Το θεώρημα αντικατάστασης στα ορισμένα ολοκληρώματα και μια αναφορά στις συναρτήσεις της μορφής : $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)\,dt$.

Αντώνης Κυριακόπουλος- Γιώργος Τασσόπουλος

1) ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (Ή ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ) ΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.

Θεώρημα. Μία συνάρτηση g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ και η g' είναι συνεχής στο Δ. Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο g(Δ). Τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx. \qquad (1)$$

Απόδειξη. Επειδή η g είναι συνεχής στο Δ ,έπεται ότι το σύνολο g(Δ) είναι ένα διάστημα [κλειστό, όχι κατ' ανάγκη με άκρα g(α) και g(β))].Και επειδή η f είναι συνεχής στο g(Δ),έπεται ότι υπάρχει παράγουσα της f στο g(Δ).΄Έστω λοιπόν ότι F είναι μία παράγουσα της f στο g(Δ).Έτσι, η F είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο g(Δ) και ισχύει:

$$F'(x)=f(x), \forall x \in g(\Delta). \qquad (2)$$

Επειδή οι αριθμοί g(α) και g(β) ανήκουν στο g(Δ), έχουμε:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{g(\alpha)}^{g(\beta)}=F(g(\beta))\text{-}F(g(\alpha)). \qquad (3)$$

Λόγω των υποθέσεων, η συνάρτηση με τύπο: $f(g(x))g'(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο Δ. Εξάλλου, λόγω και της (2), έχουμε, για κάθε $x \in \Delta$:

$$f(g(x))g'(x)=F'(g(x))g'(x)=\left[F(g(x))\right]'.$$

΄Έτσι, έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dt=\left[F(g(x))\right]_{\alpha}^{\beta}=F(g(\beta))-F(g(\alpha)). \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται η (1).

Σημείωση 1. Μερικοί πιστεύουν ότι στο παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση g οφείλει να αντιστρέφεται στο διάστημα [α, β]. Αυτό όμως, όπως είδαμε στην παραπάνω απόδειξη, δεν είναι απαραίτητο (βλέπε. και παρακάτω παραδείγματα) . Το σημαντικό είναι ότι με τον περιορισμό αυτόν περιορίζεται και η εφαρμογή του θεωρήματος.

Σημείωση 2. Όταν για την εύρεση ενός ολοκληρώματος εφαρμόζουμε το θεώρημα αντικατάστασης, είναι απαραίτητο να διευκρινίζουμε με ποιον τρόπο το χρησιμοποιούμε. Δηλαδή, αν το δοσμένο ολοκλήρωμα θα το θεωρήσουμε ως το πρώτο μέλος ή ως το δεύτερο του θεωρήματος αυτού, ποιες είναι οι συναρτήσεις f και g, ποιο είναι το διάστημα [α, β] και αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος. Με άλλα λόγια, το θεώρημα αντικατάστασης στα ορισμένα ολοκληρώματα, πρέπει να το χρησιμοποιούμε συνειδητά και να ελέγχουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του και όχι να εργαζόμαστε μηχανικά, χωρίς να ξέρουμε αν πάμε από το πρώτο μέλος το δεύτερο ή από το δεύτερο στο πρώτο και αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του. Διαφορετικά υπάρχει κίνδυνος να κάνουμε λάθη.

2) ΤΡΟΠΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ.

Για να βρούμε ένα ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα αντικατάστασης, θα πρέπει να το φέρουμε ή στη μορφή του πρώτου μέλους της ισότητας (1) του θεωρήματος αυτού ή στη μορφή του δεύτερου μέλους. Πηγαίνοντας στο άλλο μέλος, μπορεί το νέο ολοκλήρωμα να βρίσκεται ευκολότερα.

