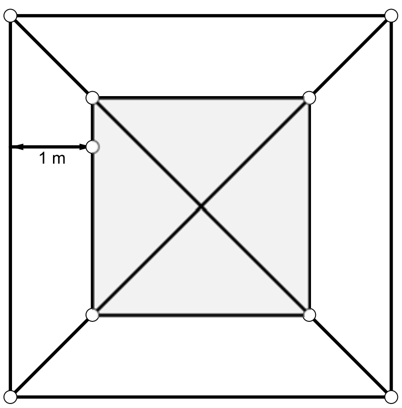
$$\frac{L \cdot I \cdot S \cdot A \cdot R \cdot I \cdot B \cdot L \cdot O}{G \cdot S \cdot P \cdot O \cdot T \cdot L \cdot I \cdot S \cdot A}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Αφού έχουμε συνολικά δέκα γράμματα, συμπεραίνουμε ότι αντιπροσωπεύονται όλα τα ψηφία, δηλαδή όλοι οι αριθμοί, από 0 έως 9. Φυσικά το ψηφίο 0 δεν μπορεί να είναι στον παρονομαστή. Άρα είναι στον αριθμητή, που σημαίνει ότι το γινόμενό μας είναι ίσο με 0. Η τιμή λοιπόν της παράστασης είναι ίση με 0

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ένας κήπος σχήματος τετραγώνου, όπως δείχνει το σχήμα, περιβάλλεται από έναν διάδρομο με πλάτος 1 μέτρο. Αν ο διάδρομος έχει εμβαδόν 40 τμ, πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου;*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=15002

Λύση 1 (Ηλίας Καμπελής). Αν xm είναι η πλευρά του μικρού τετραγώνου τότε $(x+2)\,m$ είναι η πλευρά του μεγάλου. Το εμβαδό του μικρού τετραγώνου είναι $E_\mu = x^2 \;\; m^2$ και του μεγάλου

$$E_M = (x+2)^2 =$$

$$(x+2)\cdot(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4 \; m^2$$

Το εμβαδόν του διαδρόμου είναι $E = 40$ άρα
$E_M - E_\mu = 40$ οπότε:
$x^2+4x+4-x^2 = 40$ και
$4x = 36$ δηλαδή
$x = 9m$
Άρα το εμβαδόν του κήπου είναι

$$E_\kappa = 9^2 = 81 \; m^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να υπολογιστεί η τιμή του αθροίσματος S, αν γνωρίζουμε ότι έχει* 2011 *όρους :*

$$S = -1-2+3+4-5-6+7+8-...$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=16916

Λύση (Γιώργος Απόκης) Παρατηρούμε ότι κάθε όρος που είναι πολλαπλάσιο του 4 (και ο προηγούμενός του) έχουν πρόσημο +, ενώ οι υπόλοιποι έχουν -.

Επομένως (αφού το τελευταίο πολλαπλάσιο του 4 είναι το 2008) έχουμε ότι το S θα είναι

$$S = -1-2+3+4-5-6+7+8-...$$

$$+2007+2008-2009-2010+2011 =$$

(παίρνουμε ζευγάρια από το τέλος)

$$= (2011-2010)+(-2009+2008)+(2007-2006)+$$

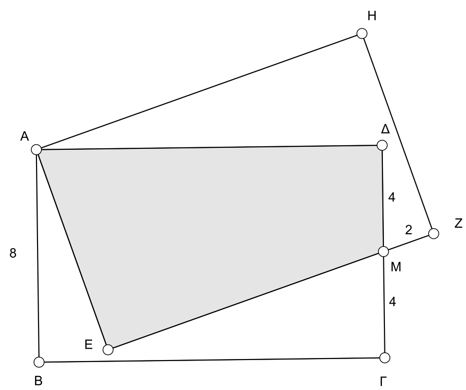
$$(-2005+2004)+...+(7-6)+(-5+4)+3-2-1$$

Βλέπουμε ότι ανά δύο οι διαδοχικές παρενθέσεις έχουν άθροισμα 0, δηλαδή ανά τέσσερις οι διαδοχικοί όροι έχουν άθροισμα 0.

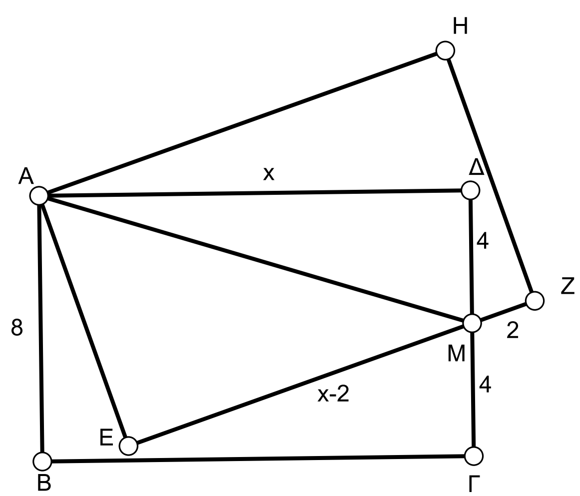
Από το 2011 ως το 4 υπάρχουν $2011-4+1 = 2008$ όροι, δηλαδή $2008 : 4 = 502$ τετράδες, άρα

$$S = 502\cdot 0+3-2-1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Στο παρακάτω σχήμα τα δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΑΕΖΗ είναι ίσα. Η πλευρά ΕΖ διχοτομεί την πλευρά ΓΔ. Αν ΑΒ = 8 και ΜΖ = 2 , να βρεθεί το εμβαδόν του μη επικαλυπτόμενου χωρίου των δύο ορθογωνίων.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=12064



Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) Φέρνω την ΑΜ. Δημιουργούνται δύο ορθογώνια τρίγωνα. Τα ΑΜΔ, ΑΜΕ.

Αν $\mathrm{A}\Delta = x$ τότε $EM = x - 2$ και $AE = 8$

Στο ΑΜΔ απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει:

$$AM^2 = A\Delta^2 + \Delta\mathrm{M}^2 (1)$$

Στο ΑΜΕ ισχύει:

$$AM^2 = A\mathrm{E}^2 + \mathrm{EM}^2 (2)$$

Απο τις (1) και (2) λαμβάνω:

$$A\Delta^2 + \Delta\mathrm{M}^2 = A\mathrm{E}^2 + \mathrm{EM}^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + 4^2 = 8^2 + (x-2)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + 16 = x^2 - 4x + 68 \Rightarrow$$
$$4x = 52 \Rightarrow x = 13$$

Το επικαλυπτόμενο μέρος έχει εμβαδό:

$$E = \frac{A\Delta \cdot \Delta M}{2} + \frac{A\mathrm{E} \cdot EM}{2} = \frac{13 \cdot 4}{2} + \frac{8 \cdot 11}{2} = 70\tau.\mu$$

Συνεπώς το μη επικαλυπτόμενο θα είναι:

$$2(AB\Gamma\Delta) - 2E = 2 \cdot 8 \cdot 13 - 2 \cdot 70 = 68\tau.\mu$$

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) Με 2 Πυθαγόρεια θεωρήματα στα τρίγωνα ΑΕΜ, ΑΔΜ (θέτοντας x την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου) προκύπτει η εξίσωση:

$$64 + (x-2)^2 = x^2 + 16$$

απ' όπου παίρνουμε $x = 13$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$2 \cdot (13 \cdot 8) - 2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 11}{2} + \frac{4 \cdot 13}{2} \right) = 68\tau.\mu.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Μπίσδας) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση*

$$(x+1)(x-1)\left(x^2-5\right)(x+2)(x-2)\left(x^2-2\right) - 4$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=11077

Λύση 1 (Σπύρος Καρδαμίτσης)

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-5\right) - 4 =$$
$$\left(x^2-3+2\right)\left(x^2-3+1\right)\left(x^2-3-1\right)\left(x^2-3-2\right) - 4 =$$

θέτοντας $x^2-3=\alpha$ έχουμε ότι:

$$(\alpha+2)\,(\alpha+1)\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)-4=$$

$$\begin{aligned}&\left(\alpha^2-4\right)\left(\alpha^2-1\right)-4=\\&\alpha^4-5\alpha^2+4-4=\\&\alpha^4-5\alpha^2=\alpha^2(\alpha^2-5)=\\&(x^2-3)^2((x^2-3)^2-5)=(x^2-3)^2(x^4-6x^2+4)\end{aligned}$$

Λύση 2 (Κώστας Μαλλιάκας) Είναι

$$(x^2-1)(x^2-5)(x^2-2)(x^2-4)-4=$$

$$(x^4-6x^2+5)(x^4-6x^2+8)-4$$

οπότε θέτω $x^4-6x^2=\omega$ και έχω

$$(\omega+5)(\omega+8)-4=\omega^2+13\omega+36=$$

$$(\omega+9)(\omega+4)=(x^4-6x^2+9)(x^4-6x^2+4)=$$

$$(x^2-3)^2(x^4-6x^2+4)=...$$

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να λύσετε την εξίσωση:*

$$\frac{x-1}{2+3+4}+\frac{x-2}{1+3+4}+\frac{x-3}{1+2+4}+\frac{x-4}{1+2+3}=4$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=16597

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Πρόκειται για εξίσωση πρώτου βαθμού. Ταυτότητα δεν είναι, αφού π.χ. για $x=0$ δεν ικανοποιείται.

Παρατηρούμε, ότι για $x=10$ ικανοποιείται, άρα αυτή είναι η μοναδική της λύση.

Λύση 12 (Χρήστος Καρδάσης)

$$\frac{x-1}{9}-1+\frac{x-2}{8}-1+\frac{x-3}{7}-1+\frac{x-4}{6}-1=0\Leftrightarrow$$

$$(x-10)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)=0$$

άρα $x=10$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο themiskant) Να λυθεί η εξίσωση:*

$$x^4+5x^3-6394x^2-32000x-38400=0$$

όταν ισχύει $x>0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=12903

Λύση (Προτείνει ο alexandropoulos) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$x^4-6394x^2-38400$$

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία (θέτω $x^2=y\geq 0$) το πολυώνυμο γράφεται

$$x^4-6394x^2-38400=(x^2+6)(x^2-6400)$$

Επομένως,

$$x^4+5x^3-6394x^2-32000x-38400=0\Leftrightarrow$$

$$5x(x^2-6400)+(x^2-6400)(x^2+6)=0\Leftrightarrow$$

$$(x^2-6400)(x^2+5x+6)=0\Leftrightarrow$$

$$(x-80)(x+80)(x+2)(x+3)=0\Leftrightarrow$$

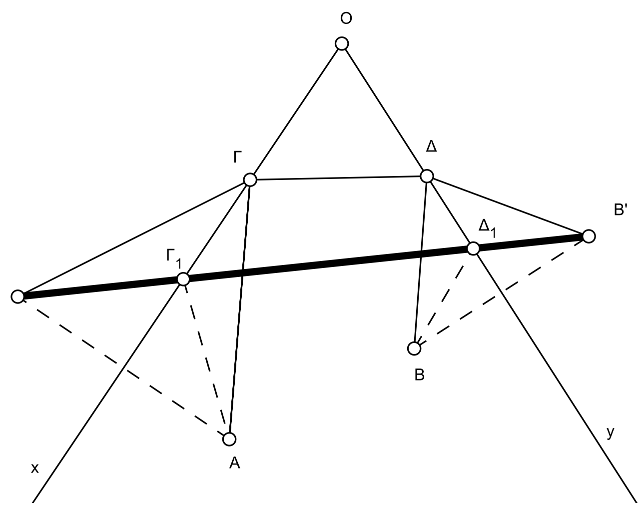
$$x=80\ \text{ή}\ x=-80\ \text{ή}\ x=-2\ \text{ή}\ x=-3$$

Λόγω του αρχικού περιορισμού $x=80$.

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Γιώργος Τσικαλουδάκης) Έστω Α,Β σημεία εσωτερικά γωνίας $x\hat{O}y$. Να βρεθούν σημεία Γ, Δ των Ox, Oy αντίστοιχα τέτοια, ωστε η διαδρομή ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ να είναι η ελάχιστη δυνατή.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=#p72741

Λύση (Κώστας Δόρτσιος) Θεωρώντας τα Γ και Δ σε δύο τυχαίες θέσεις, όπως στο σχήμα, τότε αν σημειώσουμε τα συμμετρικά Α′,Β′ των Α,Β ως προς τις Ox, Oy αντίστοιχα.



θα είναι:

$$\mathrm{A\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{B} = \mathrm{A}'\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{B}' \geq$$

$$\mathrm{A}'\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_1 + \Delta_1\mathrm{B}' = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$$

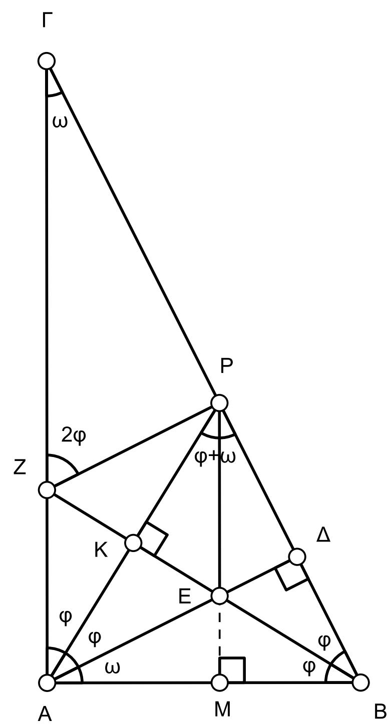
γιατί η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθύγραμμη (η έντονη). Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα Γ_1, Δ_1 που ορίζει η $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ στις πλευρές της γωνίας $\widehat{xOy}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΒΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τεμνει την ΑΔ στο Ε και τη διχοτόμο της γωνίας ΔΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι:*

1. *Οι γωνίες ΑΒΔ και ΔΑΓ είναι ίσες.*
2. *Το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές.*
3. *Η ΡΕ είναι κάθετη στην ΑΒ.*
4. *Το τετράπλευρο ΑΕΡΖ είναι ρόμβος.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=73992#p73992

Λύση (Σταυρουλίτσα)



1. Θα ισχύει $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$ διότι έχουν κάθετες πλευρές ($B\Delta \perp A\Delta$ και $AB \perp A\Gamma$
2. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια επειδή $A\hat{\Delta}B = B\hat{A}\Gamma = 90^o$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι κοινή. Άρα $\Delta\hat{A}B = \hat{\Gamma}$, άρα ως εξωτερική γωνία θα ισχύει $A\hat{P}B = \hat{\Gamma} + \hat{\varphi}$, επίσης $P\hat{A}B = P\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B = \hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = A\hat{P}B$, άρα το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.
3. παρατηρούμε πως $BK \perp PA$ επειδή ΡΑΒ είναι ισοσκελές και ΒΚ διχοτόμος της γωνίας Β, άρα θα είναι και ύψος του τριγώνου, επίσης $A\Delta \perp PB$ άρα το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου και η ΡΕ θα είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΡΑΒ.

4. Στο ΡΖΑΕ η ΚΒ είναι και μεσοκάθετος του τριγώνου ΡΑΒ και τα τριγώνα ΑΖΚ και ΚΑΕ είναι ίσα ΓΠΓ (ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α, ΑΚ κοινή και είναι ορθογώνια) επομένως ΖΚ=ΕΚ (1), ΑΚ=ΚΡ (2) και $AP \perp ZE$ (3), από αυτές τις 3 σχέσεις συμπεραίνουμε πως οι διαγώνιοι είναι κάθετοι και διχοτομούνται, άρα είναι ρόμβος.

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιάννης Τσόπελας) Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \ln(\alpha \ln x) + \frac{\beta}{\ln x} + 1$$

όπου α *ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου με* $\alpha_5 = 11, \alpha_{13} = 35$ *και* β *η μέγιστη τιμή της συνάρτησης*

$$g\left(x\right) = 2\eta\mu x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Υπολογίστε τα α, β *το πεδίο ορισμού της* f*, την μονοτονία, τις ρίζες και το πρόσημό της.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=16118

Λύση (Αλέξης Μιχαλακίδης) Βρίσκουμε πρώτα τα α, β: Για την αριθμητική πρόοδο ισχύει:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4\omega = 11 \\ a_{13} = a_1 + 12\omega = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = a = -1},\ \omega = 3$$

Για τη συνάρτηση $g(x)$ ισχύει: $\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \leq 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow g(x) \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{g_{max} = \beta = 1}$

Άρα η συνάρτηση f πλέον γράφεται: $f(x) = \ln\left(-\ln x\right) + \frac{1}{\ln x} + 1$ με πεδίο ορισμού:

$$\left\{\begin{matrix} x > 0 \\ \\ \ln x > 0 \\ \\ \ln x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x > 0 \\ \\ \ln x < 0 \\ \\ \ln x \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x > 0 \\ \\ \ln x < \ln 1 \\ \\ \ln x \neq \ln 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x > 0 \\ x < 1 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα $\boxed{D_f = (0,1)}$.

Για $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow lnx_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\ln x_1} + 1 > \frac{1}{\ln x_2} + 1 \quad (1)$$

και

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$$
$$-\ln x_1 > -\ln x_2 \Leftrightarrow \ln\left(-\ln x_1\right) > \ln\left(-\ln x_2\right) \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι για $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (0,1)$.

Θέτοντας στην εξίσωση: $\ln\left(-\ln x\right) + \dfrac{1}{\ln x} + 1 = 0$ όπου $\ln x = u$ προκύπτει η $\ln(-u) + \dfrac{1}{u} + 1 = 0$ όπου προφανής λύση είναι η $u = -1$.

Αφού η f στο συγκεκριμένο διάστημα είναι και γνησίως φθίνουσα τότε αυτή η λύση είναι και μοναδική οπότε:

$$u = -1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow$$
$$\ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$$

Αφού ξέρουμε το σημείο που μηδενίζεται η f όσον αφορά το πρόσημο έχουμε:

$$x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \boxed{f\left(x\right) < 0\ \ x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)}.$$

$$x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) > f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \boxed{f\left(x\right) > 0\ \ x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης) Δίνεται η συνάρτηση* f *με τύπο*

$$f\left(x\right) = ln\left(e^x + 1\right)$$

1. *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* f.

