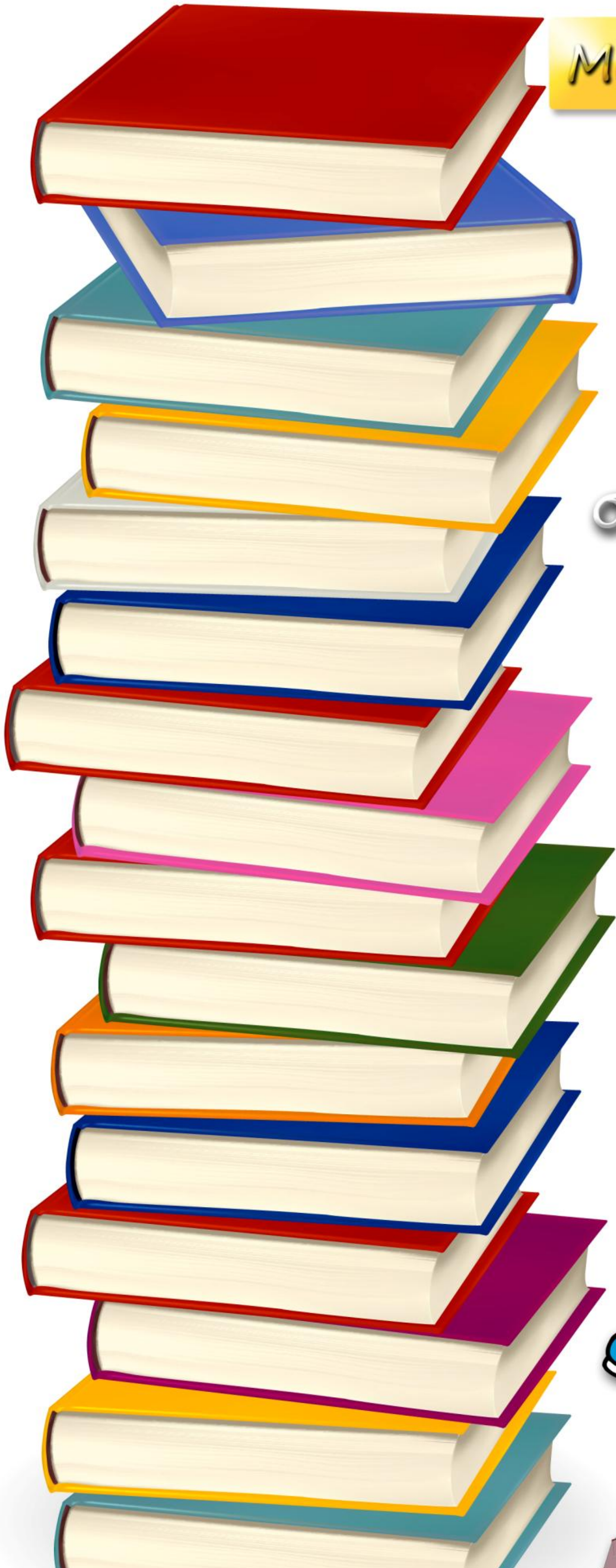
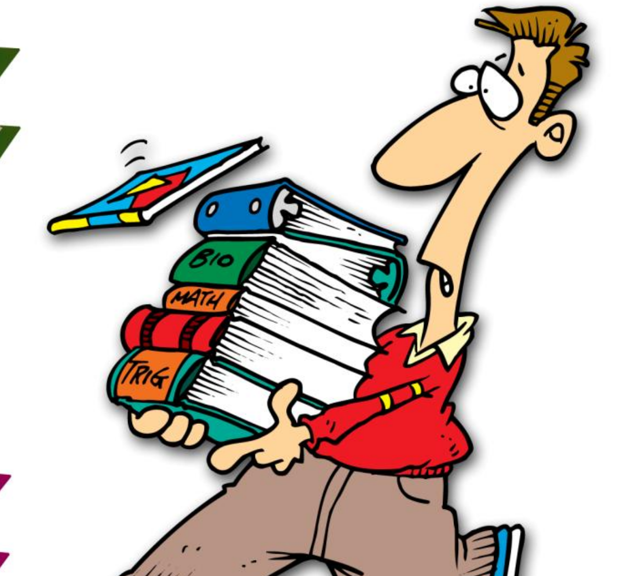


Μαθηματικά Γ Λυκείου

Μια συλλογή ασκήσεων στα μαθηματικά κατεύθυνσης



www.mathematica.gr

Α' Έκδοση: Πρώτη δημοσίευση Κυριακή 8 Απριλίου 2012 .

<u>Η ομάδα εργασίας</u> <u>αποτελείται</u> **<u>από τους :</u>**

- ☑ Κακαβά Βασίλη (KAKABASBASILEIOS)
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη (ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΑΤΣΙΠΟΔΑΣ)
- ☑ Παντούλα Περικλή (perpant)
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα (Τηλέγραφος Κώστας)
- ☑ Χρονόπουλο Παναγιώτη (parmenides51)

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι καλές παρέες ξεκινάνε από κοινά ενδιαφέροντα.
Τι κάνουν περισσότερα από πέντε χιλιάδες εγγεγραμμένα μέλη στο **mathematica.gr;**
Κουβεντιάζουν για μαθηματικά, είτε προτείνοντας ασκήσεις, είτε λύνοντας, είτε σχολιάζοντας.

Όλοι όμως μοιράζονται το ίδιο μικρόβιο, την αγάπη για τα μαθηματικά. Είναι μια μεγάλη παρέα, δεν συμφωνούν σε όλα, αλλά τουλάχιστον συζητάνε πολιτισμένα. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα του **mathematica** είναι ότι συνυπάρχουν αρμονικά άτομα από τον ιδιωτικό και δημόσιο τομέα διαφορετικά σκεπτόμενα. Προσεγγίζεις καλύτερα οτιδήποτε βλέπεις από πολλές οπτικές. Και όταν έχεις το μικρόβιο, είσαι καταδικασμένος να δημιουργήσεις κάποια στιγμή όμορφα πράγματα.
Μια τέτοια συλλογή όμορφων στιγμών έχετε μπροστά σας.
Με πρωτοβουλία του **Παντούλα Περικλή** ξεκίνησε στο **mathematica** μια συλλογή ασκήσεων στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου με ασκήσεις κατάλληλες για την επανάληψη. Με τη συνεχή παρουσία του **Κατσίποδα Δημήτρη** (πρωτεργάτη πρόσφατων συλλογών στο **mathematica**) δημιουργήθηκε μια ενδιαφέρουσα συλλογή. Αρκετοί πρότειναν ασκήσεις και αρκετοί τις έλυσαν.

Καταβλήθηκε μεγάλη προσπάθεια ώστε οι λύσεις να είναι αναλυτικές. Συμμετείχε κι ένας από τους "υπεραναλυτικούς" λύτες στο χώρο, ο **Κακαβάς Βασίλης .** Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργήθηκε μια συλλογή αξιόλογων ασκήσεων με όχι πάντα αναλυτικές λύσεις.

Κάποιες από αυτές είναι πρωτότυπες, καρπός επίπονης, αλλά ταυτόχρονα δημιουργικής πνευματικής υπερπροσπάθειας και κάποιες άλλες, βασισμένες σε ιδέες επιτυχημένων και έμπειρων συγγραφέων, με σημαντική προσφορά στην ελληνική βιβλιογραφία.

Αλλά ο εχθρός του καλού είναι το καλύτερο.
Με πρωτοβουλία και συντονισμό του **Τηλέγραφου Κώστα** δημιουργήθηκε μια ομάδα εργασίας για να ελέγξει μια προς μια όλες τις παραπάνω ασκήσεις, να γράψει πιο αναλυτικά τις δοθείσες λύσεις καθώς και να δώσει νέες λύσεις κατασκευάζοντας ένα πλήρες φυλλάδιο.

Από αυτή την προσπάθεια δεν θα μπορούσε να απουσιάζει ο **parmenides51** ο οποίος με εύστοχες παρατηρήσεις και διορθώσεις βοήθησε να πάρει το αρχείο την τελική του μορφή.

Με αυτήν την συλλογή δίνεται η δυνατότητα, στο νέο καθηγητή να δει ασκήσεις που προτείνουν και λύνουν πεπειραμένοι συνάδελφοι, στον παλιό καθηγητή να

αφουγκραστεί τη νέα γενιά και στο μαθητή να ωφεληθεί από τους καρπούς της αρμονικής αυτής συνύπαρξης. Η παρούσα συλλογή δεν έχει κανένα εμπορικό χαρακτήρα και, παρόλο τον έλεγχο, όλο και κάποιο λάθος ενδέχεται να έχει ξεφύγει. Μπορείτε να στέλνετε μήνυμα στο email της παρέας silogiaskiseon@yahoo.com έτσι ώστε να διορθωθεί σε μελλοντική έκδοση. Ακόμα καλύτερα, μπορείτε να αναζητήσετε λύσεις διαφορετικές από τις ήδη δοθείσες και να τις στέλνετε.
Όταν μαθαίνεις να περπατάς θες να πηγαίνεις και σε άλλα μέρη.
Μακάρι νέες συλλογές να δημιουργούνται κάθε χρόνο, με διαφορετικές ασκήσεις, με αυξανόμενη συμμετοχή από τα μέλη του **mathematica** και με πιο αναλυτικές λύσεις ώστε να γίνεται το έργο της παρέας του εκάστοτε φυλλαδίου ευκολότερο.
Την καλύτερη παρέα στους ασθενείς την κάνουν πάντοτε οι ομοιοπαθείς.
Και το συγκεκριμένο μικρόβιο δεν κρύβεται εύκολα.
Καλό ξεφύλλισμα.

Η ομάδα εργασίας αποτελείται από τους :

- ☑ Κακαβά Βασίλη
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη
- ☑ Παντούλα Περικλή
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα
- ☑ Χρονόπουλο Παναγιώτη

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

Εξώφυλλο: Μιχάλης Νάννος
Σχήματα: Τηλέγραφος Κώστας
Αλεξανδρόπουλος Νίκος

Περιεχόμενα.