1ος Τρόπος. Από το πρώτο μέλος στο δεύτερο.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx.$$

Έστω ακόμα ότι θέλουμε να το αντιμετωπίσουμε ως το πρώτο μέλος της ισότητας (1) του θεωρήματος αντικατάστασης. Προς τούτο, θα πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις f και g, οι οποίες να πληρούν τις υποθέσεις του θεωρήματος αυτού στο διάστημα Δ=[α, β] (το οποίο μας είναι γνωστό) και επιπλέον να ισχύει:

$$h(x)=f\left(g(x)\right)g'(x), \text{ για κάθε } x\in\left[\alpha,\beta\right].$$

Τότε θα έχουμε:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

Έτσι, φθάνουμε στο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους που ενδέχεται να βρίσκεται ευκολότερα

• Στην πράξη δεν είναι πάντοτε εύκολη η εύρεση δύο τέτοιων συναρτήσεων f και g. Η πείρα θα μας οδηγήσει στην εύρεση της g, ίσως μετά από μερικές δοκιμές. Στη συνέχεια, για να βρούμε την f, γράφουμε τον τύπο της h υπό τη μορφή: $h(x)=p(x)g'(x)$, εκφράζουμε το p(x) συναρτήσει του g(x) και στο αποτέλεσμα θέτουμε όπου g(x) το x. Για παράδειγμα αν $p(x)=2g^2(x)-3g(x)+1$, τότε $f(x)=2x^2-3x+1$. Στην περίπτωση όπου $g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, θα είναι προφανώς $p(x)=\dfrac{h(x)}{g'(x)}$.

Παράδειγμα 1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(5\sigma\upsilon\nu^2x+1\right)^2.\sigma\upsilon\nu x dx.$$

Λύση. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα αντικατάστασης, θεωρώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα ως το πρώτο μέλος του θεωρήματος αυτού. Ονομάζουμε h την συνάρτηση που είναι στο ολοκλήρωμα.

Έχουμε: $h(x)=\left(5\sigma\upsilon\nu^2x+1\right)^2\sigma\upsilon\nu x=\left(5\sigma\upsilon\nu^2x+1\right)^2(\eta\mu x)'$. Αφού το $(\eta\mu x)'$ είναι παράγοντας της h, μας παραπέμπει να θεωρήσουμε ως συνάρτηση g την $g(x)=\eta\mu x \mid \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]=\Delta$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, συνεχή στο Δ. Έχουμε: $h(x)=(5\sigma\upsilon\nu^2x+1)^2g'(x)$. Έτσι έχουμε:

$$p(x)=(5\sigma\upsilon\nu^2x+1)^2=\left[5(1-\eta\mu^2x)+1\right]^2=25\eta\mu^4x-60\eta\mu^2x+36=25g^4(x)-60g^2(x)+36.$$

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x)=25x^4-60x^2+36$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο g(Δ)=[0, 1]. Συνεπώς :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(0)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)dx=\int_{0}^{1}\left(25x^4-60x^2+36\right)dx=$$

$$=\left[25\cdot\frac{x^5}{5}-60\cdot\frac{x^3}{3}+36x\right]_0^1=21.$$

Παράδειγμα 2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx\,.$$

Λύση. Ονομάζουμε h την συνάρτηση που είναι στο ολοκλήρωμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\sqrt{x}\mid[1,4]=\Delta$,η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (≠0), συνεχή στο Δ. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{h(x)}{g'(x)}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}=2g(x)e^{g(x)}\,.$$

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=2xe^{x}$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο g(Δ)=[1,2]. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το πρώτο μέλος στο δεύτερο):

$$I=\int_1^4 h(x)dx=\int_1^4 f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(1)}^{g(4)} f(x)dx=2\int_1^2 xe^{x}dx=2\int_1^2 x(e^{x})'dx=$$

$$2\left[xe^{x}\right]_1^2-2\int_1^2 e^{x}(x)'dx=...=2e^{2}\,.$$

Σημείωση . Η παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στο ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$, γιατί η συνάρτηση: $g(x)=\sqrt{x}\mid[0,4]=\Delta$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο Δ, αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όπως θα δούμε παρακάτω, για να βρούμε το ολοκλήρωμα αυτό, θα το θεωρήσουμε ως το δεύτερο μέλος του θεωρήματος αντικατάστασης.