2. *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$.

3. *Να λυθεί η εξίσωση* $f\left(\sqrt{3}\eta\mu x\right) = f\left(\sigma\upsilon\nu x\right)$.

4. *Να λυθεί η ανίσωση* $f\left(2x\right) > f\left(x\right)$.

5. *Να δείξετε ότι* $f\left(-x\right) = f\left(x\right) - x$ *για κάθε* $x\epsilon\mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=15299

Λύση (Στάθης Κούτρας) 1) Πρέπει $e^x + 1 > 0 \overset{e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{R} \Rightarrow A_f = \mathbb{R}$, όπου A_f είναι το πεδίο ορισμού της f

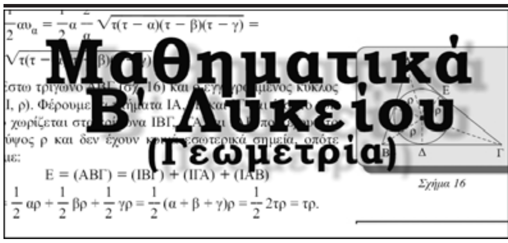
2) Έστω $x_1, x_2 \in A_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Rightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \overset{+1}{\Rightarrow} e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \boxed{f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

3) Είναι $f\left(\sqrt{3}\cdot\eta\mu x\right) = f\left(\sigma\upsilon\nu x\right) \overset{f(\gamma\nu\eta\sigma.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha)\Rightarrow f:1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x}$: (1) Η τελευταία εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζα κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\eta\mu x_0 = 0$ διότι τότε θα είναι $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0 \overset{\eta\mu x_0=0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x_0 = 0 \overset{\eta\mu^2 x_0+\sigma\upsilon\nu^2 x_0=0}{\Rightarrow} \overset{\eta\mu^2 x_0+\sigma\upsilon\nu^2 x_0=1}{\Rightarrow} \boxed{1=0}$ (άτοπο).

Οπότε ισοδύναμα έχουμε: $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \overset{:\eta\mu x}{\Leftrightarrow} \sqrt{3} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$ $\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z}$

4) Είναι $f\left(2x\right) > f\left(x\right) \overset{f(\gamma\nu\sigma.\alpha\xi o\upsilon\sigma\alpha)}{\Leftrightarrow} 2x > x \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$

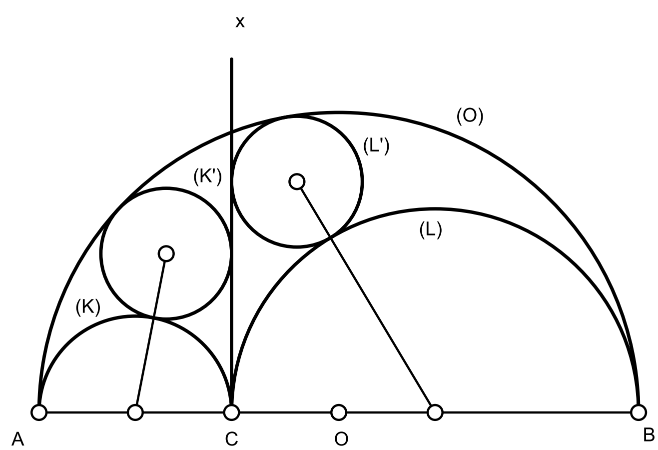
5) Έχουμε : $f\left(-x\right) = \ln\left(e^{-x}+1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) \overset{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\ln\theta_1-\ln\theta_2,\theta_1,\theta_2\in(0,+\infty)}{=} \ln\left(e^x+1\right) - \ln e^x \overset{f(x)=\ln(e^x+1),\ln e^x=x}{\Rightarrow} \boxed{f\left(-x\right) = f\left(x\right) - x}$



Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Σε τυχαίο σημείο* C *της διαμέτρου* AB *ημικυκλίου* (O,R) *φέρνουμε την κάθετη* Cx. *Με διαμέτρους τις* CA *και* CB *γράφουμε ημικύκλια* $(K), (L)$ *αντίστοιχα στο εσωτερικό του ημικυκλίου* (O,R).

Αν $\left(K'\right)$ *είναι ο κύκλος που εφάπτεται του* (K), *του* (O) *και της ημιευθείας* Cx *και* $\left(L'\right)$ *ο κύκλος που εφάπτεται του* (L), *του* (O) *και της ημιευθείας* Cx *να δειχθεί ότι οι κύκλοι* $\left(K'\right)$ *και* $\left(L'\right)$ *είναι ίσοι.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=83913#p83913

Λύση (Φωτεινή Καλδή)

$\bullet K'S \perp AB,\ AC = a,\ CB = b,\ OA = \dfrac{a+b}{2}$

$\bullet\ OK' = OA - r \Rightarrow$

$\boxed{OK' = \dfrac{a+b}{2} - r}, \boxed{KK' = \dfrac{a}{2} + r},$

$OK = OA - KA = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{OK = \dfrac{b}{2}}$

$\bullet\ OS = OC + r = OA - a + r \Rightarrow \boxed{OS = \dfrac{b-a}{2} + r}$

• με θεώρημα Οξείας στο $\triangle\ OKK' \rightarrow (KK')^2 = (OK)^2 + (OK')^2 - 2\,OK\,OS$

• αντικαθιστώντας τις σχέσεις που έχουμε και κάνοντας πράξεις (εδώ είναι αόρατες :)) καταλήγουμε

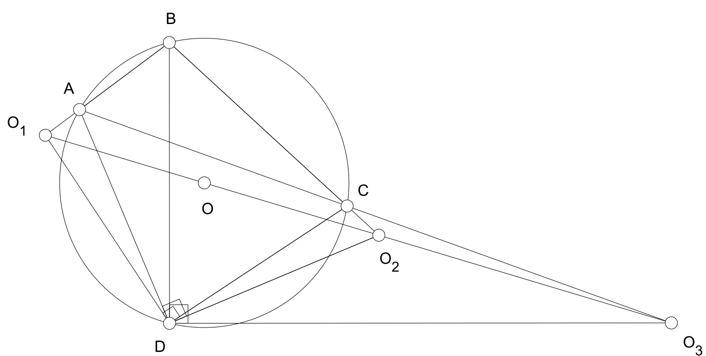
$$\boxed{r = \frac{ab}{2(a+b)}}$$

• αν εργαστούμε ανάλογα και στο $\triangle\ OLL'$ βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{r' = \frac{ab}{2(a+b)}}$$

• άρα οι κύκλοι είναι ίσοι

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O).*
Οι κάθετες στο σημείο D στις $DC, DA,\ DB$ τέμνουν τις ευθείες $AB,\ BC,\ CA$ αντίστοιχα στα σημεία $O_1,\ O_2,\ O_3$. Να δειχθεί ότι τα σημεία $O_1,\ O_2,\ O_3$ ανήκουν σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου (O).



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=83444#p83444

Λύση 1 (Κώστας Βήττας) Ας δούμε μία προσέγγιση βασισμένη στα δύο παρακάτω Λήμματα:
ΛΗΜΜΑ 1. Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω P, τυχόν σημείο στο επίπεδό του. Αποδείξτε ότι οι κάθετες ευθείες επί των $PA,\ PB,\ PC$ στο σημείο P, τέμνουν τις ευθείες $BC,\ AC,\ AB$ αντιστοίχως, σε τρία συνευθειακά σημεία.
Το Λήμμα αυτό έρχεται από το παρελθόν. Υπάρχει και στο βιβλίο Γεωμετρίας του Ν. Κισκύρα (Αυτοέκδοση, Αθήνα 1973), ως προτεινόμενη άσκηση 1019, στη σελίδα 87 του 4ου τόμου.
ΛΗΜΜΑ 2. Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω P τυχόν σημείο του BC που δεν περιέχει το A. Φέρνουμε τις κάθετες ευθείες επί των $PB,\ PC$ στο σημείο P, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες $AC,\ AB$, στα σημεία $E,\ Z$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία EZ περνάει από το περίκεντρο O του $\triangle ABC$.
• Επιστρέφοντας τώρα στο πρόβλημα που έχει τεθεί, σύμφωνα με το Λήμμα 1, τα σημεία $O_1,\ O_2,\ O_3$, ανήκουν στην ίδια ευθεία, έστω (ϵ).

Επειδή το D, θεωρούμενο ως προς το τρίγωνο $\triangle ABC$, ανήκει στον περίκυκλό του (O) και η ευθεία (ϵ) συνδέει τα $O_1,\ O_2$, σύμφωνα με το Λήμμα 2 , περνάει από το περίκεντρο O του δοσμένου εγγραψίμου τετραπλεύρου $ABCD$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.
ΛΗΜΜΑ 1. - Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και έστω P, τυχόν σημείο στο επίπεδό του. Αποδείξτε ότι οι κάθετες ευθείες επί των $PA,\ PB,\ PC$ στο σημείο P, τέμνουν τις ευθείες $BC,\ AC,\ AB$ αντιστοίχως, σε τρία συνευθειακά σημεία. • Έστω $D,\ E,\ Z$, τα σημεία τομής των ευθειών $BC,\ AC,\ AB$ αντιστοίχως, από τις δια του σημείου P κάθετες ευθείες επί των $AP,\ BP,\ CP$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μενελάου , αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1$, (1) Τα τρίγωνα $\triangle PDB$, $\triangle PDC$ έχουν κοινό ύψος και άρα έχουμε $\frac{DB}{DC} = \frac{(PDB)}{(PDC)}$, (2) Ομοίως έχουμε $\frac{EC}{EA} = \frac{(PEC)}{(PEA)}$, (3) και $\frac{ZA}{ZB} = \frac{(PZA)}{(PZB)}$, (4) Από (2), (3), (4), $\Longrightarrow \frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = \frac{(PDB)}{(PDC)}\cdot\frac{(PEC)}{(PEA)}\cdot\frac{(PZA)}{(PZB)}$, (5)
• Από $AP \perp PD$ και $BP \perp PE \Longrightarrow \angle BPD = \angle APE \Longrightarrow \frac{(PDB)}{(PEA)} = \frac{(PD)\cdot(PB)}{(PE)\cdot(PA)}$, (6) (τρίγωνα με γωνία του ενός, ίση με γωνία του άλλου). Από $BP \perp PE$ και $CP \perp PZ \Longrightarrow \angle BPZ = \angle CPE \Longrightarrow \frac{(PEC)}{(PZB)} = \frac{(PE)\cdot(PC)}{(PZ)\cdot(PB)}$, (7) Από $CP \perp PZ$ και $AP \perp PD \Longrightarrow \angle APZ + \angle CPD = 180^o \Longrightarrow \frac{(PZA)}{(PDC)} = \frac{(PZ)\cdot(PA)}{(PD)\cdot(PC)}$, (8) (τρίγωνα με γωνία του ενός, παραπληρωματική γωνίας του άλλου).

Από (5), (6), (7), (8) $\Longrightarrow \frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1$ και το Λήμμα 1 έχει αποδειχθεί.
ΛΗΜΜΑ 2. - Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω P τυχόν σημείο του BC που δεν περιέχει το A. Φέρνουμε τις κάθετες ευθείες επί των $PB,\ PC$ στο σημείο P, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες $AC,\ AB$, στα σημεία $E,\ Z$, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η ευθεία EZ περνάει από το περίκεντρο O του $\triangle ABC$.
• Έστω $H,\ K$, οι προβολές των $E,\ Z$ επί των $PC,\ PB$ αντιστοίχως και $M,\ N$, τα μέσα των τμημάτων $PB,\ PC$, αντιστοίχως.

Από $EP \perp PK$ και $ZP \perp PC \Longrightarrow \angle CPE = \angle ZPK$ και άρα, στα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle HPE$, $\triangle KPZ$, έχουμε ότι $\frac{PH}{PK} = \frac{EH}{ZK}$, (1)

Από εγγράψιμο τετράπλευρο $ABPC$, $\Longrightarrow \angle ACP = \angle ABK$ και άρα, στα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle HCE$, $\triangle KBZ$,

έχουμε ότι $\frac{EH}{ZK} = \frac{CH}{BK}$, (2)

Από (1), (2) $\Longrightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{CH}{BK} \Longrightarrow \frac{PH}{CH} = \frac{PK}{BK} \Longrightarrow \frac{PH}{PH'} = \frac{PK}{BK}$ (3) όπου $PH' = CH$

Από (3) $\Longrightarrow \frac{PH-PH'}{PH'} = \frac{PK-BK}{BK} \Longrightarrow \frac{2HN}{PH'} = \frac{2PM}{BK} \Longrightarrow \frac{HN}{PH'} = \frac{PM}{BK}$, (4)

Από (4) $\Longrightarrow \frac{HN}{HN+PH'} = \frac{PM}{PM+BK} \Longrightarrow \frac{HN}{NP} = \frac{PM}{MK}$, (5)

Από (5), προκύπτει ότι οι δέσμες των παραλλήλων ευθειών δια των σημείων $H,\ N,\ P$ και $P,\ M,\ K$, έχουν ίσους λόγους και σύμφωνα με το Θεώρημα των αναλόγων διαιρέσεων , συμπεραίνεται ότι τα $E,\ O,\ Z$, ως τα σημεία τομής των ομόλογων ευθειών αυτών των δεσμών, είναι συνευθειακά και το Λήμμα 2 έχει αποδειχθεί.

• Υπενθυμίζεται ότι, ως λόγος δέσμης τριών παραλλήλων ευθειών, ορίζεται ο σταθερός λόγος των τμημάτων που ορίζουν τα σημεία τομής των, επί τυχούσας ευθείας η οποία τις τέμνει.

Λύση 2 (Σεραφείμ Τσιπέλλης)

Λήμμα 1. Ορθογώνιο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O). Τα E και F είναι τυχαία σημεία των ελασσόνων τόξων AB και CD. Τα τμήματα EB και FC τέμνονται στο K, ενώ τα EA και FD στο L. Τότε η ευθεία KL διέρχεται από κέντρο O. Έστω S το σημείο τομής των AE και FC και T το σημείο τομής των EB και FD. Τότε $\hat{\psi} = \hat{\zeta}$ (εξωτερική εγγεγραμμένου τετραπλεύρου), όμοια $\hat{\xi} = \hat{\theta}$. Όμως $\hat{\theta} = \hat{\zeta}$ (το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο), άρα $\hat{\psi} = \hat{\xi}$ και το τετράπλευρο $ESTF$ είναι εγγράψιμμο. Τότε $\hat{\mu} = \hat{\eta} = K\hat{C}B \Rightarrow ST \parallel BC \parallel AD$ Έστω ότι η LO τέμνει την EB όχι στο K αλλά στο K' και η CK' τέμνει την AE στο S' (σχήμα). Με εφαρμογή του Θ. Desargues στα ομόλογα τρίγωνα ADL και $CK'B$ προκύπτει ότι $S'T \parallel BC \parallel AD$, συνεπώς το S' ταυτίζεται με το S και το K' με το K .

Λήμμα 2. (παρόμοιο) Ορθογώνιο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O). Τα E και F είναι τυχαία σημεία των ελασσόνων τόξων AD και CD. Τα τμήματα EB και FC τέμνονται στο K, ενώ τα EA και FD στο L. Τότε η ευθεία KL διέρχεται από κέντρο O . Έστω S το σημείο τομής των BE και FD και T το σημείο τομής των EA και FC. Τότε $\hat{\omega} \overset{\lfloor 1 \rfloor}{=} \hat{\varphi} \overset{\lfloor 2 \rfloor}{=} \hat{\theta} \overset{\lfloor 3 \rfloor}{=} \hat{\xi} \overset{\lfloor 4 \rfloor}{=} \hat{\zeta}$, όπου $\lfloor 1 \rfloor$: κατά κορυφή, $\lfloor 2 \rfloor$: εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, $\lfloor 3 \rfloor$: $ABCD$ παραλληλόγραμμο και $\lfloor 4 \rfloor$: εξωτερική γωνία εγγράψιμμου τετραπλεύρου, επομένως $SEFT$: εγγράψιμμο, τότε $S\hat{T}E = S\hat{F}E = E\hat{A}D \Rightarrow ST \parallel AD \parallel BC$.

Έστω ότι η KO τέμνει την EA όχι στο L αλλά στο L' και η DL' τέμνει την BE στο S' (σχήμα). Με εφαρμογή του Θ. Δεσαργυες στα ομόλογα τρίγωνα ADL' και CKB προκύπτει ότι $S'T \parallel BC \parallel AD$, συνεπώς το S' ταυτίζεται με το S και το L' με το L .

Στο θέμα μας. Αν E , F και H είναι τα αντιδιαμετρικά των A , B και C, τότε τα $ACEH$ και $ABEF$ είναι ορθογώνια. Βάσει του πρώτου λήμματος τα σημεία O_1 , $O \cdot O_2$ είναι συνευθειακά. Βάσει του δεύτερου λήμματος τα σημεία O_1 , $O \cdot O_3$ είναι επίσης συνευθειακά. Τελικά O_1 , O , $O_2 \cdot O_3$ είναι συνευθειακά. τεξτσς Σημείωση: Έγινε χρήση του Θ. Desargues όπου οι δύο αντίστοιχες πλευρές των ομόλογων τριγώνων είναι παράλληλες, συνεπώς το τρίτο σημείο ¨φεύγει¨ στο άπειρο, με αποτέλεσμα η ευθεία των τριών σημείων τομής (δύο και το επ' άπειρο σημείο) να είναι παράλληλη των παράλληλων αντίστοιχων πλευρών των ομόλογων τριγώνων.

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Α. Κυριακόπουλος) Έστω η εξίσωση:*

$$\lambda x + \sqrt{4-\lambda^2} \cdot \mathrm{y} - 2 = 0 \ \ (1)$$

1. *Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση (1) παριστάνει μια ευθεία ε_λ. Έστω Σ το σύνολο των αριθμών αυτών.*

2. *Να αποδείξετε ότι όταν το λ διατρέχει το σύνολο Σ, οι ευθείες ε_λ εφάπτονται σε ένα σταθερό κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=5498

Λύση (Α Κυριακόπουλος) 1) Για έναν αριθμό $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) παριστάνει μια ευθεία αν, και μόνο αν:

$$\left\{ \begin{array}{c} 4-\lambda^2 \geq 0 \\ \left(\lambda \neq 0 \vee \sqrt{4-\lambda^2} \geq 0\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 2$$

Άρα: $\Sigma = [2,2]$.