Μιγαδικοί

Συλλογή 40 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 17/02/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Μιγαδικοί :–Μια συλλογή 40 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=22769

Έλυσαν οι:

Αθανάσιος Μπεληγιάννης
Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Σταματογιάννης
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Διονύσης Βουτσάς
Ηλίας Καμπέλης
Κώστας Ρεκούμης
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μηνάς Χάτζος
Μυρτώ Λιάπη
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Κανάβης
parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 1 Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Re}\left(z+\frac{4}{z}\right)=2\mathrm{Re}(z)$, (1)

Ε1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

Αν $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, τότε:

Ε2. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z+\frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4\leq w\leq 4$.

Ε3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $u=z+3+4i$.

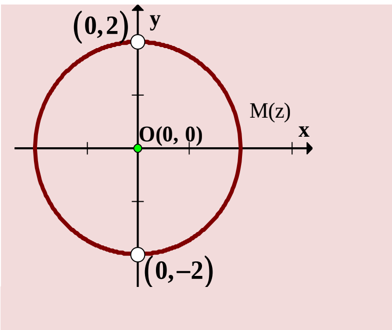
Ε4. Για το προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο του $|u|$.

Ε5. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 ικανοποιούν τη σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=2|z_1+z_2+z_3|$.

Λύση:

Ε1. Είναι $\mathrm{Re}\left(z+\frac{4}{z}\right)=2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}\left(\frac{4}{z}\right)=2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}\left(\frac{4}{z}\right)$. Έστω $z=\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ τότε ισοδύναμα έχουμε:

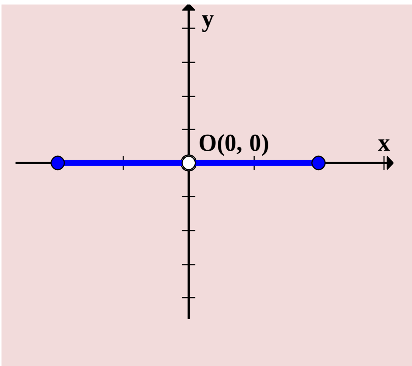
$\frac{4}{z}=\frac{4}{\alpha+\beta i}=4(\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2})\Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{4}{z})=\frac{4\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. Οπότε $\frac{4\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha$.



☑ Για $\alpha\neq 0$ έχουμε $\alpha^2+\beta^2=4$. Δηλαδή η εικόνα του z, $M(z)$, ανήκει στον κύκλο ακτίνας $\rho=2$ και κέντρου $O(0,0)$ εκτός των σημείων $(0,2)$ και $(0,-2)$.

☑ Για $\alpha=0$ αναγκαία $\beta\neq 0$ και η εικόνα του z, $M(z)$, ανήκει στον άξονα $y'y$ εκτός του $O(0,0)$.

Ε2. Έχουμε $\mathrm{Re}(z)\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 0$. Η εικόνα του z, $M(z)$ ανήκει στον κύκλο ακτίνας $\rho=2$ και κέντρου $O(0,0)$ εκτός των σημείων $(0,2)$ και $(0,-2)$. Οπότε, $|z|=2\Leftrightarrow$ $z\bar{z}=4\Leftrightarrow \bar{z}=\frac{4}{z}$. Άρα, $w=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\in\mathbb{R}$. Ακόμα, θα ισχύει $-2\leq \mathrm{Re}(z)\leq 2\Leftrightarrow -4\leq 2\mathrm{Re}(z)\leq 4\Leftrightarrow -4\leq w\leq 4$. Δηλαδή η εικόνα του w, $M(w)$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα AB, όπου $A(-2,0)$ και $B(2,0)$, εκτός του σημείου $O(0,0)$.

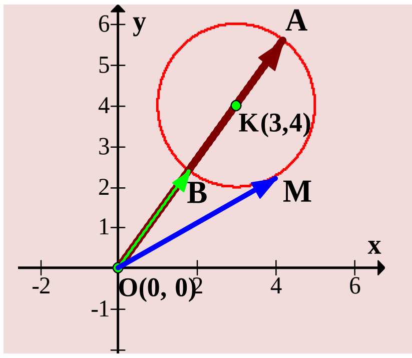


Ε3. Έχουμε,

$\mathbf{u=z+3+4i \Leftrightarrow z=u-3-4i \Rightarrow |z|=2 \Leftrightarrow |u-3-4i|=2 \Leftrightarrow |u-(3+4i)|=2.}$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών $\mathbf{u}$, ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $\mathbf{K(3,4)}$ και ακτίνα $\mathbf{\rho=2.}$

Ε4. Έστω $\mathbf{M(x,y)}$ σημείο του κύκλου $\mathbf{(x-4)^2+(y-3)^2=4}$. Φέρνουμε την ευθεία $\mathbf{OK}$, που τέμνει τον κύκλο στα $\mathbf{A,B.}$



Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{OB \le (OM) \le (OA).}$

Έχουμε $\mathbf{(OK)=d(K,O)=\sqrt{4^2+3^2}=5,}$ οπότε

$\mathbf{|u|_{max}=(OA)=(OK)+\rho=5+2=7.}$

και $\mathbf{|u|_{min}=(OB)=(OK)-\rho=5-2=3.}$

Ε5. Έχουμε, $\mathbf{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=\left|\frac{16}{\overline{z_1z_2}}+\frac{16}{\overline{z_2z_3}}+\frac{16}{\overline{z_3z_1}}\right|=16\frac{|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|}{|z_1z_2z_3|} \Rightarrow}$

$\mathbf{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=\frac{16}{8}|z_1+z_2+z_3|=2|z_1+z_2+z_3|.}$

ΘΕΜΑ 2 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Αν ισχύει η σχέση $\mathbf{z\overline{z}+3(z-\overline{z})i=4(z+\overline{z}), z \in C}$ (1).

Ε1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $\mathbf{z}$ είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|\mathbf{z}|$ καθώς και το μιγαδικό $\mathbf{z_1}$ με το μέγιστο μέτρο.

Ε3. Να προσδιορίσετε τα $\mathbf{\beta,\gamma \in R}$, ώστε ο μιγαδικός $\mathbf{z_1}$ να είναι λύση της εξίσωση $\mathbf{\frac{1}{4}z^2+\beta z+\gamma=0.}$

Ε4. Αν για το μιγαδικό $\mathbf{z_0}$ που ικανοποιεί τη σχέση (1), ισχύει $\mathbf{\left(\frac{\overline{z_0}-4+3i}{\overline{w-5i}}\right)^{2012}=5^{2012}, w \ne 5i}$, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\mathbf{w}$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $\mathbf{\Lambda(0,5)}$ και ακτίνα $\mathbf{\rho_2=1.}$

Λύση:

Ε1. Έστω $\mathbf{z=x+yi, x,y \in R}$ τότε

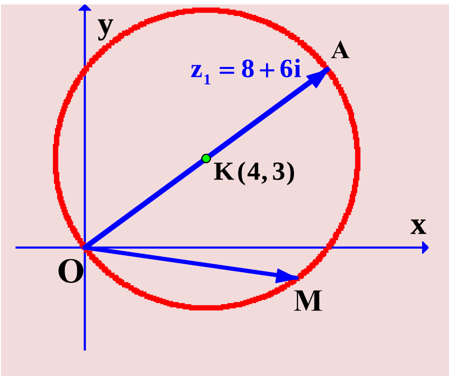
$\mathbf{|z|^2+3(z-\overline{z})i=4(z+\overline{z}) \Leftrightarrow x^2+y^2+3\cdot 2yi^2=4\cdot 2x \Leftrightarrow x^2+y^2-6y-8x=0 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{(x^2-8x+16)+(y^2-6y+9)=16+9 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=25}$.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\mathbf{K(4,3)}$ και ακτίνας $\mathbf{\rho_1=5}$. Για $\mathbf{x=0}$ και $\mathbf{y=0}$ έχουμε $\mathbf{(0-4)^2+(0-3)^2=16+9=25.}$

Επειδή οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν τη σχέση $(x-4)^2+(y-3)^2=25$, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε2. Έστω $M(x,y)$ σημείο του κύκλου $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. Φέρνουμε την ευθεία OK, που τέμνει τον κύκλο στο A.
Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $(OM)\le(OA)$.
Έχουμε $(OK)=\sqrt{4^2+3^2}=5$, οπότε
$|z|_{max}=(OA)=(OK)+\rho=5+5=10.$



Για να προσδιορίσουμε το μιγαδικό με το μέγιστο μέτρο, θα λύσουμε το σύστημα της ευθείας OA και του κύκλου $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

Έχουμε $\lambda_{OA}=\lambda_{OK}=\dfrac{3-0}{4-0}=\dfrac{3}{4}$. Επομένως $OK: y=\dfrac{3}{4}x$.

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=25\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2+(\dfrac{3}{4}x-3)^2=25\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{25}{2}x=0\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{25}{2}x=0\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{25}{16}x(x-8)=0\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}\end{array}\right.$$

Επομένως ο μιγαδικός $z_1=8+6i$ είναι ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο (η άλλη λύση $z_2=0$ παριστάνει το μιγαδικό με το ελάχιστο μέτρο).