Παράδειγμα 3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{8-\eta\mu 2x}dx\,.$$

Λύση. Ονομάζουμε h την συνάρτηση που είναι στο ολοκλήρωμα. Έχουμε:

$$h(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{8-\eta\mu 2x}=\frac{1}{8-\eta\mu 2x}\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'\,.$$

Αφού το $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'$ είναι παράγοντας της h, μας παραπέμπει να θεωρήσουμε ως συνάρτηση g την $g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\mid\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]=\Delta$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, συνεχή στο Δ. Έτσι έχουμε:

$$p(x)=\frac{1}{8-\eta\mu 2x}=\frac{1}{9-\eta\mu^{2}x-\sigma\upsilon\nu^{2}x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{9-(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^{2}}=\frac{1}{9-g^{2}(x)}\,.$$

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{9-x^{2}}$, η οποία είναι συνεχής στο

$$g(\Delta)=\left[g(0),g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\cup\left[g(\frac{\pi}{3}),g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[1,\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right]=\left[1,\sqrt{2}\right].$$

Συνεπώς:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}h(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(0)}^{g\left(\frac{\pi}{3}\right)}f(x)dx=\int_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{9-x^{2}}dx=\frac{1}{6}\int_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\ln\frac{3+x}{3-x}\right]_1^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}=...=\ln\sqrt[6]{\frac{19+6\sqrt{3}}{22}}\,.$$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι η h(x) δεν είναι 1-1 στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, δηλαδή δεν αντιστρέφεται.

Παράδειγμα 4. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}+x^2+3}dx\,.$$

Λύση. Ονομάζουμε h την συνάρτηση που είναι στο ολοκλήρωμα. Έχουμε: $h(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}+x^2+3}$, η οποία είναι συνεχής στο Δ=[-1,1] (γιατί;). Ως κατάλληλη συνάρτηση g φαίνεται εκ πρώτης όψεως να είναι η $g(x)=\sqrt{x^2+3}$. Δοκιμάζοντας όμως βλέπουμε ότι δεν μας οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Επειδή όμως: $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$,σε δεύτερη δοκιμή , ως κατάλληλη συνάρτηση μπορούμε να θεωρήσουμε την $g(x)=x+\sqrt{x^2+3}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με: $g'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}(>0)$, συνεχή στο Δ. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{h(x)}{g'(x)}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}}{\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}}=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)^2}=\frac{1}{g^2(x)}.$$

Επομένως θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{x^2}$, η οποία είναι συνεχής στο $g(\Delta)=\left[g(-1),g(1)\right]=[1,3]$ (αφού $g\uparrow\Delta$). Συνεπώς:

$$I=\int_{-1}^{1}h(x)dx=\int_{-1}^{1}f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(-1)}^{g(1)}f(x)dx=\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}dx=\int_{1}^{3}x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3=\frac{2}{3}.$$

Παρατήρηση. Κάποιος ενεργώντας εντελώς μηχανικά, θα μπορούσε να θέσει: $y=x+\sqrt{x^2+3}$ (1) και να συνεχίσει ως εξής:

$$(1)\Rightarrow dy=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx\Rightarrow dy=\frac{x+\sqrt{x^3+3}}{\sqrt{x^2+3}}dx\Rightarrow dy=\frac{y}{\sqrt{x^2+3}}dx\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{x^2+3}}{y}dy$$

$\Rightarrow h(x)dx=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}\cdot y}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{y}dy\Rightarrow h(x)dx=\frac{1}{y^2}dy$, και επειδή: $x=-1\Rightarrow y=1,\quad x=1\Rightarrow y=3$, θα βρει: $I=\int_1^3\frac{1}{y^2}dy=...=\frac{2}{3}$.

Έτσι, μπορεί να βρήκε το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά έχει διαπράξει δύο σφάλματα.