2) Μία ευθεία ε_λ, όπου $\lambda \in \Sigma$, εφάπτεται σε ένα κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}\left(\alpha,\beta\right)$ και ακτίνα $\rho > 0$ αν, και μόνον αν:

$$d(\mathrm{K},\varepsilon_\lambda) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda\alpha + \sqrt{4-\lambda^2}\cdot\beta - 2\right|}{\sqrt{\lambda^2+4-\lambda^2}} = \rho \Leftrightarrow$$

$$\left|\lambda\alpha + \sqrt{4-\lambda^2}\cdot\beta - 2\right| = 2\rho \, (2)$$

Θα βρούμε τους αριθμούς $\alpha,\ \beta$ και ρ, για τους οποίους η ισότητα (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in \Sigma$.

α) Έστω ότι η ισότητα (2) ισχύει για κάθε . Από την (2) με $\lambda = 2$, $\lambda = -2$ και $\lambda = 0$ βρίσκουμε αντίστοιχα ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} |2\alpha - 2| = 2\rho \\ |-2\alpha - 2| = 2\rho \\ |2\beta - 2| = 2\rho \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} |\alpha-1|=\rho \\ |\alpha+1|=\rho \quad \Rightarrow \\ |\beta-1|=\rho \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} |\alpha+1|=|\alpha-1| \\ \rho=|\alpha+1| \qquad \Rightarrow \\ |\beta-1|=\rho \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha=0 \\ \rho=1 \\ (\beta=2 \vee \beta=0) \end{array}\right.$$

β) Αντιστρόφως.

• Έστω ότι $\alpha=0$, $\beta=2$ και $\rho=1$. Τότε, όπως βρίσκουμε εύκολα, η (2) δεν ισχύει για κάθε $\lambda \in \Sigma$.

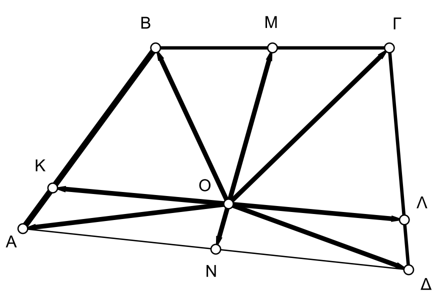
•Έστω ότι $\alpha=\beta=0$ και $\rho=1$. Τότε. όπως βρίσκουμε εύκολα, η (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in \Sigma$. Άρα. όλες οι ευθείες ε_λ, όπου $\lambda \in \Sigma$, εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ρ=1. Η εξίσωσή του είναι: $x^2+y^2=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Δίνεται τετράπλευρο* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *και σημεία* K, Λ *στις πλευρές* $\overline{\mathrm{AB}}$ *καί* $\overline{\Delta\Gamma}$ *αντίστοιχα, έτσι ώστε*

$$\overline{\mathrm{AK}}=\nu\,\overline{\mathrm{AB}}$$
$$\overline{\Delta\Lambda}=\nu\,\overline{\Delta\Gamma}$$

με $0<\nu<1$. *Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των* $\overline{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{K\Lambda}}$ *και* $\overline{\mathrm{A\Delta}}$ *βρίσκονται στην ίδια ευθεία.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=4213



Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ, Ν το μέσο του ΚΛ, Ρ το μέσο του ΑΔ Έχουμε:

$$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{\Lambda\Gamma})=\frac{1-\nu}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma})$$

$$\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{\Delta\Lambda})=\frac{\nu}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma})$$

Άρα

$$\overrightarrow{NM}//\overrightarrow{PN}$$

Επομένως Μ, Ν , Ρ είναι συνευθειακά

Λύση 2 (Γρηγόρης Κωστάκος) Έστωσαν M, O καί N τα μέσα τών $\overline{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{K\Lambda}}$ και $\overline{\mathrm{A\Delta}}$, αντίστοιχα. Επειδή

$$\overline{\mathrm{AK}}=\nu\,\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\overline{\Delta\Lambda}=\nu\,\overline{\Delta\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad (1-\nu)\overline{\mathrm{AK}}=\nu\,\overline{\mathrm{BK}}$$

$$(1-\nu)\overline{\Delta\Lambda}=\nu\,\overline{\Delta\Gamma}$$

$0<\nu<1$, ισχύουν:

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(1-\nu)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\nu\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

καί

$$\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}=(1-\nu)\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}+\nu\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$$

Αλλά

$$-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}} \quad \Leftrightarrow$$

$$-(1-\nu)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\nu\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-\nu)\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}+\nu\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\nu(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}})=(1-\nu)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}) \quad \Leftrightarrow$$

$$2\nu\overrightarrow{\mathrm{ON}}=2(1-\nu)\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1-\nu}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Άρα τα μέσα των $\overline{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overline{\mathrm{K\Lambda}}$ και $\overline{\mathrm{A\Delta}}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Γενικής Παιδείας)

Επιμελητής: Χρήστος Τσιφάκης

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας) Έστω ο δειγματικός χώρος*

$$\Omega=\{1,2,3,4,\}$$

για τα απλά ενδεχόμενα του οποίου ισχύουν

$$P(1)=\frac{P(2)}{2}=\frac{P(3)}{3}=\frac{P(4)}{4}$$

και τα ενδεχόμενα:

$A = \{\kappa \in \Omega |$ *η διακύμανση του δείγματος των αριθμών*

$\kappa, 2\kappa, 4\kappa, 5\kappa$ *είναι μεγαλύτερη του 10*$\}$

$B = \{x \in \Omega$ *όπου* $ln(x^2 - x + 1) > 0\}$

1. *Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του* Ω.
2. *Να αποδείξετε ότι* $A = \{3, 4\}$ *και* $B = \{2, 3, 4\}$
3. *Να βρείτε τις πιθανότητες* $P(A - B)$ *και* $P(A' \cup B)$
4. *Αν* X *ένα ενδεχόμενο του* Ω,*να βρείτε την μικρότερη τιμή της πιθανότητας* $P(X)$ *ώστε* $A \cup X = \Omega$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=14672

Λύση (Ηλίας Καμπελής)

1. Είναι $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \lambda$ Οπότε:

$$P(1) = \lambda$$

$$P(2) = 2\lambda$$

$$P(3) = 3\lambda$$

$$P(4) = 4\lambda$$

Όμως

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = 1 \Rightarrow 10\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

Άρα:

$$P(1) = \frac{1}{10}$$

$$P(2) = \frac{2}{10}$$

$$P(3) = \frac{3}{10}$$

$$P(4) = \frac{4}{10}$$

2. Είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{v} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{v} x_i)^2}{v} \right\} \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{4}\left(46k^2 - \frac{144k^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{5}{2}k^2$$

Πρέπει

$$s^2 > 10 \Rightarrow \frac{5}{2}k^2 > 10 \Rightarrow$$

$$k^2 > 4 \Rightarrow k > 2$$

γιατί $k \in \Omega$. Άρα $k = 3, 4$ δηλαδή $A = \{3, 4\}$ για το B είναι $x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $\Delta = -3 < 0$ Άρα $ln(x^2 - x + 1) > 0 \Rightarrow ln(x^2 - x + 1) > ln1 \Rightarrow x^2 - x + 1 > 1 \Rightarrow x(x-1) > 0$ και αφού $x \in \Omega$ έχουμε $x > 1$ άρα $x = 2, 3, 4$ δηλαδή $B = \{2, 3, 4\}$

3. $A - B = \emptyset \Rightarrow P(A - B) = 0$ και $A' \bigcup B = \{1, 2\} \bigcup \{2, 3, 4\} \Rightarrow A' \bigcup B = \Omega$ άρα$P(A' \bigcup B) = 1$
4. Για να είναι η πιθανότητα $P(X)$ η ελάχιστη δυνατή θα πρέπει το σύνολο X για το οποίο ισχύει $A \bigcup X = B$ να έχει όσο το δυνατόν τα λιγότερα στοιχεία. Επειδή $A = \{3, 4\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$ τότε πρέπει $X = \{2\}$ οπότε $P(X) = P(2) \Rightarrow P(X) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης)* Έστω

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 2010, 2011\}$$

ένας δειγματικός χώρος κάποιου πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + (1 - x)^2$ *με* $x \in \mathbb{R}$ *ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.*
β. Αν $A \subseteq \Omega$ *να βρείτε το πλήθος* $N(A)$ *των στοιχείων του ενδεχομένου A αν γνωρίζετε ότι η παράσταση* $(P(A))^2 + (P(A'))^2$ *έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή.*
γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$ *για κάθε* $x \in [0, 1]$.
δ. Αν $B, \Gamma \subseteq \Omega$ *με*

$$(P(B))^2 + (P(\Gamma))^2 + (P(B'))^2 + (P(\Gamma'))^2 = 2$$

να δείξετε ότι $B = \Gamma$ *ή* $B \cup \Gamma = \Omega$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=15407

Λύση (Παύλος Μαραγκουδάκης) α) Είναι:

$$f'(x) = 2x - 2(1 - x) = 2(2x - 1)$$

για κάθε $x \in R$. Έχουμε $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Επίσης $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$. Όμοια $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ το $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
β) Παρατηρούμε ότι

$$(P(A))^2 + (P(A'))^2 = f(P(A))$$

Ο αριθμός $P(A)$ μπορεί να λάβει τις τιμές

$$0, \frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, ..., \frac{2010}{2011}, 1$$

Άρα για να εντοπίσουμε πότε έχουμε το ελάχιστο της παράστασης

$$(P(A))^2 + (P(A'))^2$$

θα συγκρίνουμε τους αριθμούς

$$f(0), f(\frac{1}{2011}), f(\frac{2}{2011}), ..., f(\frac{2010}{2011}), f(1)$$

Οι αριθμοί

$$0, \frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, ..., \frac{1005}{2011}$$

ανήκουν στο διάστημα $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$ στο οποίο η φ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα από τους αριθμούς

$$0, \frac{1}{2011}, \frac{2}{2011}, ..., \frac{1005}{2011}$$

μικρότερος είναι ο $\frac{1005}{2011}$. Οι αριθμοί

$$\frac{1006}{2011}, \frac{1007}{2011}, ..., \frac{2010}{2011}, 1$$

ανήκουν στο διάστημα $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, στο οποίο η φ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα από τους αριθμούς

$$f(\frac{1006}{2011}), f(\frac{1007}{2011}), ..., f(\frac{2010}{2011}), f(1)$$

μικρότερος είναι ο $f(\frac{1006}{2011})$. Είναι $f(\frac{1005}{2011}) = f(\frac{1006}{2011})$. Άρα η παράσταση $(P(A))^2 + (P(A'))^2$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν $N(A) = 1005$ ή $N(A) = 1006$.

γ) Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 1 = 2x(x-1) + 1$$

. Αρκεί να δείξουμε ότι: $2x(x-1) \leq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Η τελευταία όμως είναι αληθής αφού $x - 1 \leq 0$ και $x \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Γίνεται ισότητα μόνο όταν $x = 0$ ή $x = 1$.

δ) Είναι

$$f(P(B)) + f(P(\Gamma)) =$$

$$(P(B))^2 + (P(B'))^2 + (P(\Gamma))^2 + (P(\Gamma'))^2 = 2$$

Οι αριθμοί $P(B)$ και $P(\Gamma)$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει λόγω του (γ) ερωτήματος

$$f(P(B)) \leq 1(1)$$

και

$$f(P(\Gamma)) \leq 1(2)$$

προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει

$$f(P(B)) + f(P(\Gamma)) \leq 2(3)$$

Η (3) όπως δείξαμε πριν ισχύει ως ισότητα άρα και οι (1) και(2) ισχύουν ως ισότητες. Επομένως $P(B) = 0, 1$, $P(\Gamma) = 0, 1$. Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας $N(B) = 0$ ή $N(B) = 2011$ και $N(\Gamma) = 0$ ή $N(\Gamma) = 2011$. Επομένως τα B, Γ είναι το $\oslash$ ή το Ω. Άρα σε κάθε περίπτωση $B = \Gamma$ ή $B \bigcup \Gamma = \Omega$

Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο barsakis) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του z, όταν οι εικόνες των παρακάτω μιγαδικών είναι σημεία συνευθειακά :*

1. i, z, zi
2. $1, z + i, iz + 1$
3. 1, z, $z^2 + 1$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=14329

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$.

1. Τότε: η εικόνα του μιγαδικού i είναι το σημείο $A(0,1)$, η εικόνα του μιγαδικού z είναι το σημείο $B(x,y)$, η εικόνα του μιγαδικού $zi = (x + yi)i = -y + xi$ είναι το σημείο $\Gamma(-y, x)$. Τότε: $\vec{AB} = (x, y-1), \vec{A\Gamma} = (-y, x-1)$ και τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 \\ -y & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad (I)$$

Για την (Ι) έχουμε: $(-1)^2 + (-1)^2 - 4 \cdot 0 = 2 > 0$, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Επίσης: η εικόνα του μιγαδικού 1 είναι το σημείο $D(1,0)$, η εικόνα του μιγαδικού $z+i$ είναι το σημείο $E(x,y+1)$, η εικόνα του μιγαδικού $zi+1 = -y+xi+1$ είναι το σημείο $Z(-y+1,x)$. Τότε: $\vec{DE} = (x-1,y+1), \vec{DZ} = (-y,x)$ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{DE}//\overrightarrow{DZ} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 \\ -y & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-x+y=0 \quad (II)$$

Για την (II) έχουμε: $(-1)^2+1^2-4\cdot 0 = 2 > 0$, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Επίσης:
η εικόνα του μιγαδικού 1 είναι το σημείο $D(1,0)$,
η εικόνα του μιγαδικού z είναι το σημείο $B(x,y)$,
η εικόνα του μιγαδικού $z^2+1 = x^2-y^2+1+2xyi$ είναι το σημείο $H(x^2-y^2+1, 2xy)$. Τότε: $\vec{DB} = (x-1,y), \vec{DH} = (x^2-y^2, 2xy)$ και τα σημεία Δ, Β, Η είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{DB}//\overrightarrow{DH} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ x^2-y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y(x^2+y^2-2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=0 \text{ ή } x^2+y^2-2x = 0 (III)$$

Για την (III) έχουμε: $(-2)^2+0^2-4\cdot 0 = 4 > 0$, οπότε η (III) εκφράζει κύκλο με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$. Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $x'x$ ή ο κύκλος με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα 1.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο g.liolios) Τα σημεία M_λ και M_1 είναι εικόνες των μιγαδικών $z_\lambda = 2\lambda + 2\lambda i$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z_1 = 3-i$ και M είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου $OM_\lambda MM_1$ (O είναι η αρχή των αξόνων).*

1. *Να βρεθεί εξίσωση της γραμμής στην οποία κινείται το σημείο M που είναι η εικόνα του μιγαδικού $z = x+yi$.*

2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w οταν $w = \frac{1}{z}$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=15367

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Έχουμε $M_\lambda(2\lambda, 2\lambda)$, $M_1(3,-1)$, $M(x,y)$.

1. Αφού το $OM_\lambda MM_1$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε ότι: $\vec{OM_\lambda} = \vec{M_1M} \Leftrightarrow x-3 = 2\lambda, y+1 = \lambda$, οπότε $x-3 = y+1 \Leftrightarrow y = x-4$ και το M κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y = x-4$.

2. Έστω $w = x+yi, x,y \in \mathbb{R}$ και $z = a+(a-4)i, a \in \mathbb{R}$. Τότε:
$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Leftrightarrow x+yi = \frac{a-(a-4)i}{a^2+(a-4)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2+(a-4)^2}, y = \frac{4-a}{a^2+(a-4)^2} (I)$$

   - Αν $a \neq 0$,από τις (I) έχουμε ότι: $\frac{y}{x} = \frac{4-a}{a} \Leftrightarrow ay = 4x-ax \Leftrightarrow a(x+y) = 4x (II)$
   - Αν $x+y = 0$, τότε από την (II) θα πρέπει ξ=0, άρα και ψ=0, που απορρίπτεται αφού $w = \frac{1}{z} \neq 0$.
   - Αν $x+y \neq 0$, τότε από την (II) έχουμε: $a = \frac{4x}{x+y}$, οπότε από τις (I):

$$x\left\{\left(\frac{4x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{4x}{x+y}-4\right)^2\right\} = \frac{4x}{x+y} \Leftrightarrow$$

$$x\left\{\left(\frac{4x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{-4y}{x+y}\right)^2\right\} = \frac{4x}{x+y} \Leftrightarrow$$

$$x\frac{16x^2+16y^2}{(x+y)^2} = \frac{4x}{x+y} \Leftrightarrow$$

$$16x(x^2+y^2) - 4x(x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x(4x^2+4y^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4}$$

   αφού $x \neq 0$ Επομένως ο γ.τ των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\frac{1}{2}$.