Β΄ τρόπος για την εύρεση των συντεταγμένων του A

Το A είναι το συμμετρικό του O ως προς το K. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του μέσου έχουμε

$$\begin{cases}x_\kappa=\dfrac{x_A+x_O}{2}\\ y_\kappa=\dfrac{y_A+y_O}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=\dfrac{x_A}{2}\\ 3=\dfrac{y_A}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=8\\ y_A=6\end{cases}$$

Ε3. Επειδή η εξίσωση $\dfrac{1}{4}z^2+\beta z+\gamma=0$ έχει ρίζα το $z_1=8+6i$, θα έχει ρίζα και την $z_2=\overline{z_1}=8-6i$. Από τους τύπους του **Vieta** έχουμε

$$\begin{cases} S=-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ P=\dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+6i+8-6i=-4\beta \\ (8+6i)(8-6i)=4\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ \gamma=25 \end{cases}$$

Β΄ τρόπος για το Ε3

Επειδή η εξίσωση $\frac{1}{4}z^2+\beta z+\gamma=0$ έχει ρίζα το $z_1=8+6i$, θα την επαληθεύει,

οπότε: $\frac{1}{4}(8+6i)^2+\beta(8+6i)+\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(64+96i-36)+8\beta+6\beta i+\gamma=0 \Leftrightarrow$

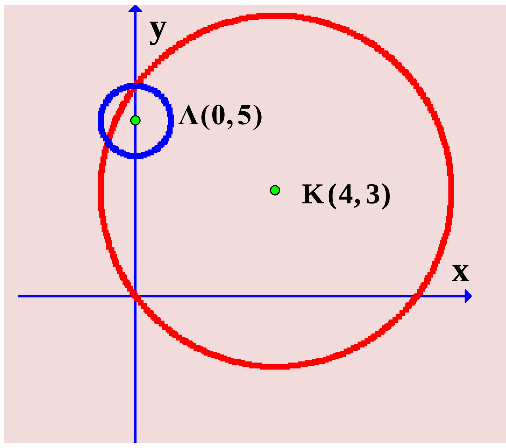
$$7+24i+8\beta+6\beta i+\gamma=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8\beta+\gamma+7=0 \\ 6\beta+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=25 \\ \beta=-4 \end{cases}$$

Ε4. Από το **Ε1** ερώτημα έχουμε

$$|z-4-3i|=5 \Leftrightarrow |\overline{z-4-3i}|=5 \Leftrightarrow |\bar{z}-4+3i|=5$$

Ισχύει $\left(\dfrac{\overline{z_o-4+3i}}{\overline{w-5i}}\right)^{2012}=5^{2012} \Rightarrow$

$$\left|\dfrac{\overline{z_o-4+3i}}{\overline{w-5i}}\right|^{2012}=5^{2012} \Rightarrow \dfrac{|z_o-4-3i|}{|w-5i|}\overset{(E1)}{=}5 \Rightarrow$$



$\dfrac{5}{|w-5i|}=5 \Rightarrow |w-5i|=1$. Επομένως οι εικόνες του w κινούνται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda(0,5)$ και ακτίνας $\rho_2=1$.

ΘΕΜΑ 3

Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου

Έστω $z\in C$, με $|z|=1$ και $|z+1|=\alpha$, όπου $\alpha\in R$. Να αποδείξετε ότι :

Ε1. $0\le\alpha\le 2$.

Ε2. $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{\alpha^2-2}{2}$.

Ε3. $|z^2-z+1|=|\alpha^2-3|$.

Ε4. $\sqrt{3}-\alpha\le|z^2-z+1|\le\dfrac{13}{4}-\alpha$.

Λύση:

Ε1. Αρχικά, αφού $|z+1|=\alpha$ θα ισχύει $|z+1|=\alpha\ge 0$. Με χρήση τριγωνικής ανισότητας έχουμε $0\le\alpha=|z+1|\le|z|+1=1+1=2 \Leftrightarrow 0\le\alpha\le 2$.

Ε2. Έχουμε, $|z+1|=\alpha \Rightarrow |z+1|^2=\alpha^2 \Rightarrow (z+1)(\bar{z}+1)=\alpha^2 \Rightarrow$

$$z\bar{z}+z+\bar{z}+1=\alpha^2 \Rightarrow |z|^2+z+\bar{z}+1=\alpha^2 \Rightarrow z+\bar{z}=\alpha^2-2\ ,(1).$$

Από την (1) έχουμε $2\mathrm{Re}(z)=\alpha^2-2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\dfrac{\alpha^2-2}{2}$

Β΄ τρόπος

Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

Τότε, $\alpha=|z+1|=|x+yi+1|=|(x+1)+yi|=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow$
$(x+1)^2+y^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=\alpha^2$. Και επειδή $|z|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Τότε $1+2x+1=\alpha^2 \Leftrightarrow 2x=\alpha^2-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha^2-2}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\dfrac{\alpha^2-2}{2}$.

Ε3. Έχουμε $z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

Τότε από την (1) έχουμε, $z+\dfrac{1}{z}=\alpha^2-2 \Leftrightarrow z^2+1=z\alpha^2-2z \Leftrightarrow$

$$z^2-z+1=z\alpha^2-3z \Rightarrow |z^2-z+1|=|z||\alpha^2-3| \overset{|z|=1}{\Rightarrow} |z^2-z+1|=|\alpha^2-3|.$$

Β΄ τρόπος

Από τον **Β΄ τρόπο** του ερωτήματος **Ε2** έχουμε πως $x^2+y^2=1$ και $x=\dfrac{\alpha^2-2}{2}$.

$$z^2-z+1=(x+yi)^2-(x+yi)+1=x^2+2xyi-y^2-x-yi+1=$$

$$\overset{y^2=1-x^2}{=} x^2+2xyi-\cancel{1}+x^2-x-yi+\cancel{1} \overset{x^2+y^2=1}{=} x(2x-1)+y(2x-1)i=(2x-1)(x+yi).$$

$$\Rightarrow |z^2-z+1|=|(2x-1)(x+yi)|=|2x-1||x+yi| \overset{2x=\alpha^2-2}{=} |\alpha^2-2-1||z| \overset{|z|}{=} |\alpha^2-3|.$$

Ε4. Λόγω των ερωτημάτων **Ε1, Ε3** ζητείται να αποδείξουμε ότι

$\sqrt{3}-\alpha\le|\alpha^2-3|\le\dfrac{13}{4}-\alpha$,με $\alpha\in[0,2]$,

ή ισοδύναμα πως $\sqrt{3}\le|\alpha^2-3|+\alpha\le\dfrac{13}{4}$ με $\alpha\in[0,2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x+|x^2-3|$ με $x\in[0,2]$.

Αναζητούμε τα ολικά της ακρότατα.

Βγάζοντας τα απόλυτα έχουμε $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+3 & ,x\in[0,\sqrt{3}]\\ x^2+x-3 & ,x\in(\sqrt{3},2]\end{cases}$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική σε κάθε κλάδο της και με τον ορισμό στο σημείο αλλαγής τύπου.

Έχει παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+1 & ,x\in\left[0,\sqrt{3}\right)\\ 2x+1 & ,x\in\left(\sqrt{3},2\right]\end{cases}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f'(x)=-2x+1$		$+$	0	$-$	0		
$f'(x)=2x+1$						$+$	
$f(x)$	τ.ε	$\nearrow$	τ.μ	$\searrow$	τ.ε	$\nearrow$	τ.μ

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και στο $\left[\sqrt{3},2\right]$, καθώς και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τα παρακάτω ακρότατα:

Τοπικά ελάχιστα τα: $f(0)=3, f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$. Τοπικά μέγιστα τα: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}, f(2)=3$.

Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι το ολικό ελάχιστο.

Άρα $f_{max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}$ και $f_{min}=f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$.

άρα $f_{min}\le f(x)\le f_{max}\Leftrightarrow \sqrt{3}\le f(x)\le\frac{13}{4}$ με $x\in[0,2]$.

Δηλαδή, $\sqrt{3}\le\left|x^2-3\right|+x\le\frac{13}{4}$, με $x\in[0,2]$. Οπότε, $\sqrt{3}\le\left|\alpha^2-3\right|+\alpha\le\frac{13}{4}, \alpha\in[0,2]$.

ΘΕΜΑ 4

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω οι μιγαδικοί z,w με τις ιδιότητες $|z|^2+z\bar{w}=1, |w|^2+\bar{z}w=3$.

Ε1. Να δείξετε ότι $|z+w|=2$.

Ε2. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων , των οποίων και να βρείτε την ακτίνα.

Ε3. Να βρείτε την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

Ε4. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z,w και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

Λύση:

Ε1. Έχουμε, $|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+z\bar{w}+w\bar{z}+|w|^2=1+3=4$

Άρα $|z+w|=2$.

Β΄ τρόπος (ευθεία απόδειξη)

Από τα δεδομένα παίρνουμε, $z\bar{w}\in\mathbb{R}$ και $\bar{z}w\in\mathbb{R}$ άρα $z\bar{w}=\bar{z}w$, οπότε οι ζητούμενες σχέσεις γίνονται:

$|z|^2+z\bar{w}=1\Rightarrow z\bar{z}+\bar{z}w=1\Rightarrow\bar{z}(z+w)=1$ και

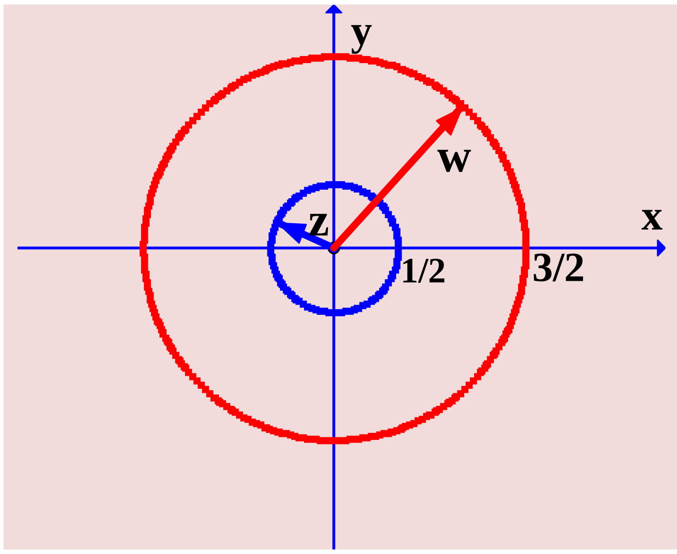
$|w|^2+\bar{z}w=3\Rightarrow w\bar{w}+z\bar{w}=3\Rightarrow\bar{w}(z+w)=3$

με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\bar{z}(z+w)+\bar{w}(z+w)=4\Rightarrow(z+w)\overline{(z+w)}=4\Rightarrow|z+w|^2=4\Rightarrow|z+w|=2.$$

Ε2. Από το **β΄ τρόπο**, έχουμε αποδείξει ότι: $\bar{z}(z+w)=1$ άρα έχουμε διαδοχικά, $\bar{z}(z+w)=1\Rightarrow|\bar{z}(z+w)|=|1|\Rightarrow|z||z+w|=1\Rightarrow2|z|=1\Rightarrow|z|=\frac{1}{2}$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho_1=\frac{1}{2}$.