Πρώτον, χειρίστηκε τα dx και dy σαν να ήταν παράγοντες. Τα dx και dy, πέραν της ιστορικής τους προέλευσης, γράφονται απλώς και μόνο για να δηλώσουν ποια είναι η μεταβλητή στην ολοκληρωτέα συνάρτηση(βουβή μεταβλητή). Αν μάλιστα δεν υπάρχει αμφιβολία για το ποια είναι η βουβή μεταβλητή, τότε τα dx ή dy μπορούν να παραληφθούν (το κάνουν πολλά βιβλία Ανάλυσης). Για παράδειγμα, αν $h(x)=x^2y$, τότε αντί του: $\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 x^2ydx=\left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^1=\frac{y}{3}$, μπορούμε να γράψουμε απλώς: $\int_0^1 h(x)=...=\frac{y}{3}$ ή ακόμη απλούστερα: $\int_0^1 h=...=\frac{y}{3}$.

Δεύτερον, κατέληξε σε ολοκληρωτέα συνάρτηση με δύο μεταβλητές, χωρίς να γνωρίζει ότι τελικά θα απλοποιηθεί η αρχική μεταβλητή. Για παράδειγμα, στο παραπάνω ολοκλήρωμα, αν είχε θέσει: $y=\sqrt{x^2+3}$, τότε θα έβρισκε:

$$dy=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx \Rightarrow dy=\frac{x}{y}dx \Rightarrow dx=\frac{y}{x}dy!!! \Rightarrow h(x)dx=\frac{1}{y(x+y)}\cdot\frac{y}{x}dy \Rightarrow h(x)dx=\frac{1}{x^2+xy}dy\ .$$

Συνεπώς: $I=\int_{-1}^{1}h(x)dx=\int_{2}^{2}\frac{1}{x^2+xy}dy=0!!!$, αφού $x=-1\Rightarrow y=2,\ x=1\Rightarrow y=2$.

2^{ος} Τρόπος. Από το δεύτερο μέλος στο πρώτο.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{\kappa}^{\lambda}f(x)dx\ .$$

Έστω ακόμα ότι θέλουμε να το αντιμετωπίσουμε ως το δεύτερο μέλος της ισότητας (1) του θεωρήματος αντικατάστασης. Προς τούτο, έχουμε τη συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [κ, λ]. Τώρα θα πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση g ορισμένη σε ένα διάστημα [α, β]=Δ με κ =g(α) και λ=g(β), η οποία μαζί με την f να πληρούν τις υποθέσεις του θεωρήματος αυτού. Τότε θα έχουμε:

$$I=\int_{\kappa}^{\lambda}f(x)dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\big(g(x)\big)g'(x)dx\ .$$

Έτσι, φθάνουμε στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους που ενδέχεται να βρίσκεται ευκολότερα.

Παράδειγμα 1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx\ .$$

Λύση. Σκεφτόμαστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αντικατάστασης, θεωρώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα ως το δεύτερο μέλος του θεωρήματος αυτού. Έχουμε: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Για να απλοποιηθεί το ριζικό αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x$. Τότε $0=g(0)$, $\frac{1}{2}=g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ και η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, συνεχή στο Δ. Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι: $g(\Delta)=[0,1]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Έτσι έχουμε:

$$I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{g(0)}^{g\left(\frac{5\pi}{6}\right)}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{5\pi}{6}}f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int_{0}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1-\eta\mu^2x}\cdot(\eta\mu x)'dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{5\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu x|\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=...=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Σημείωση . θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x\,|\left[0,\frac{\pi}{6}\right]=\Delta_1$, η οποία μαζί με την f πληρούν τις υποθέσεις του θεωρήματος αντικατάστασης. Και μάλιστα τότε θα φθάναμε σε απλούστερο ολοκλήρωμα. Προτιμήσαμε όμως τη συνάρτηση: $g(x)=\eta\mu x \mid \left[0,\frac{5\pi}{6}\right]=\Delta$ για να δούμε στην πράξη δύο πράγματα:

i) Ότι η συνάρτηση g στο θεώρημα αντικατάστασης δεν είναι απαραίτητο να αντιστρέφεται. Η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x \mid \left[0,\frac{5\pi}{6}\right]=\Delta$ που χρησιμοποιήσαμε δεν αντιστρέφεται.