   - Αν $a = 0$, από τις (I) προκύπτει $x = 0, y = \frac{1}{4}$, απορρίπτεται

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε*

$$f\left(x-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

1. *Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.*
2. *Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.*
3. *Έστω ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.*
   - *(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.*
   - *(β) Δίνεται μιγαδικός αριθμός z με $|z|=1$, για τον οποίο ισχύει*

     $$f\left(\left|z+\frac{i}{z}\right|\right)+f\left(3\right)=f\left(7\right)$$

     Να βρείτε το $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=3754

Λύση (Χρήστος Καρδάσης)

1. Για $x=y=0$ προκύπτει $f(0)=0$
2. Το πεδίο ορισμού της f είναι συμμετρικό σύνολο και για $x=0$ προκύπτει $f(-y)=-f(y)$, άρα περιττή
3. (α) Έστω $x_1,\ x_2$ πραγματικοί με $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. Τότε $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=0$ οπότε από την εκφώνηση προκύπτει $f\left(x_1-x_2\right)=0$. Όμως η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μοναδική λύση το 0 , άρα $x_1-x_2=0$ και τελικά $x_1=x_2$ δηλ. η φ είναι αντιστρέψιμη

   (β) $f\left(\left|z+\frac{i}{z}\right|\right)=f(7)-f(3)\Leftrightarrow$
   $f\left(\left|z+\frac{i}{z}\right|\right)=f(7-3)\Leftrightarrow$
   $f\left(\left|z+\frac{i}{z}\right|\right)=f(4)$
   Η f είναι $1-1$ άρα $\left|z+\frac{i}{z}\right|=4$ οπότε

   $$\left(z+\frac{i}{z}\right)\left(\overline{z}-\frac{i}{\overline{z}}\right)=16\Leftrightarrow$$

   $$z\overline{z}-\frac{z\,i}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}\,i}{z}+\frac{1}{z\overline{z}}=16$$

   και

   $$1-\frac{z\,i}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}\,i}{z}+1=16\Leftrightarrow$$

   $$-\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)i=14\Leftrightarrow$$

   $$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=7$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δυο συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα:*

$$g(f(x))=x^3$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. *Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη.*
2. *Η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.*
3. *Δεν μπορεί να ισχύει η σχέση $f(g(x))=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=3840

Λύση (Χρήστος Λαζαρίδης)

1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\Rightarrow {x_1}^3={x_2}^3\Rightarrow x_1=x_2$ Άρα, η f είναι «1-1».
2. Είναι

   $$g(x)=y\Leftrightarrow f(g(x))=f(y)\Leftrightarrow$$

   $$x^3=f(y)\Leftrightarrow$$

   $$\left\{\begin{array}{c} x=\sqrt[3]{f(y)},f(y)\geq 0\\ x=-\sqrt[3]{-f(y)},f(y)<0\end{array}\right\}$$

   Άρα, $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.
3. Έστω $f(g(x))=x^2\Rightarrow f(g(f(x)))=f^2(x)\Rightarrow f(x^3)=f^2(x)$
   Για $x=0$, $f(0)=0$ ή $f(0)=1$
   Για $x=1$, $f(1)=0$ ή $f(1)=1$
   Για $x=-1$, $f(-1)=0$ ή $f(-1)=1$
   Αν $f(0)=0, f(1)=1$, $f(-1)=f(0)$ ή $f(-1)=f(1)$
   Αν $f(0)=1$, αντίστοιχα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$x^5 - 5x^6 + 13x^3 - 19x^2 + 16x - 8 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=14780

Λύση 1 (Γιώργος Μανεάδης) Αν

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 19x^2 + 16x - 8$$

η f είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές άρα έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 39x^2 - 38x + 16$$

Η f' παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 78x - 38 = (x-1)(20x^2 - 40x + 38)$$

(το τριώνυμο έχει $\Delta < 0$ οπότε

$$20x^2 - 40x + 38 > 0$$

για κάθε χ στοΡ) Άρα $f''(1) = 0$ και Για $x > 1$ είναι $f''(1) > 0$ Για $x < 1$ είναι $f''(1) < 0$. Επομένως η f' παρουσιάζει στο 1 ελάχιστη τιμή δηλαδή Για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

Λύση 2 (Κώστας Δόρτσιος) Η

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 19x^2 + 16x - 8$$

ως πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστο μια πραγματική ρίζα, έστω την x_1.Υποθέτουμε πως έχει κι άλλη(διαφορετική αυτής), έστω την x_2 Τότε από το Θ.Μ.Τ. θα είναι:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) \Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad (1)$$

όπου:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 39x^2 - 38x + 16 =$$

$$5(x-1)^4 + (9x^2 - 18x + 11) > 0 \quad (2)$$

για κάθε πραγματική τιμή του x διότι είναι άθροισμα δύο ποσοτήτων από τις οποίες η πρώτη είναι:

$$5\,(x-1)^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και δεύτερη το τριώνυμο:

$$9x^2 - 18x + 11 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

γιατί έχει αρνητική διακρίνουσα:

$$\Delta = -72 < 0$$

Έτσι η (1) λόγω της (2) είναι αδύνατη. Συνεπώς η x_1 είναι μοναδική ρίζα.

Λύση 3 (Μιχάλης Λάμπρου) Αλλιώς: Ελέγχουμε ότι το δοθέν ισούται με

$$(x-1)^5 + 3(x-1)^3 + 2x - 4$$

που είναι άθροισμα από τρεις γνήσια αύξουσες, άρα γνήσια αύξουσα. Και λοιπά. Και πάλι αλλιώς: Παραγωγίζουμε την δοθείσα και μετά ελέγχουμε ότι η παράγωγος ισούται με

$$5(x-1)^4 + 9(x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$$

άρα είναι γνήσια αύξουσα, και λοιπά.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=14506

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) Αν δεν ήταν γνήσια φθίνουσα θα υπήρχε $x_0 : f'(x_0) \geq 0$

1. Αν $f'(x_0) > 0$ θα ίσχυε $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x > x_0$ λόγω κυρτότητας(C_f πάνω από την εφαπτομένη της). Άρα $f(x) \to +\infty$ ατοπο

2.Αν $f'(x_0) = 0$ θα υπάρχει $x_1 > x_0 : f'(x_1) > 0$ αφού f' γνησίως αύξουσα μετά όμοια με πριν.

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής και τέτοια ώστε για κάθε* x, y *να ισχύει* $xf(y) + yf(x) \leq 1$.

i) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος μιας τέτοιας συνάρτησης ώστε να ισχύει η ισότητα.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=7522

Λύση (Γιώργος Μανεάδης) Έχουμε

$$I := \int_0^1 f(x)\,dx \overset{x=\eta\mu y}{=}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu y f(\eta\mu y)\,dy \overset{y=\pi/2-t}{=}$$

$$\int_0^{\pi/2} \eta\mu t f(\sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

Έπεται ότι $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu t f(\eta\mu t) + \eta\mu t f(\sigma\upsilon\nu t)\,dt \overset{(*)}{\leq} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I \leq \frac{\pi}{4}$.

$(*)$ Από τη δοθείσα ανισοτική σχέση για $x = \sigma\upsilon\nu t$ και $y = \eta\mu t$.

Η συνάρτηση που ικανοποιεί την ισότητα είναι η $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Στην περίπτωση αυτή, το I εκφράζει το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1, οπότε $I = \frac{\pi}{4}$. Επιπλέον η συνάρτηση f ικανοποιεί την ανισοτική σχέση, αφού για κάθε $x, y \in [0,1]$ είναι

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2} - \sqrt{1-y^2})^2 \geq 0 \\ (\sqrt{y^2} - \sqrt{1-x^2})^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x^2+1-y^2}{2} \geq \sqrt{x^2}\sqrt{1-y^2} = x\sqrt{1-y^2} \\ \frac{y^2+1-x^2}{2} \geq \sqrt{y^2}\sqrt{1-x^2} = y\sqrt{1-x^2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$xf(y) + yf(x) \leq 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης* $I(a) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu^2 x|\,dx$, *όπου* $a > 0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=6836

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Έχουμε $I(a) \overset{x=\pi/2-u}{=} \displaystyle\int_0^{\pi/2} |a\eta\mu(2x) - \eta\mu^2 x|\,dx$, οπότε

$$2I(a) = \int_0^{\pi/2} |a\eta\mu(2x) - \sigma\upsilon\nu^2 x| + |a\eta\mu(2x) - \eta\mu^2 x|\,dx \Rightarrow$$

$$I(a) \overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} |\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x| \overset{(**)}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\,dx - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1}{2}.$$

$(*)$ Από την τριγωνική ανισότητα

$(**)$ Για $x \in [0, \pi/2]$ είναι

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \geq \eta\mu x \Leftrightarrow x \in [0, \pi/4]$$

και

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \leq \eta\mu x \Leftrightarrow x \in [\pi/4, \pi/2].$$

Για $a = 1/2$ τώρα έχουμε :

$$I(a) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\eta\mu(2x)}{2} - \sigma\upsilon\nu^2 x\right| + \left|\frac{\eta\mu(2x)}{2} - \eta\mu^2 x\right|\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| + \eta\mu x|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \eta\mu^2 x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/4} 1+\sigma\upsilon\nu(2x)-\eta\mu(2x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 1-\sigma\upsilon\nu(2x)-\eta\mu(2x)\,dx=\frac{1}{2}$$

άρα η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι $1/2$

Χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι

$$\eta\mu(2x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}$$

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:*

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\quad x\in(0,\pi)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.
β) Να βρείτε της ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{\pi}{2}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=14744

Λύση (Χρήστος Στραγάλης) α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}, x\in(0,\pi)$

• Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=0\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x=0\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}$$

$$x=\frac{\pi}{2}$$

• Λύνουμε την ανίσωση:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow$$

$$\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}>0\overset{\eta\mu^2 x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu x<0\overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow}$$

$$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας:

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$			$\nearrow$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της οπότε:

$$f''(x)=\frac{\eta\mu^3 x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,(-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu^4 x}=$$

$$\frac{\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x}=$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x}>0,\forall x\in(0,\pi)$$

άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

β)Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi)$ οπότε θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στα άκρα του διαστήματος. Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu x}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^-}\frac{1}{\eta\mu x}=+\infty$$

άρα οι ευθείες $x=0$ και $x=\pi$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

γ)

$$f((0,\pi))=f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\cup f\left(\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)=$$

$$\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) \cup \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x\to \pi^-} f(x)\right) =$$

$$[1,+\infty)\cup(1,+\infty)=[1,+\infty)$$

δ)

$$E=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{\eta\mu x}\right|dx \overset{\eta\mu x>0}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu^2\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{2\eta\mu\frac{x}{2}}dx=$$

$$\left[ln\left(2\eta\mu\frac{x}{2}\right)-ln\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ln3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κοίλη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(2)=4$.*
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $x\cdot f'(x)<f(x)$.
β) Αν $h(x)=\int_2^x\frac{f(t)}{t}dt$ με $x>0$, να δείξετε ότι
i) Η $h(x)$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και
ii) $h(x)\le 2x-4$ για κάθε $x>0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=15210

Λύση (Βασίλης Κακάβας) α) Αν θεωρήσουνε το διάστημα $[0,\ x],\ \ x>0$ επειδή f παραγωγίσιμη σύμφωνα με ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(0,\ x)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}$$

και επειδή $\xi<x$ και f κοίλη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' γνήσια φθίνουσα θα ισχύει $f'(\xi)>f'(x)$ άρα

$$\frac{f(x)}{x}>f'(x)\Leftrightarrow f(x)>xf'(x),\ \ x>0$$

β) ι) Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\frac{f(x)}{x},\ \ x>0$$

και επειδή f παραγωγίσιμη λόγω της ισότητας h' παραγωγίσιμη με

$$h''(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\ \ x>0$$

και λόγω του (α) ισχύει $h''(x)<0,\ \ x>0$ άρα η h κοίλη στο $(0,\ +\infty)$
ιι) Θεωρώντας την $g(x)=h(x)-2x+4,\ \ x>0$ είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=h'(x)-2=\frac{f(x)}{x}-2$$

οπότε

$$g'(2)=\frac{f(2)}{2}-2=2-2=0$$

και επειδή $g''(x)=h''(x)<0$ η g' γνήσια φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$ οπότε για $x>2$ ισχύει $g'(x)<g'(2)=0$ άρα g γνήσια φθίνουσα στο $[2,\ +\infty)$ και για $0<x<2$ ισχύει $g'(x)>g'(2)=0$ άρα g γνήσια αύξουσα στο $(0,\ 2]$ επομένως στο $x_0=2$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(2)=h(2)-4+4=0$ άρα $g(x)\le g(2)=0$ και επομένως

$$h(x)-2x+4\le 0,\ \ x>0$$

Σημείωση: Παρόμοια λύση παρέθεσε και ο συνάδελφος Στάθης Κούτρας.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις)

Επιμελητής: Βασίλης Μαυροφρύδης

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ge\max\{f'(x),f'(y)\}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R},\ x\ne y$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&p=82858

Λύση 1 (Νίκος Ζανταρίδης) Έστω

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} & ,\ x\ne\alpha\\ f'(\alpha) & ,\ x=\alpha\end{cases}\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

Είναι:

$$\lim_{x\to\alpha}g(x)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=g(\alpha)$$

οπότε η g είναι συνεχής στο α Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{\alpha\}$ με

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-\alpha)-(f(x)-f(\alpha))}{(x-\alpha)^2}=$$

$$\frac{1}{x-\alpha}(f'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha})$$

Είναι όμως:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq max\left\{f'(x),f'(\alpha)\right\}\geq f'(x),\ \ \forall x\neq\alpha$$

οπότε:

$$f'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0,\ \ \forall x\neq\alpha$$

Επομένως:

$$\begin{cases}1)\ \ g'(x)\leq 0 & ,\ \forall x>\alpha\\ 2)\ \ g'(x)\geq 0 & ,\ \ \forall x<\alpha\end{cases}$$

και επειδή η g είναι συνεχής στο α έπεται ότι η g παρουσιάζει στο α μέγιστο. Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)\leq g(\alpha)$$

Άρα ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq f'(\alpha),\ \ \forall x\neq\alpha$$

Είναι όμως:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq max\left\{f'(x),f'(\alpha)\right\}\geq f'(\alpha),\ \ \forall x\neq\alpha$$

Άρα για κάθε $x\neq\alpha$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'\left(\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha):\quad(1)$$

Η (1) ισχύει και για $x=\alpha$ άρα:

$$f(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(a),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή: $f(x)=\kappa x+\lambda,\quad x\in\mathbb{R}$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ οποιεσδήποτε σταθερές. (ικανοποιεί την υπόθεση)

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται συνάρτηση f με την ιδιότητα*

$$f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:
i) Οι x,y είναι ομόσημοι
ii) Οι x,y είναι ετερόσημοι.
δ) Αν η f έχει αρχική, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη, ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt,x\in\mathbb{R}$$

και να βρείτε τον τύπο της, αν $f(1)=2012$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&p=82979

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) α) Στη δοσμένη σχέση θέτουμε $x=y=0$, και άμεσα προκύπτει ότι $f\left(0\right)=0$.
β)Στη δοσμένη σχέση θέτουμε $y=x$ και $y=-x$, οπότε προκύπτει ότι

$$2xf\left(x\right)=f\left(2x^2\right)=xf\left(x\right)-xf\left(-x\right)$$

δηλαδή

$$xf\left(-x\right)=-xf\left(x\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Για $x\neq 0$ προκύπτει ότι

$$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$$

Η σχέση αυτή όμως ισχύει και για $x=0$, οπότε η f είναι περιττή.
γ) (i) Έστω $x,y>0$. Τότε, είναι

$$f\left(x+y\right)=$$

$$f\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right)=$$

$$\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{y}f\left(\sqrt{y}\right)=$$

$$f\left(x\right)+f\left(y\right)$$

αφού

$$f\left(x\right)=$$

$$f\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+0^2\right)=$$

$$\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)$$

Έστω ότι $x,y<0$. Τότε, είναι

$$f\left(x+y\right)=$$

$$-f\left(\left(-x\right)+\left(-y\right)\right)=$$

$$-\left[f\left(-x\right)+f\left(-y\right)\right]=$$

$$-f\left(-x\right)-f\left(-y\right)=$$

$$f\left(x\right)+f\left(y\right)$$

γ) (ii) Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x>0$ και $y<0$. Από την προηγούμενη περίπτωση έπεται ότι $f\left(a-b\right)=f\left(a\right)-f\left(b\right)$ για κάθε $a,b>0$ τέτοιους, ώστε

$a-b>0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• $x+y>0$ Τότε, έχουμε ότι

$$f(x+y)=f(x-(-y))=$$

$$f(x)-f(-y)=$$

$$f(x)+f(y)$$

• $x+y<0$ Τότε, έχουμε ότι

$$f(x+y)=$$

$$-f(-(x+y))=$$

$$-f((-y)-x)=$$

$$-[f(-y)-f(x)]=$$

$$-f(-y)+f(x)=$$

$$f(x)+f(y)$$

• $x+y=0$ Τότε είναι

$$f(x+y)=f(0)=0$$

$$=f(x)-f(x)=$$

$$f(x)+f(-x)=$$

$$f(x)+f(y)$$

δ) Έστω G μια αρχική της f. Θεωρούμε τυχαίο $x\in\mathbb{R}$ και θέτουμε, για κάθε $y\in\mathbb{R}$,

$$g(y):=$$

$$G(x+y)-G(x)-yf(x)-G(y)+G(0)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (ως προς y) στο $\mathbb{R}$, με

$$g'(y)=$$

$$G'(x+y)-f(x)-G'(y)=f(x+y)-f(x)-f(y)=0$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Επομένως, η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, με τιμή

$$g(0)=G(x)-G(x)-G(0)+G(0)=0$$

Είναι, λοιπόν, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

$$G(x+y)-G(x)-yf(x)-G(y)+G(0)=0$$

Παίρνοντας ένα σταθερό $y\neq 0$, βρίσκουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{y}\left[G(x+y)-G(x)-G(y)+G(0)\right]\quad(1)$$

Από τη σχέση αυτη προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε τώρα $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, οπότε είναι $G(x)=F(x)+c$, με $c\in\mathbb{R}$ σταθερά. Θέτοντας $x=0$, βρίσκουμε ότι $c=G(0)$, οπότε παίρνοντας $y=1$ στη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$f(x)=G(x+1)-G(x)-G(1)+G(0)=$$

$$F(x+1)+G(0)-F(x)-G(0)-F(1)-G(0)+G(0)=$$

$$=F(x+1)-F(x)-F(1)=\int_x^{x+1}f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt\quad(2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x+1)-f(x)=f(1)=2012$ και άρα $f(x)=2012x+k$, όπου $k\in\mathbb{R}$ σταθερά. Αφού, όμως, είναι $f(0)=0$, θα είναι και $k=0$, οπότε τελικά

$$\boxed{f(x)=2012x}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Juniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$(x-y)f(x) + h(x) - xy + y^2 \le h(y) \le$$

$$(x-y)g(x) + h(x) - xy + y^2$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=16177

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Θέτουμε όπου x το 0 στην αρχική και παίρνουμε:

$$-yf(0)+h(0)+y^2 \le h(y) \le -yg(0)+h(0)+y^2, \forall\, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

οπότε

$$-yf(0) + h(0) + y^2 \le -yg(0) + h(0) + y^2, \forall\, y \in \mathbb{R}$$

απ' όπου

$$yf(0) \ge yg(0), \forall\, y \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε στην τελευταία διαδοχικά όπου y το 1 και το -1 και παίρνουμε τελικά

$$f(0) = g(0) \quad (2)$$

Από την (1) και λόγω της (2) παίρνουμε αφενός

$$h(y) \ge h(0) - yf(0) + y^2, \forall\, y \in \mathbb{R}$$

και αφετέρου

$$h(y) \le h(0) - yf(0) + y^2, \forall\, y \in \mathbb{R}$$

απ' όπου τελικά

$$\boxed{h(x) = h(0) - xf(0) + x^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ (3)}$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην αρχική σχέση και θέτουμε στην αριστερή ανισότητα διαδοχικά όπου y το $x+1$ και το $x-1$ και παίρνουμε

$$f(x) \ge f(0) - x, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

και

$$f(x) \le f(0) - x, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

αντίστοιχα, απ' όπου τελικά

$$\boxed{f(x) = f(0) - x, \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

Θέτουμε τώρα στην δεξιά ανισότητα διαδοχικά όπου y το $x+1$ και το $x-1$ και ακριβώς όμοια όπως πριν παίρνουμε τελικά

$$\boxed{g(x) = f(0) - x, \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν τη δοσμένη αρχική ανισότητα άρα είναι και οι ζητούμενες.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για κάθε θετικό ακέραιο n να αποδειχθεί ότι*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < 3$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=16099

Λύση 1 (Κώστας Τσουβαλάς) Βγάζοντας $\ln$, αρκεί:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+2^{-i}\right) < \ln 3$$

Από την ανισότητα Θενσεν:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+2^{-i}\right) \leqslant n \ln\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\right)$$

Αρκεί λοιπόν

$$\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\right)^n < 3$$

και επειδή

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = 1 - 2^{-n}$$

αρκεί

$$n \ln\left[1+\frac{1}{n}\left(1-2^{-n}\right)\right] < \ln 3$$

Όμως

$$n \ln\left[1+\frac{1}{n}\left(1-2^{-n}\right)\right] \leqslant 1 - 2^{-n} < \ \ln e < \ln 3$$

Λύση 2 (Αλέξανδρος Συγκελάκης)Η απόδειξη μπορεί να γίνει και ως εξής:

Αποδεικνύουμε την ισχυρότερη ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<3-\frac{1}{n}$$

με επαγωγή.