Επιπλέον έχουμε $\bar{w}(z+w)=3$ και άρα διαδοχικά λαμβάνουμε:

$\bar{w}(z+w)=3\Rightarrow$

$|\bar{w}(z+w)|=|3|\Rightarrow$

$|\bar{w}||z+w|=3\Rightarrow2|w|=3\Rightarrow|w|=\frac{3}{2}$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho_2=\frac{3}{2}$.

Ε3. Έχουμε,

$$|z-w|^2=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2=|z|^2-(1-|z|^2)-(3-|w|^2)+|w|^2=$$

$$=2|z|^2+2|w|^2-4=2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{9}{4}-4=1.$$

Συνεπώς $|z-w|^2=1\Leftrightarrow|z-w|=1.$

Δηλαδή η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w είναι ίση με **1.**

Ε4. Έστω A,B οι εικόνες των z,w αντιστοίχως, που όπως είδαμε ανήκουν στους κύκλους C_1 και C_2 και είναι $AB=|z-w|=1$. Αν τα σημεία A,B,O υποθέσουμε ότι δεν είναι συνευθειακά, τότε δημιουργείται τρίγωνο ABO και από την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε ότι:

$OB<OA+AB\Rightarrow\frac{3}{2}<\frac{1}{2}+1\Rightarrow\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$ που όμως είναι ***άτοπο.***

Β΄ τρόπος

Έστω A,B οι εικόνες των μιγαδικών z,w αντίστοιχα

$$\begin{cases}|z-w|=1\\ \big||z|-|w|\big|=\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2}{2}\right|=1\end{cases}\Rightarrow|z-w|=\big||z|-|w|\big|\Rightarrow|z+(-w)|=\big||z|-|-w|\big|$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \left||\overrightarrow{OA}| - |\overrightarrow{BO}|\right| \Rightarrow |\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}| = \left||\overrightarrow{AO}| - |\overrightarrow{OB}|\right|$

Συνεπώς, αφού ισχύει το ίσον στην τριγωνική ανισότητα, τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι παράλληλα και συνεπώς και τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 5

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $z^2 - 2(\sigma\upsilon\nu t)z + (5 - 4\eta\mu t) = 0,\ t \in [0, \pi]$. Να βρεθούν :

Ε1. Οι ρίζες z_1, z_2 και ο γεωμετρικός τόπος αυτών.

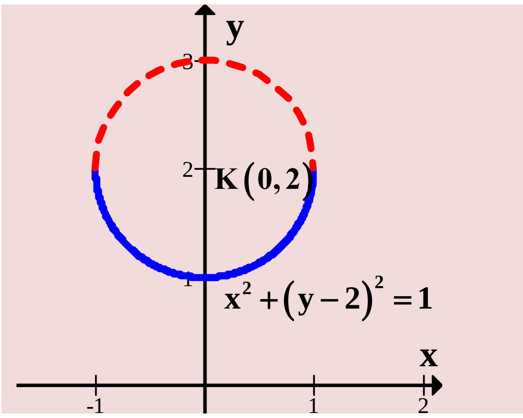
Ε2. Το μέγιστο του $|z_1 - z_2|$.

Ε3. Το μέγιστο του $|z_1 + z_2|$.

Λύση:

Ε1. Είναι, $\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2 t - 20 + 16\eta\mu t = 4\left(1 - \eta\mu^2 t\right) - 20 + 16\eta\mu t =$

$= 4 - 4\eta\mu^2 t - 20 + 16\eta\mu t = -\left(2\eta\mu t - 4\right)^2 < 0$, αφού $\eta\mu t \neq 2$. Άρα η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις $z_1 = \sigma\upsilon\nu t - \left(\eta\mu t - 2\right)i$ και $z_2 = \sigma\upsilon\nu t + \left(\eta\mu t - 2\right)i.$

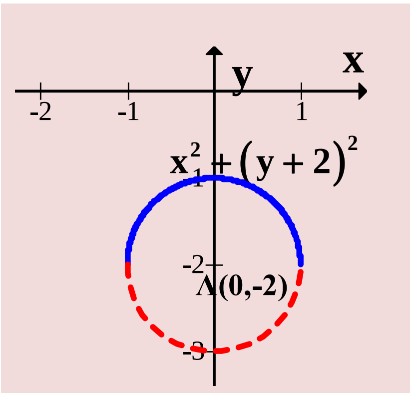


Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1 θέτουμε $\sigma\upsilon\nu t + \left(2 - \eta\mu t\right)i = x + yi$ όπου $x \in [-1, 1]$, και $1 \le y \le 2$ αφού $t \in [0, \pi]$. Τότε

$$\begin{Bmatrix} x = \sigma\upsilon\nu t \\ y = 2 - \eta\mu t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \sigma\upsilon\nu t \\ 2 - y = \eta\mu t \end{Bmatrix}.$$

Επειδή όμως $\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t = 1$ έχουμε $x^2 + \left(y - 2\right)^2 = 1$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_1 είναι το ημικύκλιο κέντρου $K\left(0, 2\right)$ και ακτίνας $\rho = 1$ με $x \in [-1, 1]$, και $1 \le y \le 2$.



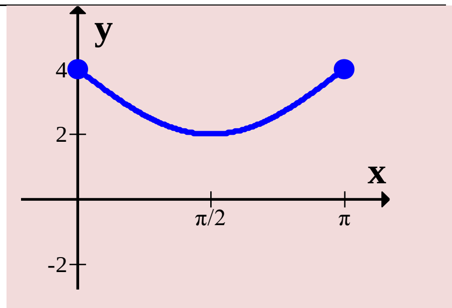
Για να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_2 θέτουμε $\sigma\upsilon\nu t + \left(\eta\mu t - 2\right)i = x + yi$ όπου $x \in [-1, 1]$, και $-2 \le y \le -1$ αφού $t \in [0, \pi]$.

Τότε $\begin{Bmatrix} x = \sigma\upsilon\nu t \\ y = \eta\mu t - 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \sigma\upsilon\nu t \\ y + 2 = \eta\mu t \end{Bmatrix}$

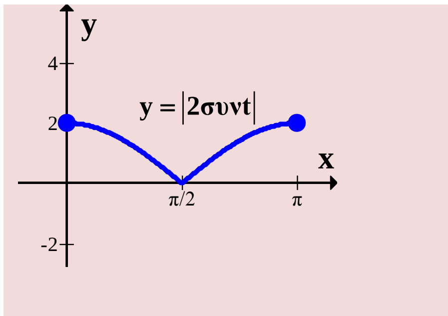
Επειδή όμως $\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t = 1$ έχουμε $x^2 + \left(y + 2\right)^2 = 1$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_2 είναι το ημικύκλιο κέντρου $\Lambda\left(0, -2\right)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$ με $x \in [-1, 1]$, και $-2 \le y \le -1$.

Ε2. Είναι $z_1 - z_2 = -(2\eta\mu t - 4)i$, άρα $|z_1 - z_2| = |2\eta\mu t - 4|$.
Άρα το $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστο όταν η συνάρτηση $|2\eta\mu t - 4|$ παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή στις θέσεις $t = 0$ ή $t = \pi$ έχουμε $\max|z_1 - z_2| = 4$.



Ε3. Είναι $z_1 + z_2 = 2\sigma\upsilon\nu t$, άρα $|z_1 + z_2| = |2\sigma\upsilon\nu t|$.
Άρα το $|z_1 + z_2|$ γίνεται μέγιστο όταν η συνάρτηση $|2\sigma\upsilon\nu t|$ παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή στις θέσεις $t = 0$ ή $t = \pi$ έχουμε $\max|z_1 + z_2| = 2$.



ΘΕΜΑ 6

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται $z = t + (t-1)i, t \in [0,1]$. Να βρεθούν:

Ε1. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

Ε2. Το ελάχιστο $|z|$.

Αν $w = (k^2 + 2) + (k^2 - 1)i, k \in R$. Να βρεθούν:

Ε3. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.

Ε4. Το ελάχιστο $|w|$.

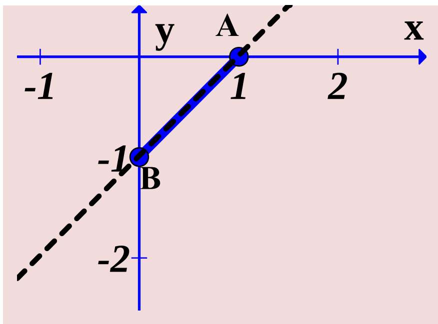
Ε5. Το ελάχιστο $|z - w|$.

Ε6. Οι μέγιστες τιμές των $|w|$ και $|z - w|$ όταν $k \in [0,4]$.

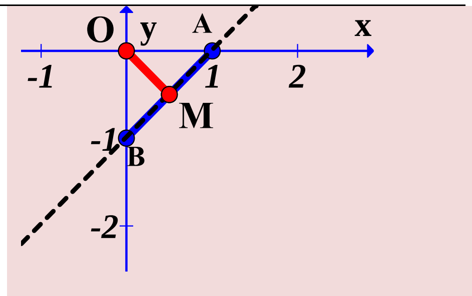
Λύση:

Ε1. Αν $z = x + iy, x, y \in R$, τότε

$$x + iy = t + (t-1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \end{cases}$$ με $x \in [0,1]$ και $y \in [-1,0]$ αφού $t \in [0,1]$. Άρα, με απαλοιφή του t από τις σχέσεις του συστήματος, λαμβάνουμε $x - y = 1$.