ιι) Ότι όταν εφαρμόζουμε το θεώρημα αντικατάστασης, η συνάρτηση f δεν είναι αρκετό να είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [κ, λ]με άκρα τα όρια ολοκλήρωσης, αλλά στο σύνολο $g(\Delta)$, το οποίο ενδέχεται να είναι υπερσύνολο του διαστήματος [κ, λ]. Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε : $[\kappa,\lambda]=\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ενώ $g(\Delta)=[0,1]$.

Παράδειγμα 2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx\,.$$

Λύση. Έχουμε: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [-1, 1]. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi x$. Τότε: $-1=g\left(-\frac{\pi}{4}\right), 1=g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ και η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ με $g'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\varepsilon\varphi^2 x+1$,συνεχή στο Δ. Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι: $g(\Delta)=[-1,1]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Συνεπώς:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\cdot\left(\varepsilon\varphi^2 x+1\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{0}^{4}e^{\sqrt{x}}dx\,.$$

Λύση (Βλέπε σημείωση παραδείγματος 2). Έχουμε: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0, 4]. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=x^2$. Τότε $0=g(0)$, $4=g(2)$ και η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=[0,2]$ με $g'(x)=2x$, συνεχή στο Δ (με αυτή τη συνάρτηση θα απλοποιηθεί το ριζικό από την f). Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι: $g(\Delta)=[0,4]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το δεύτερο μέλος στο πρώτο):

$$I=\int_{0}^{4}e^{\sqrt{x}}dx=\int_{g(0)}^{g(2)}f(x)dx=\int_{0}^{2}f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int_{0}^{2}e^{\sqrt{x^2}}\cdot 2xdx=2\int_{0}^{2}xe^{x}dx=...=2e^2+2\,.$$

Σημείωση . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και το ολοκλήρωμα του παραδείγματος 2: $I=\int_{1}^{4}e^{\sqrt{x}}dx$.

Παράδειγμα 4. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{1}^{e}\eta\mu(1-\ln x)dx\,.$$

Λύση. Έχουμε: $f(x)=\eta\mu(1-\ln x)$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [1,e]. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=e^{1-x}$. Τότε $1=g(1)$, $e=g(0)$ και η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=[0,1]$ με $g'(x)=-e^{1-x}$, συνεχή στο Δ (με αυτή τη συνάρτηση θα εξαλειφθεί ο λογάριθμος από την f). Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι: $g(\Delta)=[1,e]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το δεύτερο μέλος στο πρώτο):

$$I=\int_1^e \eta\mu(1-\ln x)dx=\int_{g(1)}^{g(0)} f(x)dx=\int_1^0 f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_1^0 \eta\mu\left(1-\ln e^{1-x}\right)\left(-e^{1-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 \eta\mu(1-1+x)e^{1-x}dx=e\int_0^1 e^{-x}\eta\mu x dx.$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$A=\int_0^1 e^{-x}\eta\mu x dx=-\int_0^1\left(e^{-x}\right)'\eta\mu x dx=...=1-\frac{\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1}{e}-A\Rightarrow 2A=1-\frac{\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1}{e}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}-\frac{\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1}{2e}.\ \text{Συνεπώς: } I=\frac{e}{2}-\frac{\eta\mu 1+\sigma\upsilon\nu 1}{2}.$$

Άλλος τρόπος (από το πρώτο μέλος στο δεύτερο). Ονομάζουμε h την συνάρτηση που είναι στο ολοκλήρωμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=\ln x \mid [1,e]=\Delta$,η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $g'(x)=\frac{1}{x}(\neq 0)$, συνεχή στο Δ. Έχουμε:

$$\frac{h(x)}{g'(x)}=\frac{\eta\mu\left(1-\ln x\right)}{\frac{1}{x}}=x\eta\mu\left(1-\ln x\right)=e^{\ln x}\eta\mu\left(1-\ln x\right).$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση: $f(x)=e^x\eta\mu(1-x)$, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο g(Δ)=[0,1]. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το πρώτο μέλος στο δεύτερο):