Για $n=1,2,3,4,5$ ισχύει.

Για $n\geq 6$ καταλήγουμε στην

$$2^{n+1}\geq (3n-1)(n+1)$$

που ισχύει (πάλι με βοήθεια επαγωγής).

Λύση 3 (Σιλουανός Μπραζιτίκος)Παρόμοια μάλλον με την πρώτη λύση είναι και αυτή! Από ΑΜ-ΓΜ έχουμε : Αποδεικνύουμε την ισχυρότερη ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)...\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$<\left(\frac{n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}}{n}\right)^n<\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e$$

Λύση 4 (Νίκος Ζανταρίδης) Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\ln(1+x)<x$$

Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$$

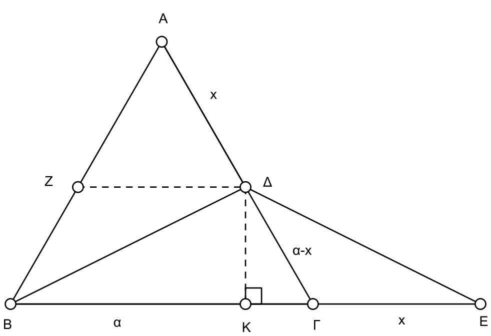
$$\Rightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right)<\ln\left(e^{1-\frac{1}{2^n}}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<e^{1-\frac{1}{2^n}}<e<3$$

Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle\ AB\Gamma$ και σημείο Δ στην πλευρά $A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E, τέτοιο ώστε $\Gamma E=A\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $\Delta B=\Delta E$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=5101



Λύση 1 (Μαργαρίτα Βαρελά) Θέτουμε $A\Delta=\Gamma E=x$ και $AB=B\Gamma=\Gamma A=a$ και $\Delta\Gamma=a-x$.

Από τον κανόνα του συνημιτόνου στα τρίγωνα $\triangle\ B\Gamma\Delta$ και $\triangle\ \Delta\Gamma E$ έχουμε :

$$\Delta B^2=(a-x)^2+a^2-2a(a-x)\cos 60^o=a^2+x^2-ax\ ,(1)$$

$$\Delta E^2=(a-x)^2+x^2-2x(a-x)\cos 120^o=a^2+x^2-ax\ ,(2)$$

Από (1), (2) $\Longrightarrow B\Delta=\Delta E$.

Λύση 2 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Παίρνουμε σημείο K πάνω στην $B\Gamma$ που είναι τέτοιο ώστε $\Delta K=\Delta\Gamma$. Τότε το τρίγωνο $\triangle\ \Delta K\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Τα τρίγωνα $\triangle\ A\Delta K$ και $\triangle\ E\Gamma\Delta$ είναι ίσα (διότι $\angle\Delta\Gamma E=\angle A\Delta K=120^o$ και $A\Delta=\Gamma E$ και $\Delta K=\Delta\Gamma$) και άρα $AK=\Delta E\ ,(1)$ Τα τρίγωνα $\triangle\ AK\Delta$ και $\triangle\ B\Delta K$ είναι ίσα (διότι $\angle A\Delta K=\angle BK\Delta=120^o$ και $K\Delta$ κοινή και $BK=B\Gamma-K\Gamma=A\Gamma-\Delta\Gamma=A\Delta$) και άρα $AK=B\Delta\ ,(2)$ Από (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

Λύση 3 (Μίλτος Παπαγρηγοράκης) Έστω Z το σημείο επί της AB, ώστε να είναι $\Delta Z\parallel B\Gamma$. Τα τρίγωνα $\triangle\ B\Delta Z$ και $\triangle\ \Delta\Gamma E$ είναι ίσα (γιατί έχουν $\Delta Z=A\Delta=\Gamma E$ και $ZB=\Gamma E$ και $\angle\Delta ZB=\angle\Delta\Gamma E$) και άρα συμπεραίνεται το ζητούμενο $\Delta B=\Delta E$.

Λύση 4 (Στέλιος Κωνσταντινίδης) Έστω K το ίχνος της κάθετης από το Δ στη $B\Gamma$ και από

$$\angle K\Delta\Gamma=30^o\Longrightarrow$$

$$K\Gamma=\frac{\Delta\Gamma}{2}$$

Οπότε,

$$BK = A\Gamma - K\Gamma = A\Gamma - \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{A\Delta}{2} \quad ,(1)$$

και

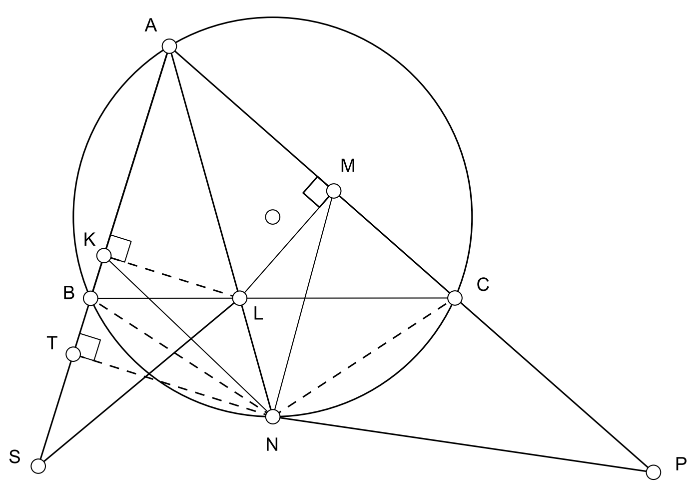
$$KE = K\Gamma + \Gamma E = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} + A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{A\Delta}{2} \quad ,(2)$$

Από (1), (2) $\Longrightarrow BK = KE$ και άρα το τρίγωνο $\triangle\ \Delta BE$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Σε οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle\ ABC$ η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\angle A$ τέμνει τη BC στο L και τον περιγεγραμμένο κύκλο στο N. Από το L φέρουμε κάθετες προς τις AB, AC και έστω K, M τα ίχνη τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AKNM$ και το τρίγωνο ABC έχουν ίσα εμβαδά.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=12810

Λύση 1 (Δημήτρης Ιωάννου) Προεκτείνω την πλευρά AC κατά $CP = AB$ και το τμήμα AK κατά $KS = AK = AM$.



Τότε τα τρίγωνα $\triangle\ ABN$ και $\triangle\ PCN$ είναι ίσα (από $AB = PC$ και $BN = CN$ και $\angle ABN = \angle PCN$)

και ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ AML$ και $\triangle\ SKL$ είναι ίσα (από $AM = AK = SK$ και $ML = KL$).

Από τις ισότητες αυτών των τριγώνων προκύπτει $\angle CPN = \angle KSL = \dfrac{\angle A}{2}$

Έτσι, από τα όμοια ισοσκελή τρίγωνα $\triangle\ ANP$ και $\triangle\ ALS$ έχουμε $\dfrac{AS}{AP} = \dfrac{AL}{AN} \Longrightarrow \dfrac{2(AK)}{AB + AC} = \dfrac{AL}{AN}$,(1)

Τα τρίγωνα $\triangle\ AKN$, $\triangle\ AMN$ είναι ίσα, γιατί έχουν κοινή πλευρά την AN και $AK = AM$ και $\angle KAN = \angle MAN = \dfrac{\angle A}{2}$

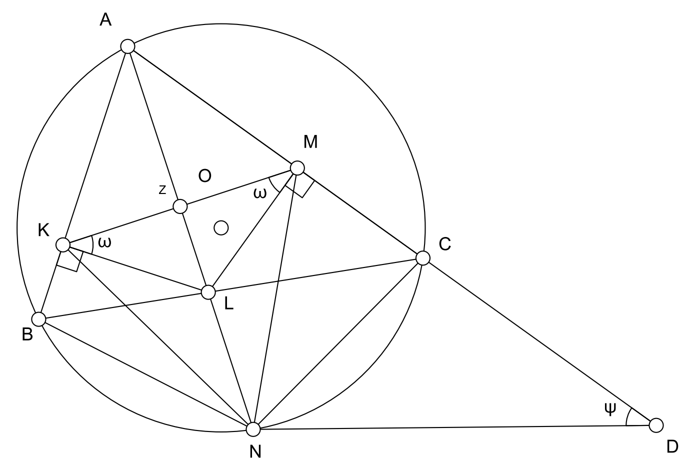
και επομένως ισχύει $(AKNM) = 2(AKN) = (AK)(NT)$,(2) όπου T είναι η προβολή του N επί της ευθείας AB.

Για το τρίγωνο $\triangle\ ABC$ ισχύει $(ABC) = (ABL) + (ACL) = \dfrac{1}{2}(LK)(AB + AC)$,(3)

Από $KL \parallel TN \Longrightarrow \dfrac{AL}{AN} = \dfrac{LK}{NT}$,(4)

Από (1), (2), (3), (4) $\Longrightarrow \dfrac{(AKNM)}{(ABC)} = \dfrac{2(AK)(NT)}{(LK)(AB + AC)} = \dfrac{AL}{AN} \cdot \dfrac{NT}{LK} = 1 \Longrightarrow (AKNM) = (ABC)$

Λύση 2 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Προεκτείνουμε την AC κατά μήκος $CD = AB$ και άρα τα τρίγωνα $\triangle\ ABN$, $\triangle\ DCN$ είναι ίσα, διότι $AB = CD$ και $BN = NC$ και $A\hat{B}N = N\hat{C}D$ (γωνίες ίσες λόγω του εγγράψιμμου τετραπλεύρου $ABNC$).



Επομένως $\hat{\psi} = \dfrac{\hat{A}}{2}$ και το τρίγωνο $\triangle\ ANC$ είναι ισοσκελές με γωνία βάσης $\dfrac{\hat{A}}{2}$.

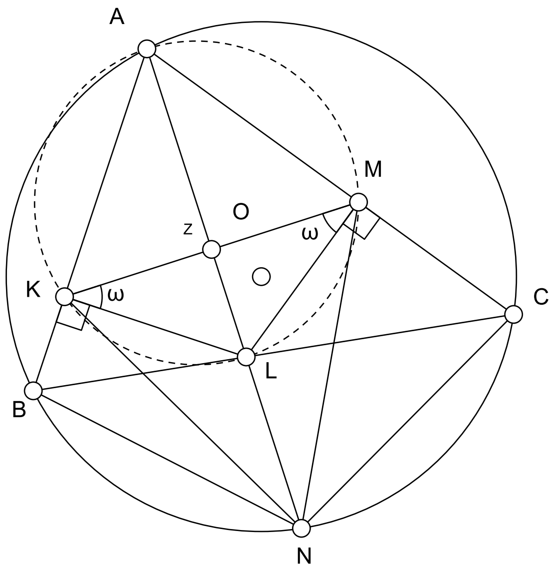
Το ίδιο ισχύει όμως και για το τρίγωνο $\triangle\ KLM$ διότι $\hat{\omega} = \dfrac{\hat{A}}{2}$ (λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $AKLM$).

Τότε, $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{LM}{KM} \Longrightarrow (AN)(KM) = (LM)(AB + AC) \Longrightarrow (AN)(ZM + ZK) = (AB)(LK) + (AC)(LM)$
$\Longrightarrow \dfrac{1}{2}(AN)(ZM) + \dfrac{1}{2}(AN)(ZK) = \dfrac{1}{2}(AB)(LK) + \dfrac{1}{2}(AC)(LM) \Longrightarrow \boxed{(AKNM) = (ABC)}$

Λύση 3 (Θάνος Μάγκος) Η λύση αυτή βασίζεται στη σχέση

$$AN = \frac{bc}{w_a} \quad (1)$$

η οποία προκύπτει άμεσα από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle\ ABL$, $\triangle\ ANC$, όπου w_a είναι η διχοτόμος AL.



Το τετράπλευρο $AKNM$ έχει κάθετες διαγώνιες λόγω της διχοτόμου AL και $AK = AM$ και άρα ισχύει

$$(AKNM) = \frac{1}{2}(AN)(KM)\,(2)$$

Το τετράπλευρο $AKLM$ είναι προφανώς εγγράψιμο σε κύκλο με διάμετρο το AL και επομένως ισχύει

$$KM = w_a \sin A \;\; (3)$$

Από (1), (2), (3) $\Longrightarrow (AKNM) = \dfrac{1}{2} w_a \sin A \cdot \dfrac{bc}{w_a} = (ABC)$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Seniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να βρεθούν οι θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ώστε*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2 + a_{k+1}^2 + 2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

(όπου $a_{n+1} = a_1$).

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=12332

Λύση 1 (Κώστας Τσουβαλάς) Εύκολα παρατηρούμε από την ανισότητα Andreescu (από CS) ότι:

$$\frac{1}{4a_1^2+4} + \frac{1}{4a_2^2+4} \geqslant \frac{1}{a_1^2+a_2^2+2},$$
$$\frac{1}{4a_2^2+4} + \frac{1}{4a_3^2+4} \geqslant \frac{1}{a_2^2+a_3^2+2},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{4a_1^2+4} + \frac{1}{4a_n^2+4} \geqslant \frac{1}{a_1^2+a_n^2+2}.$$

Άρα προσθέτοντας κατά μέλη θα λάβουμε:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2 + a_{j+1}^2 + 2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2a_j^2 + 2}.$$

Όμως $\dfrac{1}{4a_i} \geqslant \dfrac{1}{2a_i^2+2} \Leftrightarrow (a_i - 1)^2 \geqslant 0$

για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Άρα το πρώτο μέλος της δεύτερης σχέσης είναι: $\leqslant \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}$.

Επειδή έχουμε ισότητα θα πρέπει:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Και από την σχέση (1) προκύπτει η μοναδική λύση:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (1, 1, \ldots, 1)$$

Λύση 1 (Βαγγέλης Μουρούκος) Από την ανισότητα αριθμητικού-αρμονικού μέσου έχουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $a_{n+1} = a_1$,

$$a_i^2 + a_{i+1}^2 + 2 \geq 2\left(a_i + a_{i+1}\right) \geq \frac{8}{\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}}$$

με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν $a_i = a_{i+1}$. Επομένως, είναι

$$\frac{1}{a_i^2 + a_{i+1}^2 + 2} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_i + 1}\right)$$

και με πρόσθεση των παραπάνω ανισοτήτων για $i = 1, 2, \ldots, n$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2 + a_1^2 + 2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),$$

με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Ώστε, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (1, 1, \ldots, 1).$$

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) (Ανισότητα Turkevici) Αν $x, y, z, t > 0$, να αποδειχθεί, ότι*

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + z^2x^2 + y^2t^2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=15643

Λύση (Võ Quoc Bá Can, φοιτητής ιατρικής από το Βιετνάμ) Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x \geq y \geq z \geq t > 0$. Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left(x^2 - z^2\right)^2 + \left(y^2 - z^2\right)^2 + \left(x^2 - t^2\right)^2 + \left(y^2 - t^2\right)^2 \geq 2\left(xy - zt\right)^2 \quad (1)$$

Στην προφανή ανισότητα $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$ θέτουμε $a := x^2 - t^2$ και $b := y^2 - t^2$, οπότε προκύπτει:

$$\left(x^2 - t^2\right)^2 + \left(y^2 - t^2\right)^2 \geq \frac{\left(x^2 + y^2 - 2t^2\right)^2}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (προφανείς) ανισότητες $x^2 + y^2 \geq 2xy$ και $xy - t^2 \geq xy - zt \geq 0$, η (2) δίνει ότι

$$\begin{aligned}\left(x^2 - t^2\right)^2 + \left(y^2 - t^2\right)^2 &\geq \frac{\left(2xy - 2t^2\right)^2}{2}\\ &= 2\left(xy - t^2\right)^2\\ &\geq 2(xy - zt)^2,\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει άμεσα η αποδεικτέα ανισότητα (1), και μάλιστα με πολύ «περιθώριο ενίσχυσης».