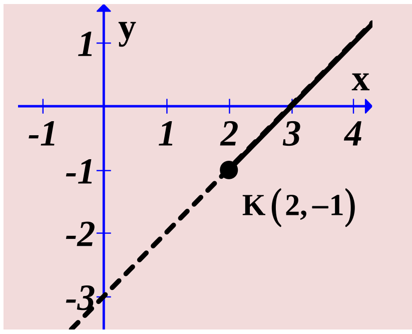


Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι το ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $x - y = 1$, με $x \in [0,1]$ και $y \in [-1,0]$. Δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$.



Ε2. Το ελάχιστο του μέτρου του $\mathbf{z}$ είναι η απόσταση της αρχής των αξόνων από την παραπάνω ευθεία. Δηλαδή

$$\min|z|=(OM)=d(O,\varepsilon)=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

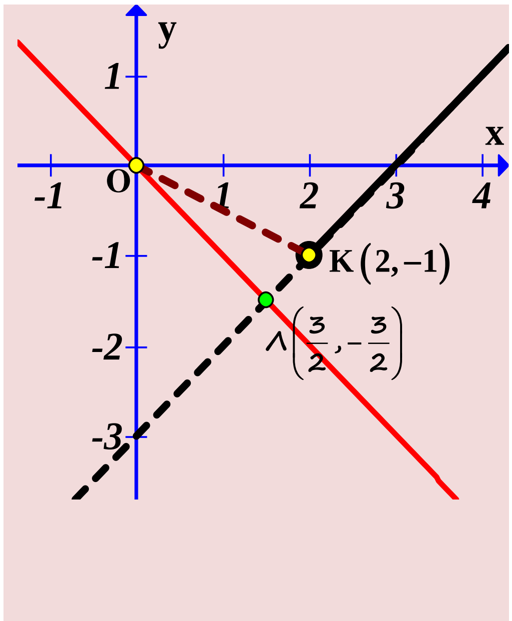


Ε3. Αν $w=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$, τότε

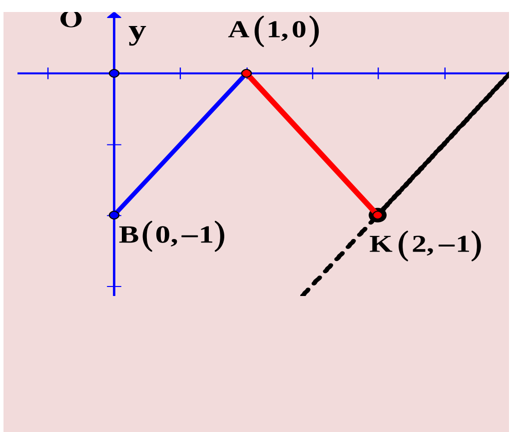
$$x+iy=(k^2+2)+(k^2-1)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=k^2+2\\ y=k^2-1\end{cases}$$ με $k\in\mathbb{R}$ και

$x-2=k^2\geq 0$ και $y+1=k^2\geq 0$. Με απαλοιφή του $\mathbf{k}$ βρίσκουμε $x-y=3.$

Δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $\mathbf{w}$ είναι η ημιευθεία $\varepsilon_1: x-y=3$ για $x\geq 2$ και $y\geq -1.$

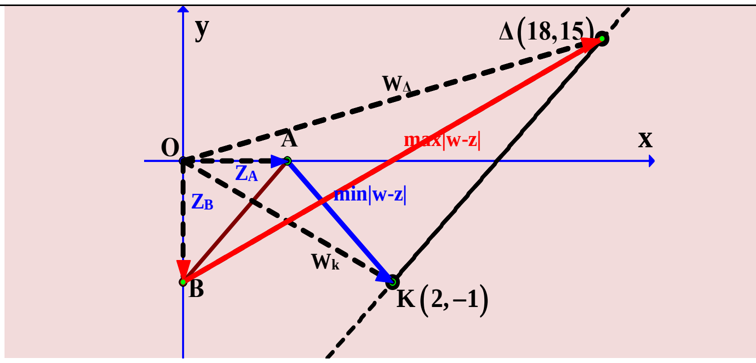


Ε4. Από το $\mathbf{O}$ φέρνουμε κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1: y=x-3$ που την τέμνει στο Λ.
Η $\mathbf{O\Lambda}$ έχει εξίσωση $y=-x$ αφού είναι κάθετη στην (ε_1). Λύνοντας το σύστημα των $y=-x$ και $y=x-3$ έχουμε $\Lambda\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ το οποίο είναι εκτός της ημιευθείας $\varepsilon_1: x-y=3$
Άρα το ελάχιστο του μέτρου του $\mathbf{w}$ είναι η απόσταση της αρχής των αξόνων από την αρχή $K(2,-1)$ της ημιευθείας του ερωτήματος **Ε3**.
Δηλαδή $\min|w|=(OK)=\sqrt{5}.$



Ε5. Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{AB}$ και η ημιευθεία $\varepsilon_1: y=x-3$ είναι παράλληλα.
Η $\mathbf{AK}$ έχει $\lambda_{AK}=\frac{-1-0}{2-1}=-1$ άρα είναι κάθετη στην $\varepsilon_1: y=x-3$ επομένως η απόσταση $|z-w|$ γίνεται ελάχιστη όταν ο $\mathbf{z}$ πάρει εικόνα στο σημείο $A(1,0)$ και ο $\mathbf{w}$ στο σημείο $K(2,-1)$. Τότε,
$\min|z-w|=(AK)=\sqrt{2}.$

Ε6. Όταν $k \in [0,4]$ τότε πλέον η εικόνα του w δεν κινείται πάνω σε ολόκληρη την ημιευθεία ε_1, αλλά πάνω στο κομμάτι της με άκρα $\Gamma(2,-1)$ και $\Delta(18,15)$ αφού:



$k \in [0,4] \Leftrightarrow 0 \le k \le 4 \Leftrightarrow 0 \le k^2 \le 16 \Leftrightarrow 2 \le k^2+2 \le 18 \Leftrightarrow 2 \le x \le 18$ και

$k \in [0,4] \Leftrightarrow 0 \le k \le 4 \Leftrightarrow 0 \le k^2 \le 16 \Leftrightarrow -1 \le k^2-1 \le 15 \Leftrightarrow -1 \le y \le 15$.

Τότε , $\max|w| = (O\Delta) = \sqrt{549}$ και $\max|z-w| = (B\Delta) = \sqrt{580}$.

ΘΕΜΑ 7

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ε1. Να λυθεί η εξίσωση $w^2+w+1=0$.

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $z_1^2+z_1 \cdot z_2+z_2^2=0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|=|z_2|$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$.

Ε4. Για $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z_1^\nu+z_2^\nu \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο $u=\dfrac{z_1^\nu-z_2^\nu}{z_1^\nu+z_2^\nu}$ είναι φανταστικός.

Πηγή: Κ.Ρεκούμης- Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\Delta=-3<0$ άρα $w_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

Ε2. Είναι $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0 \Rightarrow z_2^2=-z_1^2-z_1z_2$ **(1).** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της **(1)** με z_2 και έχουμε

$$z_2^3=-z_1^2z_2-z_1z_2^2 \overset{(1)}{=} -z_1^2z_2-z_1(-z_1^2-z_1z_2)=-z_1^2z_2+z_1^3+z_1^2z_2=z_1^3.$$

Άρα $|z_1|^3=|z_2|^3 \Rightarrow |z_1|=|z_2|$.

Β΄ τρόπος

$z_1{}^2+z_1z_2+z_2{}^2=0.$

Αν $z_2=0$ τότε $z_1{}^2=0 \Rightarrow z_1=0$ άρα $|z_1|=0=|z_2|$.

Αν $z_2 \neq 0$ τότε $\dfrac{z_1{}^2}{z_2{}^2}+\dfrac{z_1z_2}{z_2{}^2}+\dfrac{z_2{}^2}{z_2{}^2}=\dfrac{0}{z_2{}^2} \Rightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\dfrac{z_1}{z_2}+1=0.$

Θέτουμε $\mathbf{w}=\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$ οπότε $\mathbf{w^2+w+1=0}$ και λόγω του **Ε1** έχουμε πως

$$\mathbf{w=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\mathbf{\Rightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1\Rightarrow|z_1|=|z_2|}.$$

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση ισχύει πως $\mathbf{|z_1|=|z_2|}$.

Γ΄ τρόπος

Είναι $\mathbf{z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2=0\overset{\varepsilon\pi\iota\ z_1-z_2}{\Leftrightarrow}(z_1-z_2)(z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2)=0\Leftrightarrow z_1^3-z_2^3=0\Leftrightarrow z_1^3=z_2^3}$.

Άρα $\mathbf{z_1^3=z_2^3\Rightarrow|z_1^3|=|z_2^3|\Rightarrow|z_1|=|z_2|}$.

Ε3. Αν $\mathbf{z_1=0}$, τότε από τη δοσμένη σχέση $\mathbf{z_1^2+z_1\cdot z_2+z_2^2=0}$ έχουμε $\mathbf{z_2=0}$ και συνεπώς η ζητούμενη ισχύει.

Για $\mathbf{z_1z_2\neq0}$, από την αρχική έχουμε:

$$\mathbf{z_1^2+z_1z_2=-z_2^2\Rightarrow z_1(z_1+z_2)=-z_2^2\Rightarrow|z_1||z_1+z_2|=|z_2|^2\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\overset{|z_1|=|z_2|}{\Rightarrow}|z_1+z_2|=|z_2|\ \text{άρα}\ |z_1+z_2|=|z_2|=|z_1|}.$$

Β΄ τρόπος

Από το **Ε2. Β΄ τρόπο** έχουμε πως $\mathbf{\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

Άρα, $\mathbf{\frac{z_1+z_2}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}+1=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow}$

$$\mathbf{\left|\frac{z_1+z_2}{z_2}\right|=\left|\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1\Rightarrow|z_1+z_2|=|z_2|}.$$

Κι επειδή $\mathbf{|z_1|=|z_2|}$ από το **Ε2.** τότε θα ισχύει πως $\mathbf{|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|}$.