$$I=\int_1^e h(x)dx=\int_1^e f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{g(1)}^{g(e)} f(x)dx=\int_0^1 e^x\eta\mu(1-x)dx.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι: $h_1\left(x\right)=e^x\eta\mu\left(1-x\right)=-\left(1-x\right)'\cdot e^{1-(1-x)}\cdot\eta\mu\left(1-x\right)$ και εφαρμόζοντας για δεύτερη φορά το θεώρημα αντικατάστασης από το 1^o στο 2^o μέλος με $g_1\left(x\right)=1-x$ και $f_1\left(x\right)=-e^{1-x}\cdot\eta\mu x$ καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα : $I=e\int_0^1 e^{-x}\eta\mu x dx$ κ.τ.λ.

3) ΜΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: $\sigma(x)=\int_\alpha^\beta \varphi(x,t)dt$.

Παράδειγμα 1 . Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $\varphi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **. Να βρείτε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης:** $\sigma(x)=\int_1^4\varphi(2x-t)dt$ **.**

Λύση.i) Θεωρούμε έναν αριθμό $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση φ(2x-t) (σύνθεση των συναντήσεων 2x-t και φ) είναι ορισμένη και συνεχής αν και μόνο αν: $\begin{cases}t\in\mathbb{R}\\2x-t\geq 0\end{cases}$ (1), και $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}t\in\mathbb{R}\\t\leq 2x\end{cases}\Leftrightarrow t\in(-\infty,2x]$.

Η συνάντηση σ είναι ορισμένη αν και μόνο αν, η συνάρτηση φ(2x-t) είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [1,4]. Προς τούτο, πρέπει και αρκεί: $[1,4]\subseteq(-\infty,2x]$ (2)

και $(2)\Leftrightarrow 4\leq 2x\Leftrightarrow x\geq 2$.

Άρα, σύνολο ορισμού της σ είναι το: $A=[2,+\infty)$.

ii) Θεωρούμε έναν αριθμό $x\geq 2$ και τη συνάρτηση $g(t)=2x-t$ |[1,4]=Δ, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ με $g'(t)=-1$, συνεχή στο Δ. Η συνάρτηση φ προφανώς είναι ορισμένη και συνεχής στο

$g(\Delta)=\left[g(4),g(1)\right]=[2x-4,2x-1]$. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το πρώτο μέλος στο δεύτερο):

$$\sigma(x)=\int_1^4 \varphi(2x-t)dt=-\int_1^4 \varphi(2x-t)(2x-t)'dt=-\int_1^4 \varphi\big(g(t)\big)g'(t)dt=-\int_{g(1)}^{g(4)}\varphi(t)dt=$$

$$-\int_{2x-1}^{2x-4}\varphi(t)dt=\int_{2x-4}^{2x-1}\varphi(t)dt=F(2x-1)-F(2x-4),$$

όπου F είναι μια παράγουσα της φ στο $g(\Delta)$. Συνεπώς :

$$\sigma'(x)=F'(2x-1)(2x-1)'-F'(2x-4)(4x-4)'=2\left[\varphi(2x-1)-\varphi(2x-4)\right].$$