ΣΧΟΛΙΑ: (1) Η παραπάνω λύση γράφτηκε από το Βαγγέλη Μουρούκο.

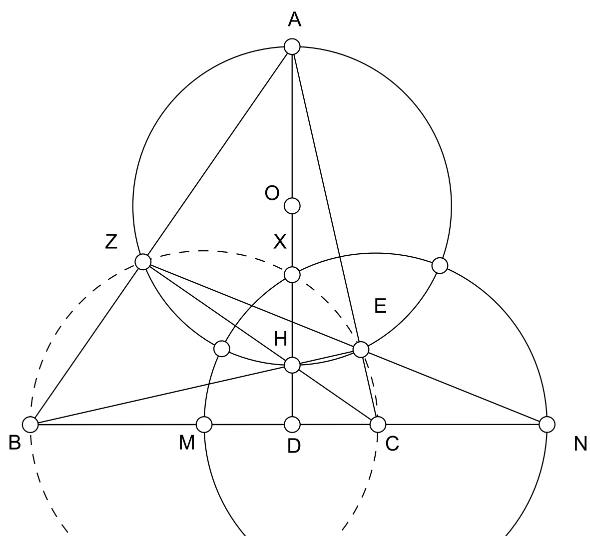
(2) Λύσεις δόθηκαν επίσης από το Γιώργο Μπασδέκη και το Γιώργο Μπαλόγλου.

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Σε τρίγωνο $\triangle\, ABC$, $(AB \neq AC)$, φέρνουμε τα ύψη του AD, BE, CZ και έστω H το ορθόκεντρό του. Αν M είναι το μέσο της πλευράς BC και N το σημείο τομής των ευθειών ZE και BC, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (C) διαμέτρου AH και ο κύκλος (C') διαμέτρου MN τέμνονται ορθογωνίως.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=15908

Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας)

Έστω X το σημείο τομής του ύψους AD από τον κύκλο (C') διαμέτρου MN και O το μέσον του AH. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $BCEZ$, $AEHZ$ έχουμε $MB = MC = ME = MZ = \dfrac{BC}{2}$ και $OA = OH = OE = OZ = \dfrac{AH}{2}$



Επίσης έχουμε $\angle OEM = \angle OEH + \angle HEM = \angle OHE + \angle HBD = 90^o \Longrightarrow OE \perp EM$ και ομοίως $OZ \perp ZM$ Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\, XMN$ έχουμε $(MX)^2 = (MD)(MN)\ \ ,(1)$ Από το πλήρες τετράπλευρο $AEZHBC$ έχουμε ότι τα N, B, D, C, συνιστούν Αρμονική σημειοσειρά και σύμφωνα με το Θεώρημα Newton, ισχύει $(MB)^2 = (MC)^2 = (MD)(MN)\ \ ,(2)$ Από (1), $(2) \Longrightarrow MX = MB = MC$ και άρα, το σημείο $X \equiv AD \cap (C')$, ανήκει στον κύκλο (M) διαμέτρου BC. Επομένως, η ευθεία AD ταυτίζεται με τον Ριζικό άξονα των κύκλων (C'), (M) και επειδή ο κύκλος (C) με διάμετρο το AH (που έχει το κέντρο του O επί αυτής της ευθείας), τέμνει ορθογωνίως τον κύκλο (M) (από $OE \perp EM$), συμπεραίνεται ότι τέμνει ορθογωνίως και τον κύκλο (C').

Λύση 2 (Γιώργος Ροδόπουλος) Τα Z, E, C, B, ανήκουν στον κύκλο (C_1) κέντρου M, αφού $MZ = ME = MC = MB$ Επειδή $AB \neq AC$, ο κύκλος (C') τέμνει την AM, έστω στο K. Συνεπώς

$$NK \perp AM\ \ ,(1)$$

Η Πολική ευθεία του A ως προς τον κύκλο (C_1) είναι η NH και άρα

$$NH \perp AM\ \ ,(2)$$

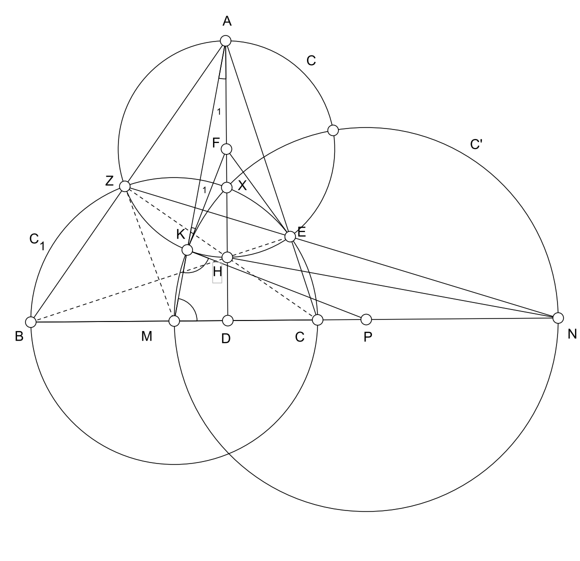
Από (1) και (2) προκύπτει ότι τα σημεία N, H, K είναι συνευθειακά οπότε $H\hat{K}A = 90^o$, δηλαδή το K είναι σημείο του κύκλου (C).

Έστω F το μέσο του AH και P το μέσο του MN.

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$P\hat{K}F = 90^o \Leftarrow \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 90^o \Leftarrow \hat{A}_1 + \hat{M}_2 = 90^o\ ,$$

που ισχύει.

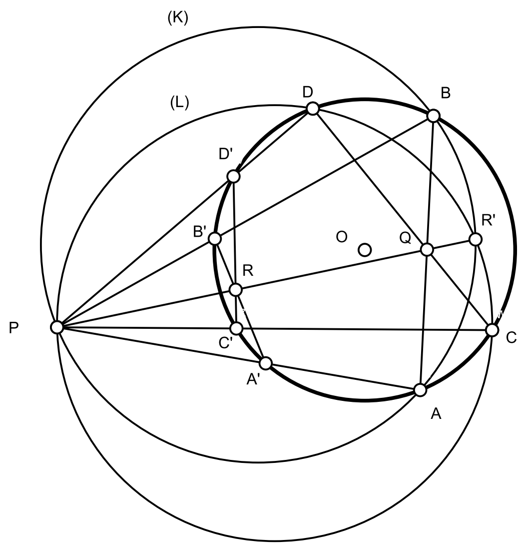


ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Κώστας Βήττας) Δίνεται κύκλος (O) και έστω P, σταθερό σημείο εκτός αυτού. Θεωρούμε*

μεταβλητή χορδή AB του (O), ώστε η ευθεία AB να περνάει από σταθερό σημείο, έστω Q. Αποδείξτε ότι η ευθεία $A'B'$, όπου $A' \equiv (O) \cap PA$ και $B' \equiv (O) \cap PB$, περνάει από σταθερό σημείο έστω R, επί της ευθείας PQ.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=16476

Λύση (Παναγιώτης Λώλας) Θεωρούμε την Αντιστροφή με πόλο το σημείο P και δύναμη $u^2 = (PO)^2 - r^2$ (= τη δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O)), η οποία απεικονίζει τον κύκλο (O) στον εαυτό του.



Η Αντιστροφή αυτή απεικονίζει το σημείο $R \equiv A'B' \cap C'D'$ στο δεύτερο εκτός του P κοινό σημείο έστω R', των περικύκλων (K), (L) των τριγώνων $\triangle\ PAB$, $\triangle\ PCD$, ως των αντίστροφων σχημάτων των ευθειών $A'B'$, $C'D'$, αντιστοίχως.

Τα σημεία P, R, R' είναι προφανώς συνευθειακά, ορίζουν τον Ριζικό άξονα των κύκλων (K), (L) και προκύπτει άμεσα ότι το σταθερό σημείο Q ανήκει στην ευθεία αυτή, από της ισότητα $(QA)(QB) = (QC)(QD)$ που ισχύει στο εγγράψιμο τετράπλευρο $ACBD$.

Αποδεικνύεται ότι το $R' \equiv (K) \cap (L)$ είναι σταθερό σημείο επί της ευθείας PQ, από την σχέση

$$(QR')(QP) = (QA)(QB) \ \ ,(1)$$

ως τη δύναμη του σημείου Q στον κύκλο (K).

Επειδή τώρα, λόγω της αντιστροφής που έχει θεωρηθεί, ισχύει και

$$(PR)(PR') = (PA')(PA)$$

συμπεραίνεται ότι το R είναι επίσης σταθερό σημείο επί της ευθείας PQ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Σιλουανός Μπραζιτίκος - Θέμα 28ης BMO) Δίνονται οι πραγματικοί x, y, z ώστε $x+y+z = 0$. Να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=80514

Λύση (Στραγάλης Χρήστος) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι: $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ και έτσι έχουμε:

$$2x^2 \geq y^2 + z^2 \ \ (*)$$

Άρα κάνοντας χρήση της ανισότητας $C - S$ έχουμε:

$$\frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} =$$

$$\left(\frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{z(z+2)}{2z^2+1} + \frac{1}{2}\right) - 1 =$$

$$\frac{(2y+1)^2}{2(2y^2+1)} + \frac{(2z+1)^2}{2(2z^2+1)} - 1 \geq$$

$$\frac{\left[(2y+1)+(2z+1)\right]^2}{4(y^2+z^2)+4} - 1 =$$

$$\frac{(1-x)^2}{y^2+z^2+1} - 1 \overset{(*)}{\geq}$$

$$\frac{(1-x)^2}{2x^2+1} - 1 = -\frac{x(x+2)}{2x^2+1}$$

άρα

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$(x,y,z)=(0,0,0)\,,$$

$$\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p τέτοιους ώστε ο αριθμός p^3+p^2+p+1 να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=68902

Λύση (Κώστας Σφακιανάκης) Εστω $m\in\mathbb{N}$ τότε:

$$p^3+p^2+p+1=m^2\Rightarrow$$

$$(p^2+1)(p+1)=m^2\ \ (1)$$

Θέτω $(p^2+1,p+1)=d$.Τότε

$$d|(p+1)^2-(p^2+1)\Rightarrow d|2p$$

Ομως $(p,p+1)=1\Rightarrow(p,d)=1$ και άρα

$$d|2\ \ (2)$$

Για $p=2$, δεν έχω λύση. Οπότε p περιττός πρώτος κι επομένως $2|p+1,\ 2|p^2+1$ και λόγω της (2) θα είναι

$$\left(\frac{p+1}{2},\frac{p^2+1}{2}\right)=1\ \ (3)$$

Θέτω $m=2k$ και η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p^2+1}{2}=k^2\ (4)$$

Λόγω των (3) και (4) θα είναι για

$$q,r\epsilon N\ \ p+1=2q^2\ \ (5)$$

$$p^2+1=2r^2\ \ (6)$$

Αφαιρούμε τις σχέσεις (6) και (5) κατά μέλη και παίρνουμε:$p(p-1)=2(r-q)(r+q)$. Επειδή π περιττός πρώτος και $r-q<p$ λόγω της παραπάνω σχέσης θα είναι:

$$p|r+q\Rightarrow r+q\geq p\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}}\geq p\Rightarrow$$

$$(\sqrt{p+1}+\sqrt{p^2+1})^2\geq 2p^2\Rightarrow$$

$$2\sqrt{(p+1)(p^2+1)}\geq p^2-p-2\Rightarrow$$

$$4(p+1)(p^2+1)\geq p^4+p^2+4-4p^2-2p^3+4p\Rightarrow$$

$$6p^3+7p^2\geq p^4\Rightarrow$$

$$6p+7\geq p^2\Rightarrow$$

$$p\leq 7$$

Με έναν απλό έλεγχο βρίσκουμε ότι μόνο για $p=7$, έχουμε λύση ($7^3+7^2+7+1=20^2$).

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Πέτρος Βαλέττας) Έστω $f_1,\dots,f_n$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ οι οποίες δεν είναι ταυτοτικά μηδενικές ώστε*

$$\int_0^1 f_i(x)f_j(x)\,dx=0$$

για $i\neq j$. Να αποδειχθεί ότι

$$\prod_{j=1}^n\int_0^1 f_j^2(x)\,dx\geqslant n^n\left(\prod_{j=1}^n\int_0^1 f_j(x)\,dx\right)^2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=15825

Λύση (Πέτρος Βαλέττας-Σιλουανός Μπραζιτικός) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_0^1 f_j^2(x)\ \ dx=1$ για $j=1,\dots,n$. Τότε θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\left(\prod_{j=1}^n|I_j|\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}},$$

όπου $I_j=\int_0^1 f_j(x)\,dx$. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{j=1}^n|I_j|\leqslant\sqrt{n}$.

Για να απαλλαγούμε από τα απόλυτα γράφουμε

$$|I_j| = \int_0^1 \varepsilon_j f_j(x)\, dx$$

όπου

$$\varepsilon_j = \operatorname{sgn}(I_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } I_j > 0, \\ 0 & \text{αν } I_j = 0, \\ -1 & \text{αν } I_j < 0. \end{cases}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Swartz και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ανά δύο οι συναρτήσεις έχουν ολοκλήρωμα γινομένου μηδέν, έχουμε ότι

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |I_j|\right)^2 = \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j(x)\right) dx\right)^2 \leq$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \sum \varepsilon_j^2 f_j^2 = n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής περιοδική συνάρτηση με άρρητη περίοδο και έστω F μια αρχική της f. Αν η ακολουθία $a_n = F(n) - n$ συγκλίνει, να αποδείξετε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=6112

Λύση (Νίκος Κολλιόπουλος) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F(n) - n \to 0$. Θέτουμε $g(x) = f(x) - 1$ και $G(x) = F(x) - x$, οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι αν η g είναι συνεχής περιοδική με άρρητη περίοδο r, και για την αρχική αυτής G η $G(n)$ συγκλίνει στο 0, τότε η g είναι η μηδενική συνάρτηση.

Έχουμε $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt + G(0)$. Για $n \in \mathbb{Z}$ παίρνουμε $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $n < mr < n + r$. Τότε

$$G(n+r) - G(n) = \int_n^{n+r} g(t)\, dt =$$

$$\int_n^{mr} g(t)\, dt + \int_{mr}^{n+r} g(t)\, dt =$$

$$\int_{n-(m-1)r}^{r} g(s+(m-1)r)\, ds + \int_0^{n-(m-1)r} g(s+mr)\, ds =$$

$$\int_0^r g(s)\, ds,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την περιοδικότητα της g. Επομένως $G(n+kr) - G(n) = kD$ για κάθε $k, n \in \mathbb{Z}$, όπου $D = \int_0^r g(s)\, ds$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το $A = G(\mathbb{R})$ είναι μονοσύνολο. Θα χρησιμοποιήσουμε το πιο κάτω λήμμα.

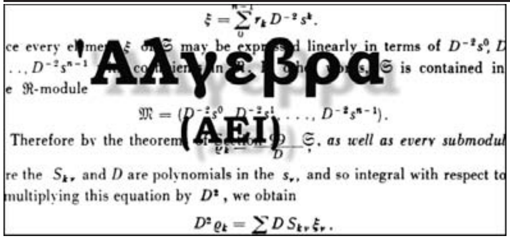
Λήμμα: Αν r άρρητος, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν ακολουθίες ακεραίων k_n, m_n με την m_n γνησίως αύξουσα ώστε η ακολουθία $x_n = m_n + k_n r$ να συγκλίνει στο x.

Για κάθε $a \in \mathbb{A}$ παίρνουμε x ώστε $G(x) = a$. Από το λήμμα υπάρχουν ακολουθίες ακεραίων k_n, m_n με την m_n γνησίως αύξουσα ώστε η ακολουθία $x_n = m_n + k_n r$ να συγκλίνει στο x. Αφού η G είναι συνεχής έχουμε $G(m_n + k_n r) = G(m_n) + k_n D \to G(x) = a$ και άρα $k_n D \to a$. Άρα το σύνολο $B = \{kD : k \in \mathbb{Z}\}$ έχει οριακά σημεία όλα τα στοιχεία του A. Προφανώς όμως το A είναι διάστημα και άρα πρέπει να είναι μονοσύνολο αφού το B είναι D-διαχωρισμένο υποσύνολο των πραγματικών.

Για την απόδειξη του λήμματος, από το λήμμα του Kronecker γνωρίζουμε ότι για το τυχόν $\ell > 0$, υπάρχουν $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - a_1 - b_1 r| < \ell$. Από το ίδιο λήμμα, για κάθε ακέραιο $i \geqslant 2$ υπάρχουν $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ με $a_i \neq 0$ ώστε $|a_i + b_i r| < \ell / i^2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_i \geq 1$. Τώρα χρησημοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=1}^{k} b_j r - x\right| < \ell \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{\pi^2 \ell}{6}.$$

Επιλέγοντας $\ell = \varepsilon \frac{6}{\pi^2}$ για τυχόν $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι υπάρχει $q = \sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=1}^{k} b_j r$ ώστε $|q - x| < \varepsilon$ με $q = a + br$, $a, b \in \mathbb{Z}$ και $a = \sum_{j=1}^{k} a_j \geqslant k - 1 + a_1$. Επιλέγοντας τον k αρκετά μεγάλο θετικό ακέραιο ο $a = k - 1 + a_1$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλος θέλουμε εμείς και άρα με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάζονται εύκολα όλοι οι όροι της ζητούμενης ακολουθίας.



ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Δίνεται πεπερασμένος δακτύλιος R. Να δειχθεί ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $k \neq \ell$ ώστε $x^k = x^\ell$ για κάθε $x \in R$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=14131

Λύση 1 (Ζωή Κρυφού) Έστω $x \in R$. Αφού ο R είναι δακτύλιος ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$x \in R \Rightarrow x^2 \in R \Rightarrow \cdots \Rightarrow x^n \in R$$

για κάθε θετικό ακέραιο n, Επειδή ο R είναι πεπερασμένος, δεν μπορούν όλες οι θετικές δυνάμεις του στοιχείου x να είναι διαφορετικές μεταξύ τους, επομένως θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $k_x \neq \ell_x$ ώστε $x^{k_x} = x^{\ell_x}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_x > \ell_x$. Αν θέσουμε $\ell = \max\{\ell_x : x \in R\}$ και $k = \ell + \prod_{x\in R}(k_x - \ell_x)$ τότε $x^k = x^\ell$ για κάθε $x \in R$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x^k &= x^{\ell + (k_x-\ell_x)\prod_{y\in R-\{x\}}(k_y-\ell_y)} \\ &= x^{(\ell-\ell_x)+k_x+(k_x-\ell_x)\left[\prod_{y\in R-\{x\}}(k_y-\ell_y)-1\right]} \\ &= x^{(\ell-\ell_x)+\ell_x+(k_x-\ell_x)\left[\prod_{y\in R-\{x\}}(k_y-\ell_y)-1\right]} \\ &= x^{\ell+(k_x-\ell_x)\left[\prod_{y\in R-\{x\}}(k_y-\ell_y)-1\right]} = \cdots = x^\ell. \end{aligned}$$

Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Αν $R = \{x_1, \ldots, x_s\}$ τότε κοιτάμε τον δακτύλιο $R^s = R \times \cdots \times R$ και το στοιχείο του $x = (x_1, \ldots, x_s)$. Ο δακτύλιος R^s είναι πεπερασμένος άρα με την ίδια λογική όπως στην προηγούμενη λύση θα υπάρχουν k, ℓ με $k \neq \ell$ ώστε $x^k = x^\ell$. Αλλά τότε πρέπει $x_i^k = x_i^\ell$ για κάθε i που είναι και το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Προτείνει ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Αν T είναι ένας αυτομορφισμός που απεικονίζει περισσότερα από τα τρία τέταρτα των στοιχείων της G στους αντιστρόφους τους, να δείξετε ότι $T(x) = x^{-1}$ για κάθε $x \in G$ κι ότι η G είναι αβελιανή.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=13894

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω n η τάξη της G και $S = \left\{x \in G : T(x) = x^{-1}\right\}$, οπότε $|S| > \frac{3n}{4}$. Έστω τυχόν $x \in S$. Θέτουμε $xS = \{xy : y \in S\}$ και $K(x) = S \cap xS$. Παρατηρούμε ότι $|S \cup xS| \leqslant |G| = n$ και άρα $|S| + |xS| - |K(x)| \leqslant n$ οπότε αφού $|S| = |xS| > \frac{3n}{4}$, θα είναι $|K(x)| > \frac{n}{2}$. Έστω τώρα $z \in K(x)$. Τότε είναι $z \in S$ και άρα $T(z) = z^{-1}$. Επίσης, είναι $z = xy$ με $T(y) = y^{-1}$, οπότε $T(x^{-1}z) = z^{-1}x$. Έχουμε λοιπόν

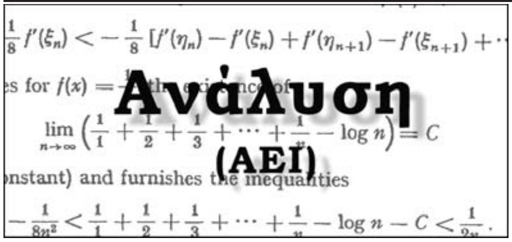
$$z^{-1} = T(z) = T(xx^{-1}z) = T(x)T(x^{-1}z) = x^{-1}z^{-1}x,$$

από όπου άμεσα προκύπτει ότι $xz = zx$.

Με άλλα λόγια, αν $C(x)$ είναι η κεντροποιούσα υποομάδα του x στην G, τότε $K(x) \subseteq C(x)$. Αλλά τότε η υποομάδα $C(x)$ περιέχει περισσότερα από τα μισά στοιχεία της G, οπότε, από το θεώρημα Lagrange, θα είναι $C(x) = G$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το x ανήκει στο κέντρο $Z(G)$ της G. Δείξαμε δηλαδή ότι $S \subseteq Z(G)$ και άρα $Z(G) = G$ γιατί $|Z(G)| \geqslant \frac{3n}{4} > \frac{n}{2}$. Ώστε, η G είναι αβελιανή.

Θέτουμε τώρα $U : G \to G$ με $x \mapsto U(x) = x^{-1}$. Εφόσον η G είναι αβελιανή, η απεικόνιση U είναι ένας αυτομορφισμός της G και $T(x) = U(x)$ για κάθε $x \in S$. Αλλά το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G, αφού η υποομάδα της G η παραγόμενη από το S έχει περισσότερα από τα μισά στοιχεία της G, άρα συμπίπτει με την G. Έπεται, λοιπόν, ότι $T(x) = U(x) = x^{-1}$ για κάθε $x \in G$.

Παρατήρηση Το φράγμα $\frac{3n}{4}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί. Για παράδειγμα, αν D_8 είναι η διεδρική ομάδα τάξης 8 που παράγεται από τις μεταθέσεις $a = (1234)$ και $b = (13)$, τότε ο αυτομορφισμός $T(x) = bxb^{-1}$ εναλλάσσει τα στοιχεία $(12)(34)$ και $(14)(23)$ (τα οποία δεν είναι αντίστροφα), αλλά στέλνει καθένα από τα άλλα 6 στοιχεία της D_8 στο αντίστροφό του.



Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=15001

Λύση 1 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Για την συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{2}$ εύκολα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0) = 0$. Επομένως $f(x) > 0$ στο $(0,1]$ οπότε για κάθε $k = 2,3,4,\ldots$ ισχύει $\ln\big(1+\frac{1}{k}\big) \geqslant \dfrac{1}{2k}$. Τότε

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)}{\ln(k)} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2k\,\ln(k)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln(k)} = +\infty.$$

Μια απόδειξη για το ότι $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln(k)} = +\infty$ προκύπτει από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. □

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Παραθέτω μία mini προσέγγιση:

$$\frac{1}{\ln n}\ln\big(1+\tfrac{1}{n}\big) = \frac{1}{\ln n}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right)\right] =$$

$\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\dfrac{1}{n\ln n} + \dfrac{1}{n^2\ln n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$, όπου $\varepsilon(x)$ μία συνάρτηση $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$\dfrac{2n-1}{2n^2\ln n} = \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\dfrac{1}{n\ln n} \geqslant \dfrac{1}{2n\ln n}$, αφού $1-\dfrac{1}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Επομένως με βάση το κριτήριο συμπύκνωσης η σειρά μας αποκλίνει. □

Λύση 3 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Με $a_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ και $b_n = \ln(\ln n)$ έχουμε: Η ακολουθία b_n είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη. Επίσης (δύσκολα μεν, κλασσικά δε) προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\left(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)\right)} =$$

$\cdots = 1$. Τότε από το θεώρημα Stolz-Cesàro έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} = 1.$$

Δηλαδή για «μεγάλα» n ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k} \approx \ln(\ln n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty. \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz = \pi - \frac{\pi}{2}\ln(2\pi)$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=12954

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{\infty}\frac{\sin(z)}{z}dz \stackrel{z=2nx}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{x}\,dx =$$

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n}\right)dx =$$

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2nx)\int_{0}^{\infty}e^{-ny}dy\right)dx =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n(y-2ix)} - e^{-n(y+2ix)}\right)dy\,dx =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-(y-2ix)}}{1-e^{-(y-2ix)}} - \frac{e^{-(y+2ix)}}{1-e^{-(y+2ix)}}\right)dy\,dx =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty}\left(\ln'\big(1-e^{-(y-2ix)}\big) - \ln'\big(1-e^{-(y+2ix)}\big)\right)dy\,dx =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{\infty}\ln'\left(\tfrac{1-e^{-(y-2ix)}}{1-e^{-(y+2ix)}}\right)dy\,dx =$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\tfrac{1-e^{2ix}}{1-e^{-2ix}}\right)dx \stackrel{\lfloor * \rfloor}{=} \frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{i(2x+\pi)}\right)dx \stackrel{\lfloor ** \rfloor}{=}$$

$$\frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\infty}\frac{1}{x}\,i\left(\pi - 2x + 2\pi\left[\frac{2x}{2\pi}\right]\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x}\left(\pi-2x+2\pi\left[\frac{x}{\pi}\right]\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x}\left(\pi-2x+2n\pi\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\,\pi\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)-2\pi\right)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{2n\pi}^{\infty}\frac{\sin(z)}{z}dz=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)-1\right)}$$

Διότι

$\lfloor * \rfloor$ $\ln\left(\frac{1-e^{2ix}}{1-e^{-2ix}}\right)=\ln\left(\frac{1-\cos(2x)-i\cdot\sin(2x)}{1-\cos(2x)+i\cdot\sin(2x)}\right)=$
$\ln\left(\frac{-2i\sin(x)e^{ix}}{2i\sin(x)e^{-ix}}\right)=\ln\!\left(-e^{2ix}\right)=\ln\!\left(e^{i\,(2x+\pi)}\right)$ και

$\lfloor ** \rfloor: \ln\!\left(e^{i\,(2x+\pi)}\right)=i\left(\pi-2x+2\pi\left[\frac{2x}{2\pi}\right]\right)$ διότι ο λογάριθμος είναι πλειότιμη συνάρτηση και πρέπει να κρατήσουμε το πρωτεύον όρισμα που ανήκει στο διάστημα $(-\pi,\pi]$.

Επίσης

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)-1\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{e\cdot n^{n+1/2}}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^N}\cdot\frac{2^1\cdot3^2\cdot\ldots\cdot N^{N-1}\cdot(N+1)^N}{1^1\cdot2^2\cdot3^3\ldots\cdot N^N}\cdot(N+1)^{1/2}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^N}\cdot\frac{(N+1)^N}{N!}\cdot(N+1)^{1/2}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)-1\right)=$$

$$\lim_{N\to\infty}\ln\left(\frac{1}{e^N}\cdot\frac{(N+1)^N}{N!}\cdot(N+1)^{1/2}\right)=$$

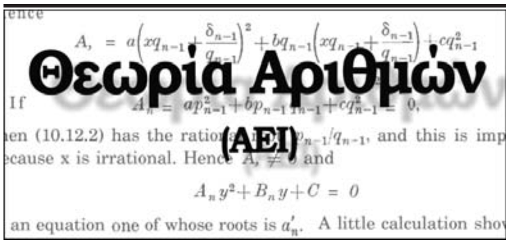
$$\lim_{N\to\infty}\ln\left(\frac{1}{e^N}\cdot\frac{(N+1)^N}{\sqrt{2\pi N}(N/e)^N}\cdot(N+1)^{1/2}\right)=$$

$$\lim_{N\to\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)^N\left(\frac{N+1}{N}\right)^{1/2}\right)=\ln\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

και τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int\limits_{2n\pi}^{\infty}\frac{\sin(z)}{z}dz=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)-1\right)=$$

$$\pi\cdot\ln\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right)=\pi\left(1-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right).\quad\square$$



Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Mulder) Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $4\kappa+3$ (ή ισοδύναμα της μορφής $4\kappa-1$), όπου κ φυσικός αριθμός.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=15425

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Θα μιμηθούμε την απόδειξη για το ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος. Έστω λοιπόν ότι οι πρώτοι της μορφή $4\kappa+3$ είναι πεπερασμένοι και είναι οι $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Ορίζουμε τον αριθμό $A=4p_1p_2\ldots p_n-1$. Τότε είναι φανερό ότι $A\equiv3 \pmod 4$. Συνεπώς, ο A έχει ένα πρώτο διαιρέτη της μορφή $4\kappa+3$ (αν όλοι οι πρώτοι διαιρέτες ήταν της μορφής $4\kappa+1$ τότε ο A θα ήταν της μορφή $4\nu+1$, άτοπο) και αφού οι πρώτοι διαιρέτες της μορφής $4\kappa+3$ είναι πεπερασμένοι σε πλήθος, οπότε αυτός είναι κάποιος p_i με $i=1,2,\ldots,n$.

Όμως, $p_i|4p_1p_2\cdots p_n$, οπότε αφού $p_i|A$, άρα τελικά $p_i|-1$, άτοπο. Άρα οι πρώτοι της μορφής $4\kappa+3$ είναι άπειροι σε πλήθος.

Σχόλιο (Δημήτρης Χριστοφίδης) Το θεώρημα του Dirichlet αναφέρει ότι για κάθε φυσικούς αριθμούς a, d που είναι πρώτοι μεταξύ τους, υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $a+nd$, n φυσικός. Δυστυχώς η απόδειξη είναι δύσκολη και μη στοιχειώδης. Υπάρχουν όμως ορισμένες περιπτώσεις του θεωρήματος όπως για παράδειγμα η περίπτωση $a=3$, $d=4$ για τις οποίες μπορεί να δοθεί απλή απόδειξη όπως παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Νίκος Κατσίπης) Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση*

$$x^2=y^7+7$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=11177

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έχουμε $x^2+11^2=y^7+2^7$. Εξετάζοντας την ισότητα modulo 4, παρατηρούμε ότι

$x \equiv 0 \bmod 2$ και $y \equiv 1 \bmod 4$. Άρα $y + 2 \equiv 3 \bmod 4$. Έστω p πρώτος ώστε $p \equiv 3 \bmod 4$ και $p|(y+2)$. Αφού $p|(y+2)$ πρέπει $p|x^2 + 11^2$ και αφού $p \equiv 3 \bmod 4$ πρέπει $p|x$ και $p|11$. (*) Συμπεραίνουμε ότι $p = 11$ και άρα ότι $y + 2 = 11^n k$ για κάποιο θετικό ακέραιο n και κάποιο θετικό περιττό ακέραιο k ο οποίος δεν διαιρείται από το 11. Αλλά τότε κανένας πρώτος q με $q \equiv 3 \bmod 4$ δεν διαιρεί τον k. Άρα $k \equiv 1 \bmod 4$ και αφού $y + 2 \equiv 3 \bmod 4$, πρέπει ο n να είναι περιττός, έστω $n = 2m + 1$. Έχουμε $x^2 + 11^2 = (11^{2m+1}k - 2)^7 + 2^7$. Το αριστερό μέλος διαιρείται από το 11^2 (αφού $11|x$) αλλά όχι από το 11^3 (αφού το -1 δεν είναι τέλειο τετράγωνο modulo 11). Αν όμως το δεξί μέλος διαιρείται από το 11^2, τότε πρέπει $m \geqslant 1$. Αλλά τότε το δεξί μέλος διαιρείται από το 11^3, άτοπο.

(*)Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήσαμε το εξής **Λήμμα** Αν p πρώτος με $p \equiv 3 \bmod 4$ και $p|a^2 + b^2$, τότε $p|a$ και $p|b$. **Απόδειξη** Αν $p \nmid b$ τότε παίρνουμε c τέτοιο ώστε $bc \equiv 1 \bmod 11$. Έχουμε $(ac)^2 + (bc)^2 \equiv 0 \bmod p$ και άρα $(ac)^2 \equiv -1 \bmod p$. Είναι όμως γνωστό πως το -1 δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο modulo p αν ισχύει ότι $p \equiv 3 \bmod 4$.

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Σπύρος Βασιλόπουλος) Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a + b + c = 0$ τότε να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=16543

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος. Αργότερα, αν βρω χρόνο, θα γράψω έναν άλλον πάρα πολύ ωραίο τρόπο, ο οποίος έχει το πλεονέκτημα να ανακαλύπτεις ανάλογες ταυτότητες.

Από Vieta, τα α, β, ς είναι ρίζες εξίσωσης της μορφής $x^3 + Ax + B = 0$ (*).

Άρα $\sum a^2 = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 0 - 2A$.

Από (*) έχουμε

$x^5 = x^3x^2 = -(Ax + B)x^2 = -Ax^3 - Bx^2 = = -A(-Ax - B) - Bx^2 = -Bx^2 + A^2x + AB$

που για $x = a, b, c$ διαδοχικά και πρόσθεση κατά μέλη δίνει

$\sum a^5 = -B\sum a^2 + A^2\sum a + 3AB = -B(-2A) + 0 + 3AB = 5AB$

Όμοια βρίσκουμε το $\sum a^7$ μέσω του

$x^7 = x^3x^4 = (-Ax - B)x^4 = -Ax^5 - Bx^4 = -Ax^5 - B(-Ax - B)x = ...$

Τώρα, αντικαθιστούμε τις παραστάσεις που βρήκαμε και ελέγχουμε (απλό) ότι ισχύει. Αφήνω τις πράξεις ρουτίνας χάριν της μεθόδου.

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Η μέθοδος που υποσχέθηκα, είναι όμως εκτός ύλης σχολείου.

Γράφουμε $P = ab+bc+ca, Q = abc$ (ουσιαστικά αυτό κάναμε και στην προηγούμενη μέθοδο). Επίσης, χάριν οικονομίας, θα γράφουμε $s_k = a^k + b^k + c^k$. Στόχος μας να δείξουμε $\dfrac{s^7}{7} = \dfrac{s^2}{2} \cdot \dfrac{s^5}{5}$ με υπόθεση ότι $s_1 = 0$.

Τώρα, εξετάζουμε την σειρά Taylor του $\ln(1 + ax) + \ln(1 + bx) + \ln(1 + cx)$.

Από την μια είναι άμεσο ότι ισούται, αφού μαζέψουμε κοινούς όρους,

$s_1 x - \dfrac{s_2}{2}x^2 - \dfrac{s_3}{3}x^3 + ...$

Από την άλλη

$\ln(1 + ax) + \ln(1 + bx) + \ln(1 + cx) = \ln\left[(1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)\right] =$

$= \ln(1 + s_1x + Px^2 + Qx^3) = \ln(1 + x^2(P + Qx)) =$

$= x^2(P + Qx) - \dfrac{(x^2(P + Qx))^2}{2} - \dfrac{(x^2(P + Qx))^3}{3} + ... = ...$

Συγκρίνοντας τώρα συντελεστές στα δύο αναπτύγματα, βρίσκουμε τα s_k συναρτήσει των P, Q και όλα τώρα είναι απλά. Π.χ. η παραπάνω αποδεικτέα γίνεται τετριμμένη ταυτότητα ως προς P, Q.