Ε4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{\bar{u}=-u}$.

Αφού $\mathbf{z_1z_2\neq0}$, έστω $\mathbf{|z_1|=|z_2|=\rho\Leftrightarrow|z_1|^2=|z_2|^2=\rho^2\Leftrightarrow z_1\bar{z_1}=z_2\bar{z_2}=\rho^2\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{z_1}=\frac{\rho^2}{z_1}\\ \bar{z_2}=\frac{\rho^2}{z_2}\end{cases}}$

Έχουμε, $$\mathbf{\bar{u}=\frac{\bar{z_1}^{\nu}-\bar{z_2}^{\nu}}{\bar{z_1}^{\nu}+\bar{z_2}^{\nu}}=\frac{\left(\frac{\rho^2}{z_1}\right)^{\nu}-\left(\frac{\rho^2}{z_2}\right)^{\nu}}{\left(\frac{\rho^2}{z_1}\right)^{\nu}+\left(\frac{\rho^2}{z_2}\right)^{\nu}}=\frac{\rho^{2\nu}\frac{z_2^{\nu}-z_1^{\nu}}{z_1^{\nu}z_2^{\nu}}}{\rho^{2\nu}\frac{z_2^{\nu}+z_1^{\nu}}{z_1^{\nu}z_2^{\nu}}}=-\frac{z_1^{\nu}-z_2^{\nu}}{z_1^{\nu}+z_2^{\nu}}=-u}.$$

ΘΕΜΑ 8 **Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας**

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία A, B, Γ, για τους οποίους ισχύει: $z_1 + 2z_2 = 3z_3$ και $|z_1| = |z_3| = 1, |z_2| = \sqrt{2}$.

Ε1. Να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0$.

Ε2. **α.** Να δείξετε ότι $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο **ΟΑΒ** είναι ορθογώνιο.

Ε3. Να υπολογίσετε το $\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3})$ καθώς και το $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})$.

Ε4. **α.** Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις **ΑΓ** και **ΒΓ**.

Πηγή: Χ.Πατήλας (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

Λύση:

Ε1. Έχουμε, $z_1 + 2z_2 = 3z_3 \Rightarrow |z_1 + 2z_2| = |3z_3| \Rightarrow |z_1 + 2z_2|^2 = 9|z_3|^2$

$\Rightarrow (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1} + 2\overline{z_2}) = 9$

$\Rightarrow z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_2} + 2z_2\overline{z_1} + 4z_2\overline{z_2} = 9 \Rightarrow |z_1|^2 + 2(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + 4|z_2|^2 = 9$

$\Rightarrow 1 + 4\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + 4\cdot 2 = 9 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0.$

Ε2. **α.** Είναι $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \overset{(E1)}{=} |z_1|^2 + |z_2|^2.$

β. Επειδή $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ έχουμε ότι $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$. Επειδή ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος, έχουμε ότι το τρίγωνο **ΟΑΒ** είναι ορθογώνιο με $AOB = 90^o$.

Ε3. Έχουμε,

$z_1 + 2z_2 = 3z_3 \Rightarrow 2z_2 - 3z_3 = -z_1 \Rightarrow |2z_2 - 3z_3| = |-z_1| \Rightarrow |2z_2 - 3z_3|^2 = |z_1|^2 \Rightarrow$

$(2z_2 - 3z_3)(2\overline{z_2} - 3\overline{z_3}) = 1 \Rightarrow 4z_2\overline{z_2} - 6z_2\overline{z_3} - 6z_3\overline{z_2} + 9z_3\overline{z_3} = 1 \Rightarrow$

$4|z_2|^2 - 6(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}) + 9|z_3|^2 = 1 \Rightarrow 4\cdot 2 - 6(z_2\overline{z_3} + \overline{z_2\overline{z_3}}) + 9 = 1$

$\Rightarrow 17 - 12\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) = 1 \Rightarrow 12\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) = 16 \Rightarrow \mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) = \dfrac{4}{3}.$

Ακόμη,

$z_1 + 2z_2 = 3z_3 \Rightarrow z_1 - 3z_3 = -2z_2 \Rightarrow |z_1 - 3z_3| = |-2z_2| \Rightarrow |z_1 - 3z_3|^2 = 4|z_2|^2 \Rightarrow$

$(z_1-3z_3)(\overline{z_1}-3\overline{z_3})=4\cdot 2\Rightarrow z_1\overline{z_1}-3z_1\overline{z_3}-3z_3\overline{z_1}+9z_3\overline{z_3}=8$

$\Rightarrow |z_1|^2-3(z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1})+9|z_3|^2=8\Rightarrow$

$1-3(z_1\overline{z_3}+\overline{z_1\overline{z_3}})+9=8\Rightarrow 10-6\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})=8\Rightarrow 6\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})=2\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})=\dfrac{1}{3}.$

Ε4. **α.** Έχουμε, $z_1+2z_2=3z_3\Rightarrow z_1-z_3=2z_3-2z_2\Rightarrow z_1-z_3=2(z_3-z_2)$ επομένως $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=2(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB})\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma A}=2\overrightarrow{B\Gamma}$ άρα τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

β. $(A\Gamma)^2=|z_3-z_1|^2=(z_3-z_1)(\overline{z_3}-\overline{z_1})=z_3\overline{z_3}-z_3\overline{z_1}-z_1\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}=$

$=|z_3|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})+|z_1|^2=1-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{4}{3}$. Οπότε $(A\Gamma)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Όμοια έχουμε, $(B\Gamma)^2=|z_3-z_2|^2=(z_3-z_2)(\overline{z_3}-\overline{z_2})=z_3\overline{z_3}-z_3\overline{z_2}-z_2\overline{z_3}+z_2\overline{z_2}=$

$|z_3|^2-2\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3})+|z_2|^2=1-\dfrac{8}{3}+2=\dfrac{1}{3}$ οπότε $(B\Gamma)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 9

Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i, z_2=\gamma+\delta i$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί αριθμοί ώστε $|z_1|=|z_2|=1$. Έστω επιπλέον η εξίσωση $x^2-2|z_1-z_2|x+2=0$ που έχει ρίζες x_1,x_2. Να δείξετε ότι :

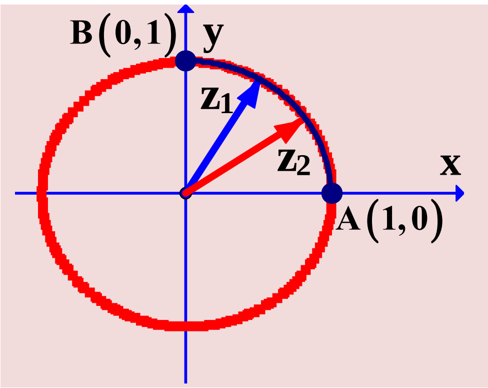
Ε1. Οι ρίζες x_1,x_2 δεν είναι πραγματικές.

Ε2. Ισχύει $|x_1|=|x_2|=\sqrt{2}$.

Ε3. Ισχύει $|x_1-x_2|^2+4|z_1-z_2|^2=8$.

Ε4. Ο μιγαδικός $w=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ είναι πραγματικός και να βρείτε τη μικρότερη τιμή του.

Λύση:



Ε1. Αφού $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$, οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $N(\gamma,\delta)$ των μιγαδικών z_1,z_2 αντίστοιχα είναι εσωτερικά σημεία του τόξου AB, του μοναδιαίου κύκλου, με $A(1,0)$ και $B(0,1)$.

Άρα $0\le|z_1-z_2|<\sqrt{2}=(AB)$.

Τότε η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$\Delta=4\left(|z_1-z_2|^2-2\right)<0$. Άρα η εξίσωση έχει 2 μιγαδικές ρίζες x_1,x_2, που είναι συζυγείς.

Ε2. Είναι $|x_1|=|\bar{x}_1|=|x_2|$.

Επίσης $x_1\cdot x_2=2\Rightarrow|x_1\cdot x_2|=2\Rightarrow|x_1|\cdot|x_2|=2\Rightarrow|x_1|^2=2.$

Άρα $|x_1|=|x_2|=\sqrt{2}.$

Ε3. Είναι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

Οπότε, $|x_1-x_2|^2=\left|\dfrac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}-\dfrac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right|^2=\left|\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{\alpha}\right|^2=-\Delta=-4|z_1-z_2|^2+8$.

Άρα $|x_1-x_2|^2+4|z_1-z_2|^2=8.$

Ε4. Έχουμε $w=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1}{\bar{x}_1}+\dfrac{\bar{x}_1}{x_1}=\dfrac{x_1}{\bar{x}_1}+\overline{\left(\dfrac{x_1}{\bar{x}_1}\right)}=\left(2\mathrm{Re}\left(\dfrac{x_1}{\bar{x}_1}\right)\right)\in\mathbb{R}.$

Επίσης, $w=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2}{x_1\cdot x_2}$. Όμως $x_1+x_2=2(z_1-z_2)$ και

$x_1\cdot x_2=2.$ Συνεπώς, $w=\dfrac{4|z_1-z_2|^2-4}{2}=2|z_1-z_2|^2-2\geq-2.$

Οπότε η ελάχιστη τιμή είναι το -2 όταν είναι $z_1=z_2$ (τότε έχουμε $x_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$).

ΘΕΜΑ 10

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Θεωρούμε το μιγαδικό $z=6+\sigma\upsilon\nu(\pi t)+[8+\eta\mu(\pi t)]i$, με $t\geq 0$.

Ε1. Να βρείτε το $|z-6-8i|$.

Ε2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο που κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z.

Ε3. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση της εικόνας του z από την αρχή των αξόνων.