Σημείωση . Για να βρούμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης σ, θα ήταν λάθος, όπως κάνουν μερικοί, να φέρουμε πρώτα τη συνάντηση σ στη μορφή: $\sigma(x)=-\int_{2x-1}^{2x-4}\varphi(t)dt$ και μετά να πούμε: Για να ορίζεται η σ πρέπει και αρκεί η φ να είναι ορισμένη και συνεχής το διάστημα [2χ-4, 2χ-1] και προς τούτο πρέπει και αρκεί: $2x-4\ge 0$, δηλαδή $x\ge 2$. Θα φθάναμε βέβαια στο ίδιο αποτέλεσμα, αλλά κατά τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στην παραπάνω μορφή της σ, δεν θα ξέραμε για ποια x μιλάμε (Ο σκοπός δεν αγιάζει τα μέσα). **Γενικότερα, όταν θέλουμε να βρούμε το σύνολο ορισμό μιας συνάρτησης, δεν θα πρέπει πρώτα να κάνουμε οποιαδήποτε ενέργεια (πράξη ή απλοποίηση) στον τύπο της συνάρτησης. Γιατί τότε, εκτός του ότι δεν ξέρουμε για ποια x ισχύουν οι ενέργειες που κάνουμε, ενδέχεται να φτάσουμε και σε λανθασμένα αποτελέσματα.** Για παράδειγμα, έστω ότι ζητάμε το σύνολο ορισμού τη συνάρτησης: $\sigma(x)=\dfrac{x^2}{x(x-1)}$. Αν απλοποιήσουμε πρώτα με το x θα βρούμε: $\sigma(x)=\dfrac{x}{x-1}$, οπότε θα πούμε ότι σύνολο ορισμού είναι το $\mathbb{R}-\{1\}$, ενώ προφανώς σύνολο ορισμού της συνάρτησης σ είναι το $\mathbb{R}-\{0,1\}$. Έστω ακόμα ότι ζητάμε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{x(x-1)}{x^2}$. Συμπτωματικά και μετά την απλοποίηση $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$ βρίσκουμε το ίδιο σύνολο ορισμού $\mathbb{R}^*$, όπως συνέβη και στο παραπάνω παράδειγμα με το ολοκλήρωμα. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι η διαδικασία είναι σωστή για λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $\varphi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ **. Να βρείτε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης:** $\sigma(x)=\int_1^e \varphi(x-\ln t)dt$

Λύση.i) Θεωρούμε έναν αριθμό $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση φ(x-lnt) είναι ορισμένη και συνεχής αν και μόνο αν: $\begin{cases}t>0\\ x-\ln t\ge 0\end{cases}$ (1), και $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ \ln t\le \ln e^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ t\le e^x\end{cases}\Leftrightarrow t\in(0,e^x]$.

Η συνάντηση σ είναι ορισμένη αν και μόνο αν, η συνάρτηση φ(x-lnt) είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [1,e]. Προς τούτο, πρέπει και αρκεί: $[1,e]\subseteq(0,e^x]$ (2) και

$$(2)\Leftrightarrow e\le e^x\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Άρα, σύνολο ορισμού της σ είναι το: $[1,+\infty)$.

ii) Θεωρούμε έναν αριθμό $x\ge 1$ και θέτουμε: $f(t)=\varphi(x-\ln t)$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [1, e]. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(t)=e^{x-t}$. Τότε: $1=g(x)$, $e=g(x-1)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta_x=[x-1,x]$ με $g'(t)=-e^{x-t}$, συνεχή στο Δ_x (με αυτή τη συνάρτηση θα εξαλειφθεί ο λογάριθμος από την f). Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι: $g(\Delta_x)=[1,e]$. Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Έτσι έχουμε (θεώρημα αντικατάστασης από το δεύτερο μέλος στο πρώτο):

$$\sigma(x)=\int_1^e \varphi(x-\ln t)dt=-\int_{g(x-1)}^{g(x)} f(t)dt=-\int_{x-1}^{x} f\big(g(t)\big)g'(t)dt=\int_{x-1}^{x}\varphi\left(x-\ln e^{x-t}\right)e^{x-t}dt=$$

$=e^x\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt$. Συνεπώς:

$$\sigma'(x)=\left(e^x\right)'\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt+e^x\left(\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt\right)'=e^x\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt+e^x\left[Q(x)-Q(x-1)\right]',$$

όπου Q(t) μία παράγουσα της συνάρτησης $\varphi(t)e^{-t}$. Άρα:

$$\sigma'(x)=e^x\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt+e^x\left[Q'(x)-Q'(x-1)\right]=$$

$$=e^x\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt+e^x\left[\varphi(x)e^{-x}-\varphi(x-1)e^{-x+1}\right]=e^x\int_{x-1}^{x}\varphi(t)e^{-t}dt+\varphi(x)-e\cdot\varphi(x-1).$$