Με την μέθοδο αυτή ανακαλύπτουμε όσες ανάλογες ταυτότητες θέλουμε διότι: Λύνουμε ως προς P, Q οποεσδήποτε δύο παραστάσεις βρήκαμε. Τις θέτουμε στην θέση των P, Q σε οποιαδήποτε άλλη και .... μαγικά έχουμε νέα ταυτότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

και τα (μεταβλητά) σημεία του $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=16735

Λύση 1 (Κώστας Τσουβαλάς) Παίρνοντας την παραμετρική εξίσωση του κύκλου, έχουμε

$$x_1 = r\sin a, y_1 = r\cos a, x_2 = r\sin b, y_2 = t\cos b$$

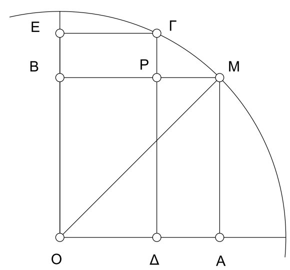
Με τά από σχετικά λίγες πράξεις η παράσταση ισούται με $2 - r(\sin a + \cos a + \cos b + \sin b) + r^2(\cos a\cos b + \sin a\sin b) = 2 - r\sqrt{2}\left(\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(b + \frac{\pi}{4}\right)\right) + r^2\cos(b - a) \leq 2 + 2\sqrt{2}r + r^2 = \left(\sqrt{2} + r\right)^2$. Άρα το μέγιστο ισούται με

$$\left(\sqrt{2} + r\right)^2$$

όταν

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Καθαρά γεωμετρικά. Είναι γνωστό αλλά αποδεικνύεται και εύκολα ότι στο σχήμα που ακολουθεί



(ΟΜ διχοτόμος του τεταρτημορίου) ισχύει η σχέση:

$$r\sqrt{2} = MB + MA \geqslant \Gamma\mathrm{E} + \Gamma\Delta \ (*)$$

αφού $\mathrm{P}\Gamma \leqslant \mathrm{PM}$. Είναι επίσης καθαρό ότι αρκεί να βρω το μέγιστο της

$$L \equiv (1 + \alpha)(1 + \beta) + (1 + \gamma)(1 + \delta)$$

όταν

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = r^2$$

με τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικά μεγέθη. Έχουμε:

$$L \leq 2 + r^2 + (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) \leqslant 2 + r^2 + 2\sqrt{2}r = \left(\sqrt{2} + r\right)^2$$

με βάση την σχέση (*). Άρα παίρνουμε ότι:

$$K_{\max} = L_{\max} = \left(\sqrt{2} + r\right)^2, \textit{οταν}\ \alpha = \beta = \gamma = \delta = r\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(**)Είναι αντιληπτό ότι έριξα μεθοδολογικά το πρόβλημα στο 1ο τεταρτημόριο χρησιμοποιώντας ότι $1 - x \leq 1 + |x| = 1 + a$, όταν $a = |x|$.

Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Να αποδείξετε πως η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{2x}{1 + e^{2x}}, x \geq 0$$

υπολογισμένη στο μηδέν είναι πάντα ακέραιος, για κάθε n φυσικό. (Με λίγα λόγια: $f^{(n)}(0) \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$)

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=61&p=78835

Λύση 1 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

$$f(x) = \frac{2x}{1 + e^{2x}} = \frac{xe^{-x}}{\frac{e^{-x} + e^{x}}{2}} = \frac{xe^{-x}}{\cosh x}, x \geq 0$$

όπου $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

Με χιαστί

$$f(x)\cosh x = xe^{-x}$$

Παραγωγίζουμε και έπειτα βάζουμε όπου χ το 0

$$f'(x)\cosh x + f(x)\sinh x = (1-x)e^{-x}, f'(0) = 1$$

ομοίως

$$f''(x)\cosh x + 2f'(x)\sinh x + f(x)\cosh x$$
$$= (x-2)e^{-x}, f''(0) = -2$$

ομοίως

$$f^{(3)}(x)\cosh x + 3f''(x)\sinh x +$$
$$3f'(x)\cosh x + f(x)\sinh x$$
$$= (3-x)e^{-x}, f^{(3)}(0) = 0$$

Οι συντελεστές του 1ου μέλους ακολουθούν την λογική του τριγώνου Πασχαλ οπότε πάντα ο συντελεστής στην τάξη της παραγώγου που μας ενδιαφέρει είναι 1. Οι υπόλοιποι αριθμοί είναι ακέραιοι διότι το υπερβολικό ημίτονο στο 0 έχει τιμή 0 και το υπερβολικό συνημίτονο 1. Οι τιμές των παραγώγων προηγούμενης τάξης ακέραιοι, οπότε πράξεις μεταξύ ακεραίων δίνουν ακέραιο.

Λύση 2 (Ροδόλφος Μπόρης) Έχουμε

$$f(x) + f(x)e^{2x} = 2x \; [1]$$

Ακόμη $f^n(x) + (f(x)e^{2x})^{(n)} = 0, n \geq 2$

όμως στο 0

$$(e^{2x})^k = 2^k, k = 0, 1, ..., n$$

και εφαρμόζοντας τον τύπο Leibniz για την νιοστή παράγωγο γινομένου παίρνουμε

$$f^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) 2^0 f^{(n)} + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) 2^1 f^{(n-1)} + ... + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) 2^n f^{(0)} = 0$$

με $n > 1$ άρα

$$f^n + \binom{n}{1} 2^0 f^{(n-1)} + ... + \binom{n}{n} 2^{n-1} f^{(0)} = 0$$

όπου f^m με $n > 1$ είναι η μιοστή παράγωγος στο 0. Με επαγωγή η άσκηση τελειώνει εύκολα.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$$

Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=79315#p79315

Λύση 1 (Μιχαήλ Λάμπρου) Θα κάνουμε διπλή χρήση ενός αποτελέσματος του Hardy σύμφωνα με το οποίο αν

$$\lim_{x\to\infty} (g(x) + g'(x)) = 0$$

τότε

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$$

Θέτουμε

$$g = f - f' + f''$$

Είναι τότε από την υπόθεση

$$g + g' = f + f''' \to 0$$

Άρα από το αποτέλεσμα του Hardy, $g \to 0$ οπότε και

$$f' - f'' = f - g \to 0 \; (*)$$

Θέτουμε τώρα

$$h = f - f''$$

Άρα από (*) και την υπόθεση έχουμε

$$h + h' = f - f'' + f' - f''' =$$
$$f - f''' + (f' - f'') \to 0 + 0 + 0 = 0$$

Από Hardy άλλη μια φορά έχουμε

$$h \to 0, \; h' \to 0$$

Δηλαδή $f - f'' \to 0$ και $f' - f''' \to 0$. Η πρώτη μαζί με την υπόθεση $f \to 0$ δίνει $f'' \to 0$ και όμοια η δεύτερη δίνει $f' \to 0$.

Λύση 2 (Μιχαήλ Λάμπρου) Και μία λύση με χρήση αναπτύγματος Taylor: Από Taylor στη μορφή «υπάρχει» ξ μεταξύ των x και $x + h$ με

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$

έχουμε για κάποιο ξ με $x \leq \xi \leq x + 1$ ότι

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi)$$

και για κάποιο η με $x - 1 \leq \eta \leq x$ ότι

$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(\eta)$ (*).

Αφαιρώντας τις δύο τελευταίες είναι

$$f(x+1) - f(x-1) = 2f'(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi) + \frac{1}{3!}f'''(\eta)$$

Παίρνουμε τώρα όριο x τείνοντος στο άπειρο, οπότε και ξ, η τείνουν στο άπειρο, έχουμε

$$0 = 2\lim_{x\to+\infty} f'(x) + 0$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

και από την (*), στο όριο, είναι επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$$

όπως θέλαμε.

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Έστω ότι $a, b, c \in \mathbb{C}$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί αριθμοί ώστε:*

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$$

Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=9781

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο εξής:

Αν οι μιγαδικοί $a, b, c \neq 0$ είναι τέτοιοι ώστε $a^5 + b^5 + c^5 = 0$, και $a + b + c = 0$ να αποδειχθεί ότι

$|a| = |b| = |c|$.

Τότε αποδεικνύεται ότι

$$a^5 + b^5 + c^5 = -\frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Επομένως είναι

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

άρα και

$$ab + bc + ca = 0$$

(αφού $a + b + c = 0$).

Άρα

$$bc = -a(b+c) = a^2 \Rightarrow abc = a^3 \Rightarrow |a|^3 = |abc|$$

Ομοίως,

$$|b|^3 = |c|^3 = |abc|$$

Για την απόδειξη της (1): Ας είναι $x^3 + px - q = 0$ τριτοβάθμια εξίσωση με ρίζες τις a, b, c, όπου $p = ab + bc + ca$ και $q = abc$. Τότε ισχύει

$$a^3 + pa - q = 0$$

$$b^3 + pb - q = 0$$

$$c^3 + pc - q = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με a^2 τη δεύτερη με b^2 και την τρίτη με c^2, και προσθέτοντας κατα μέλη λαμβάνουμε

$$a^5 + b^5 + c^5 = q(a^2 + b^2 + c^2) - 3pabc = q(a^2 + b^2 + c^2) - 3pq$$

(αφού $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3q$). Επειδή $a + b + c = 0$ έχουμε $a^2 + b^2 + c^2 = -2p$ και προκύπτει η (1).

Λύση 2 (Μπάμπης Στεργίου) Για την απόδειξη της (1): Αν πολλαπλασιάσουμε την

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

και στα δύο μέλη με

$$a^2 + b^2 + c^2$$

βρίσκουμε :

$$a^5 + b^5 + c^5 + a^3(b^2 + c^2) + b^3(c^2 + a^2) + c^3(a^2 + b^2)$$
$$= 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Επειδή όμως:

$$b^2 + c^2 = (b+c)^2 - 2bc = a^2 - 2bc$$

$$c^2 + a^2 = (c+a)^2 - 2ca = b^2 - 2ca$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = c^2 - 2ab$$

η παραπάνω σχέση μας οδηγεί πολύ άμεσα στην ισότητα:

$$2(a^5 + b^5 + c^5) - 2abc(a + b + c) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Νίκος Μαυρογιάννης) (Ο Μετασχηματισμός του $M\ddot{o}bius$) Θεωρούμε σταθερούς μιγαδικούς αριθμούς a, b, c, d*

Αν $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w αν η εικόνα του z ανήκει

α) Σε σταθερό κύκλο;

β) Σε σταθερή ευθεία;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=8876

Λύση 1 (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \Rightarrow z = \frac{-d \cdot w + b}{c \cdot w - a}$$

Α) Έστω η εικόνα M του z βρίσκεται σε κύκλο. Τότε

$$|z - z_0| = R > 0 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{-d \cdot w + b}{c \cdot w - a} - z_0 \right| = R \Rightarrow$$

$$|(d + c \cdot z_0) \cdot w - (b + a) \cdot z_0| = R \cdot |c \cdot w - a| \Rightarrow$$

$$|d+c\cdot z_0|\cdot\left|w-\frac{b+a\cdot z_0}{d+c\cdot z_0}\right|=R\cdot|c|\cdot\left|w-\frac{a}{c}\right|$$

Αν $|d+c\cdot z_0|=R\cdot|c|$ έχουμε ευθεία μεσοκάθετη του AB με $A\left(\dfrac{b+a\cdot z_0}{d+c\cdot z_0}\right)$ και $B\left(\dfrac{a}{c}\right)$

Αν $|d+c\cdot z_0|\neq R\cdot|c|$ έχουμε κύκλο (Απολλώνιος κύκλος) $MA=\lambda\cdot MB$ όπου $A\left(\dfrac{b+a\cdot z_0}{d+c\cdot z_0}\right)$, $B\left(\dfrac{a}{c}\right)$ και $\lambda=\dfrac{R\cdot|c|}{|d+c\cdot z_0|}$.

Β) αν η εικόνα του z κινείται σε ευθεία τότε αυτή θα είναι μεσοκάθετος κάποιου ευθυγράμμου τμήματος (υπάρχουν άπειρα βέβαια), οπότε βρίσκουμε z_1 και z_2 ώστε $|z-z_1|=|z-z_2|$. Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε όπου $z=\dfrac{-d\cdot w+b}{c\cdot w-a}$ και καταλήγουμε σε μορφές αντίστοιχες με τις παραπάνω.

1) Απαιτείται κάποια διερεύνηση βέβαια για αποφυγή σημείων μηδενισμού παρονομαστών

2) Η τελική μορφή είναι πάντα είτε ευθεία είτε κύκλος

3) Στην έκφραση $w=\dfrac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$ αν το ∞ «παίζει» σαν τιμή για το w πάντα έχουμε ευθεία, αν δεν «παίζει» έχουμε κύκλο (για το w βέβαια).

Λύση 2 (Νίκος Μαυρογιάννης) Το ζήτημα μπορεί να αντιμετωπισθεί με συντεταγμένες αλλά έχει πολλές περιπτώσεις. Η δική μου προσέγγιση, που αδρομερώς την παρουσιάζω και στην τάξη, έχει πάρα πολλές ομοιότητες με του Σεραφείμ. Την παραθέτω και θα φανούν. Κατ' αρχάς ας παραμερίσουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις:

• Αν είναι $c=d=0$ ο μετασχηματισμός δεν ορίζεται για κανένα z. Υποθέτουμε ότι ότι $|c|+|d|\neq 0$.

• Αν είναι $ad-bc=0$ και $c\neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+b}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=$$

$$\frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}=$$

$$\frac{a}{c}+\frac{\frac{-(ad-bc)}{c^2}}{\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$

και ο τόπος είναι ένα μεμονωμένο σημείο Αν πάλι είναι $ad-bc=0$ και $c=0$ τότε αναγκαστικά $d\neq 0$ και επομένως αφού είναι $ad=0$ θα είναι $a=0$ οπότε $\frac{az+b}{cz+d}=\frac{b}{d}$ και πάλι ο τόπος είναι ένα μεμονωμένο σημείο Μπορούμε να εργασθούμε τώρα στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $ad-bc\neq 0$ Βλέπουμε ότι

α) Αν$c\neq 0$ ο μετασχηματισμός ορίζεται για κάθε $z\neq -\frac{d}{c}$. Στην περίπτωση αυτή κάθε $w\neq\frac{a}{c}$ είναι εικόνα του μετασχηματισμού.

β) Αν $c=0$ ο μετασχηματισμός ορίζεται για κάθε z και κάθε w είναι εικόνα του. Επίσης ισχύει:

$$\frac{az+b}{cz+d}=w\Leftrightarrow z=-\frac{dw-b}{cw-a}$$

Ξέρουμε ότι κάθε ευθεία είναι μεσοκάθετος κάποιου ευθυγράμμου τμήματος και κάθε κύκλος είναι Απολλώνιος κύκλος κάποιου ευθυγράμμου τμήματος ως προς κάποιο λόγο. Έτσι:

Αν το z ανήκει σε ευθεία θα είναι

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

για κάποια κατάλληλα $z_1\neq z_2$

Αν το z ανήκει σε κύκλο θα είναι $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ για κάποια κατάλληλα $z_1\neq z_2$. Μπορούμε να ενοποιήσουμε τις δύο περιπτώσεις και να ξεκινήσουμε με το δεδομένο ότι το z ικανοποιεί μία σχέση της μορφής $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$, $z_1\neq z_2$, $\lambda>0$ όπου όταν $\lambda=1$ έχουμε ευθεία ενώ όταν $\lambda\neq 1$ έχουμε κύκλο. Τώρα

$$|z-z_1|=\lambda|z-z_2|\Leftrightarrow$$

$$\left|-\frac{dw-b}{cw-a}-z_1\right|=\lambda\left|-\frac{dw-b}{cw-a}-z_2\right|\Leftrightarrow$$

$$|(cz_1+d)w-(az_1+b)|=\lambda|(cz_2+d)w-(az_2+b)|$$

Παρατηρούμε ότι δε μπορεί αμφότερα τα cz_1+d, cz_2+d να είναι μηδέν οπότε η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με κάποια από τις

$$\left|w-\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}\right)\right|=\lambda\left|\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|\left|w-\left(\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right)\right|$$

$$\left|w-\left(\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right)\right|=\frac{|az_1+b|}{\lambda|cz_2+d|}$$

$$\left|w-\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}\right)\right|=\frac{\lambda|az_2+b|}{|cz_1+d|}$$

που μας πληροφορούν ότι ο τόπος θα είναι ευθεία ή κύκλος Φυσικά τα παραπάνω εδράζονται στην γνώση του κύκλου του Απολλωνίου που στο σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας είναι σε εφαρμογή και απ' ότι έχω διαπιστώσει σπανίως διδάσκεται. Αλλά και έτσι δεν θέλει πολλή ώρα να εξηγήσει κάποιος στα παιδιά της Γ' πως δουλεύει ο κύκλος αυτός. Αποτελεί μία ενοποιητική έννοια και είναι κρίμα να την χάνουμε:

Αν ένα σημείο κινείται ώστε ο λόγος των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία να είναι σταθερός τότε ο τόπος του είναι κύκλος ή ευθεία.

Σχόλιο (Ροδόλφος Μπόρης) Μήπως θα έπρεπε να τονισθεί ο ρόλος των στοιχειωδών μετασχηματισμών και η σύνδεσή τους με την γεωμετρία;

•$z\to z+a$ παράλληλη μεταφορά

•$z\to az$ στροφή - ομοιοθεσία

•$z\to\dfrac{1}{z}$ αντιστροφή

Σχόλιο (Νίκος Μαυρογιάννης) Από την σχέση

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+p.\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

όπου $p = \frac{-(ad-bc)}{c^2}$ βλέπουμε τους μετασχηματισμούς:

$$x \underset{1}{\to} z + \frac{d}{c} \underset{2}{\to} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \underset{3}{\to} p.\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \underset{4}{\to} \frac{a}{c} + p.\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

όπου οι μετασχηματισμοί 1 και 4 είναι μεταφορές, ο 2 αντιστροφή και ο 3 στροφή+ομοιοθεσία. Δυστυχώς όμως στην τάξη δε μπορούμε να επωφεληθούμε από αυτή την ανάλυση μιας και τα παιδιά δεν γνωρίζουν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Η αντιστροφή δε τους είναι εντελώς ξένη. Φοβάμαι ότι ειδικά για την τελευταία κάτι ανάλογο ισχύει και με τους συναδέλφους: Οι πιο μεγάλοι σε ηλικία είναι περισσότερο πιθανό να την γνωρίζουν.