Ε4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $t\geq 0$, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Ε5. Για $t=0$ να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε ο $w=z+1+\dfrac{\lambda}{z+1}$ να είναι πραγματικός.

Λύση:

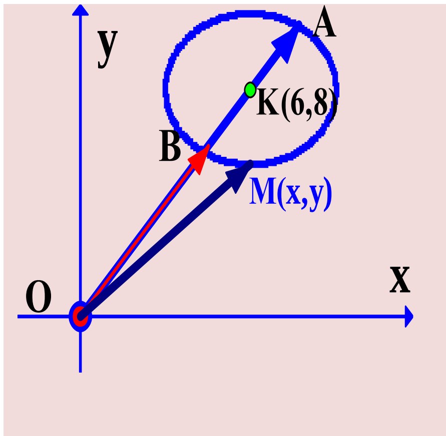
Ε1. Έχουμε, $|z-6-8i|=|6+\sigma\upsilon\nu(\pi t)+8i+\eta\mu(\pi t)i-6-8i|\Leftrightarrow$

$|z-6-8i|=|\sigma\upsilon\nu(\pi t)+\eta\mu(\pi t)i|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2(\pi t)+\eta\mu^2(\pi t)}=1.$

Ε2. Από το **Ε1.** έχουμε $|z-6-8i|=1\Leftrightarrow|z-(6+8i)|=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z, είναι ο κύκλος με κέντρο $K(6,8)$ και ακτίνα $\rho=1.$

Ε3. Έστω $\mathbf{M(x,y)}$ σημείο του κύκλου $\mathbf{(x-6)^2+(y-8)^2=1}$. Φέρνουμε την ευθεία $\mathbf{OK}$, που τέμνει τον κύκλο στα $\mathbf{A,B}$.



Έχουμε $\mathbf{(OK)=d(K,O)=\sqrt{6^2+8^2}=10.}$

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι
$\mathbf{OB\le(OM)\le(OA).}$

Οπότε $\mathbf{|z|_{max}=(OA)=(OK)+\rho=10+1=11}$ και

$\mathbf{|z|_{min}=(OB)=(OK)+\rho=10-1=9}$.

Ε4. Έστω ότι υπάρχει $\mathbf{t\ge0}$ τέτοιος ώστε η εικόνα του $\mathbf{z}$ να βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων. Τότε,

$$\mathbf{Re(z)=Im(z)\Leftrightarrow 6+συν(\pi t)=8+ημ(\pi t)\Leftrightarrow συν(\pi t)-1=ημ(\pi t)+1.}$$

Στην τελευταία σχέση, το πρώτο μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός, ενώ το δεύτερο μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Μόνη περίπτωση λοιπόν για να ισχύει η ισότητα είναι τα δύο μέλη να είναι ταυτόχρονα μηδέν.

Τότε όμως $\begin{cases}\mathbf{συν(\pi t)=1}\\ \mathbf{ημ(\pi t)=-1}\end{cases}$. Άρα $\mathbf{συν^2(\pi t)+ημ^2(\pi t)=2,}$ **άτοπο.**

Συνεπώς δεν υπάρχει $\mathbf{t\ge0,}$ τέτοιος ώστε η εικόνα του $\mathbf{z}$ να βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Β΄ τρόπος

Έστω $\mathbf{(\varepsilon):y=x}$ η διχοτόμος $1^{ης}$ και $3^{η}$ γωνίας των αξόνων. Τότε

$$\mathbf{d(K,\varepsilon)=\frac{|y_o-x_0|}{\sqrt{1^2+1^2}}\overset{(x_0,y_0)=(6,8)}{=}\frac{|8-6|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}>1=\rho.}$$

Συνεπώς ο κύκλος και η ευθεία δεν τέμνονται, άρα δεν υπάρχει $\mathbf{t\ge0}$ ώστε η εικόνα του $\mathbf{z}$ να βρίσκεται στη διχοτόμο της $\mathbf{1^{ης}}$ και $\mathbf{3^{ης}}$ γωνίας των αξόνων.

Γ΄ τρόπος

Έστω υπάρχει μιγαδικός $\mathbf{z}$ με συντεταγμένες $\mathbf{M(x,x),x\in R}$ τότε η

$\mathbf{(x-6)^2+(y-8)^2=1}$ γίνεται $\mathbf{(x-6)^2+(x-8)^2=1\Leftrightarrow x^2-14x-\frac{99}{2}=0}$ που έχει

$\mathbf{\Delta=196-198=-4<0}$ αδύνατη .Συνεπώς δεν υπάρχει $\mathbf{t\ge0,}$ τέτοιος ώστε η εικόνα του $\mathbf{z}$ να βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Ε5. Για $\mathbf{t=0}$ έχουμε $\mathbf{z=7+8i}$. Άρα,

$$\mathbf{w=z+1+\frac{\lambda}{z+1}=7+8i+1+\frac{\lambda}{7+8i+1}=8+8i+\frac{\lambda}{8+8i}=8+8i+\frac{\lambda(8-8i)}{128}\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{w=8+8i+\frac{\lambda}{16}-\frac{\lambda i}{16}\Leftrightarrow w=\left(8+\frac{\lambda}{16}\right)+\left(8-\frac{\lambda}{16}\right)i}.$$

Οπότε $w \in R \Leftrightarrow Im(w)=0 \Leftrightarrow 8-\frac{\lambda}{16}=0 \Leftrightarrow \lambda=128.$

ΘΕΜΑ 11

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνεται ο μιγαδικός $z=\frac{2(x+y)(1+i)}{x+yi}$ με $x,y \in R^*$.

Ε1. Να δείξετε ότι $Re(z)=2\cdot\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}$ και $Im(z)=2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ για κάθε $x,y \in R^*$.

Ε2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο στον οποίο κινείται η εικόνα του z.

Ε3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z.

Ε4. Να βρείτε το μιγαδικό z με το μέγιστο μέτρο.

Πηγή: Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Είναι, $z=\frac{(2x+2xi+2y+2yi)(x-yi)}{x^2+y^2}=\frac{2x^2+2y^2+4xy}{x^2+y^2}+\frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}i$

$=2\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}+2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}i.$

Άρα $Re(z)=2\cdot\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}$ και $Im(z)=2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ε2. Αν $z=\alpha+\beta i,\quad \alpha,\beta \in R$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\alpha=2\cdot\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{2xy}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=1+\frac{2xy}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}-1=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

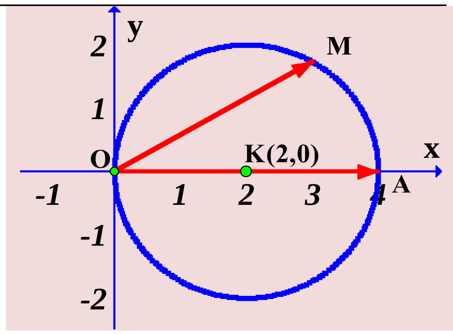
$$\beta=2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

οπότε $\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{(2xy)^2+(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$=\frac{4x^2y^2+(x^2)^2-2x^2y^2+(y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1$$

άρα $\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2+\beta^2=4$ οπότε η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το $K(2,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

Ε3. Έστω $\mathbf{M(x,y)}$ σημείο του κύκλου $(\mathbf{x-2})^2+\mathbf{y}^2=4$.



Για $\mathbf{x=0}$ και $\mathbf{y=0}$ έχουμε $(\mathbf{0-2})^2+\mathbf{0}^2=4$.
Επειδή οι συντεταγμένες του $\mathbf{O(0,0)}$ επαληθεύουν τη σχέση $(\mathbf{x-2})^2+\mathbf{y}^2=4$, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Άρα $|\mathbf{z}|_{\min}=\mathbf{0}$
Φέρνουμε την ευθεία $\mathbf{OK}$, που τέμνει τον κύκλο στο $\mathbf{A}$.
Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{(OM)\le(OA)}$.
Έχουμε $\mathbf{(OK)=\rho=2}$, οπότε $|\mathbf{Z}|_{\max}=\mathbf{(OA)=(OK)+\rho=2+2=4}$.

Ε4. Ο μιγαδικός $\mathbf{z}$ με το μέγιστο μέτρο είναι ο $\mathbf{z_1=4}$ και προκύπτει από τη λύση του συστήματος της ευθείας $\mathbf{OK}$ (άξονας $\mathbf{x'x}$) και του κύκλου.

ΘΕΜΑ 12

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Για τους μιγαδικούς $\mathbf{z}$ ισχύει $|\mathbf{z-1}|=|\mathbf{z^2-9z+20}|$ και έστω ότι $|\mathbf{z-4}|=\lambda,\lambda>0$.

Ε1. Να δείξετε ότι :

α. $\mathbf{z+\bar z=\dfrac{|z|^2+16-\lambda^2}{4}}$.

β. $\mathbf{(1-\lambda^2)|z|^2+(5\lambda^2-1)(z+\bar z)=25\lambda^2-1}$.

γ. $\mathbf{|z|\ge 2}$.

Ε2. Να βρείτε που κινείται η εικόνα του $\mathbf{z}$.

Ε3. Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του $\mathbf{z}$.

Λύση:

Ε1. **α.** Έχουμε,

$$|z-4|=\lambda \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} |z-4|^2=\lambda^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar z-4)=\lambda^2 \Leftrightarrow z\bar z-4z-4\bar z+16=\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$4(z+\bar z)=|z|^2+16-\lambda^2 \Leftrightarrow z+\bar z=\frac{|z|^2+16-\lambda^2}{4}.$$

β. Επιπλέον,

$$|z-1|=|z^2-9z+20| \Leftrightarrow |z-1|=|(z-4)(z-5)| \Leftrightarrow |z-1|=|z-4||z-5| \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$|z-1|=\lambda|z-5| \Leftrightarrow |z-1|^2=\lambda^2|z-5|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\bar z-1)=\lambda^2(z-5)(\bar z-5) \Leftrightarrow$$

$$z\bar z-z-\bar z+1=\lambda^2(z\bar z-5z-5\bar z+25) \Leftrightarrow |z|^2-(z+\bar z)+1=\lambda^2(|z|^2-5(z+\bar z)+25) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2-(z+\bar z)+1=\lambda^2|z|^2-5\lambda^2(z+\bar z)+25\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2-(z+\bar z)-\lambda^2|z|^2+5\lambda^2(z+\bar z)=25\lambda^2-1 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda^2)|z|^2+(5\lambda^2-1)(z+\bar z)=25\lambda^2-1.$$

γ. Τέλος , από το **Ε1.α.** έχουμε, $(1-\lambda^2)|z|^2+(5\lambda^2-1)\dfrac{|z|^2+16-\lambda^2}{4}=25\lambda^2-1 \Leftrightarrow$

$(4-4\lambda^2)|z|^2+(5\lambda^2-1)(|z|^2+16-\lambda^2)=100\lambda^2-4 \Leftrightarrow$

$(\lambda^2+3)|z|^2=5\lambda^4+19\lambda^2+12 \Leftrightarrow (\lambda^2+3)|z|^2=(\lambda^2+3)(5\lambda^2+4) \Leftrightarrow$

$|z|^2=5\lambda^2+4\geq 4 \Rightarrow |z|\geq 2.$

Ε2. $|z|^2=5\lambda^2+4 \Leftrightarrow |z|^2=5|z-4|^2+4 \Leftrightarrow x^2+y^2=5(x-4)^2+5y^2+4 \Leftrightarrow$

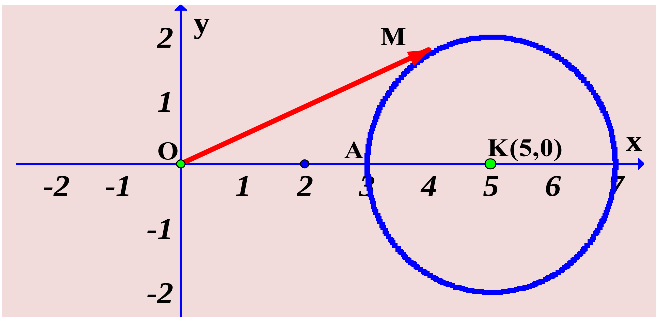
$4x^2+4y^2-40x+84=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x+21=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-10x+25)+y^2=25-21 \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=4.$

Επομένως οι εικόνες του z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(5,0)$ και ακτίνας $\rho=2.$

Ε3. Φέρνουμε την ευθεία OK ,που τέμνει τον κύκλο στο $A.$ Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $(OA)\leq(OM).$ Έχουμε ,

$|z|_{min}=(OA)=(OK)-\rho=5-2=3.$



Σχόλιο

Ο z *ικανοποιεί τις 4 παρακάτω σχέσεις που παριστάνουν τρεις κύκλους με παραμετρική ακτίνα και έναν με σταθερή ακτίνα .*

$$|z-4|=\lambda \Rightarrow (x-4)^2+y^2=\lambda^2$$

$$|z-1|=2\lambda \Rightarrow (x-1)^2+y^2=4\lambda^2$$

$$|z|^2=5\lambda^2+4$$

$$|z-5|=2 \Rightarrow (x-5)^2+y^2=4$$

Η λύση του συστήματος των δύο πρώτων δίνει λύση το σταθερό κύκλο και όπως είδαμε στο Ε4 από τον τρίτο παραμετρικό παίρνουμε πάλι τον σταθερό.

ΘΕΜΑ 13

Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου

Έστω $z,w\in C$ με $|z|^2\cdot(3i+4)+5iz^2=0,\ \ |w|^2\cdot(4+3i)+5iw^2=0$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $|z+w|^2(4+3i)+5i(z+w)^2=0$.

Ε2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του q αν $q=\dfrac{1}{z}+1$.

Λύση:

Ε1.

☑ Αν $z=0$ **και** $w=0$ προφανώς η προς απόδειξη ισχύει.

☑ Αν $z=0$ προφανώς η προς απόδειξη ισχύει αφού γίνεται $|w|^2\cdot(4+3i)+5iw^2=0.$

☑ Αν $\mathbf{w=0}$ προφανώς η προς απόδειξη ισχύει αφού γίνεται $|z|^2\cdot(3i+4)+5iz^2=0.$

☑ Αν $\mathbf{z\neq 0}$ **και** $\mathbf{w\neq 0}$

$$|z|^2\cdot(4+3i)+5iz^2=0\Leftrightarrow z\bar{z}\cdot(4+3i)=-5iz^2\Leftrightarrow \bar{z}=\frac{-5iz}{4+3i}$$

$$|w|^2\cdot(4+3i)+5iw^2=0\Leftrightarrow w\bar{w}\cdot(4+3i)=-5iw^2\Leftrightarrow \bar{w}=\frac{-5iw}{4+3i}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη

$$\bar{z}+\bar{w}=\frac{-5iw}{4+3i}+\frac{-5iz}{4+3i}\Leftrightarrow \overline{z+w}=\frac{-5i(z+w)}{4+3i}\overset{\varepsilon\pi\iota\ z+w}{\Leftrightarrow}\left(\overline{z+w}\right)(z+w)=\frac{-5i(z+w)(z+w)}{4+3i}$$

$$\Leftrightarrow |z+w|^2=\frac{-5i(z+w)^2}{4+3i}\Leftrightarrow |z+w|^2(4+3i)+5i(z+w)^2=0.$$

Β΄ τρόπος

Έστω $\mathbf{z=x+yi,x,y\in R}$.

Αντικαθιστώντας, $|z|^2\cdot(3i+4)+5iz^2=0,$ έχουμε:

$$(x^2+y^2)(4+3i)+5i(x^2-y^2+2xyi)=0\Leftrightarrow$$

$$4(x^2+y^2)+3i(x^2+y^2)-10xy+5i(x^2-y^2)=0\Leftrightarrow(4x^2+4y^2-10xy)+(8x^2-2y^2)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2y^2-5xy=0\ (1)\\ y^2=4x^2\ (2)\end{cases}$$

Η **(2)** δίνει $\mathbf{y=\pm 2x}$.

☑ Για $\mathbf{y=-2x}$ στην **(1)**: $\mathbf{2x^2+8x^2+10x^2=0\Leftrightarrow x=0,y=0}$ άρα $\mathbf{z=0}$.

☑ Για $\mathbf{y=2x}$ στην **(1)**: $\mathbf{2x^2+8x^2-10x^2=0}$ που ισχύει.

Άρα, $\mathbf{z=x+2xi,x\in R}$.

Ομοίως, προκύπτει $\mathbf{w=\alpha+2\alpha i,\alpha\in R}$.

Επομένως, ο (κοινός) γεωμετρικός τόπος των $\mathbf{z,w}$ είναι η ευθεία $\mathbf{(\varepsilon):y=2x}$.

Άρα, αν θεωρήσουμε $\mathbf{z=x_1+iy_1}$ με $\mathbf{y_1=2x_1}$ και $\mathbf{w=x_2+iy_2}$ με $\mathbf{y_2=2x_2}$ τότε για τον $\mathbf{u}$ έχουμε:

$$u=z+w=x_1+iy_1+x_2+iy_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i=$$

$$=(x_1+x_2)+(2x_1+2x_2)i=(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)i.$$

Δηλαδή $\mathbf{Im(u)=2Re(u)}$, που σημαίνει ότι ο $\mathbf{u}$ έχει εικόνες στον ίδιο γεωμετρικό τόπο με τους $\mathbf{z,w}$ δηλαδή στην ευθεία $\mathbf{(\varepsilon):y=2x}$ και επομένως θα επαληθεύει την

$$|u|^2(3i+4)+5iu^2=0\Leftrightarrow|z+w|^2(3i+4)+5i(z+w)^2=0.$$

Ε2. Έστω $\mathbf{z=x+yi,x,\psi\in R^*}$.

Είναι

$$\bar{z}=\frac{-5iz}{4+3i}\Leftrightarrow x\text{-}yi=\frac{-5i(x+yi)}{4+3i}\Leftrightarrow(x\text{-}yi)(4+3i)=-5xi+5y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+3xi-4yi+3y=-5xi+5y\Leftrightarrow(4x+3y)+(3x-4y)i=5y-5xi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 4x + 3y \\ \text{-5x=3x-4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4x \\ \text{-8x=-4y} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x.$$

Άρα $z = x + 2xi, x \neq 0$.

Έχουμε

$$q = \frac{1}{z} + 1 = \frac{1}{x + 2xi} + 1 = \frac{x\text{-}2xi}{x^2 + 4x^2} + 1 = \frac{x(1\text{-}2i)}{5x^2} + 1 = \frac{1\text{-}2i}{5x} + 1 = \left(\frac{1}{5x} + 1\right) - \frac{2i}{5x}$$

Αν $q = X + Yi$, τότε $X = 1 + \frac{1}{5x}, Y = -\frac{2}{5x}$.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με το 2 και προσθέτοντας κατά μέλη:

$2X + Y = 2 \Leftrightarrow Y = -2X + 2$ (ευθεία) χωρίς τα σημεία $(1,0)$ και $(0,2)$.

Β΄ τρόπος

Για $xy \neq 0$, έχουμε

$$q = \frac{1}{z} + 1 = \frac{x^2 - 2x^2i + 2x^2i + 4x^2 + x - 2xi}{x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2 + x}{5x^2} + \frac{-2x}{5x^2}i = \left(1 + \frac{1}{5x}\right) + \left(-\frac{2}{5x}\right)i$$

Αν $q = X + Yi$, τότε $X = 1 + \frac{1}{5x}, Y = -\frac{2}{5x}$.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με το 2 και προσθέτοντας κατά μέλη:

$2X + Y = 2 \Leftrightarrow Y = -2X + 2$ (ευθεία) χωρίς τα σημεία $(1,0)$ και $(0,2)$.

ΘΕΜΑ 14

Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου

Έστω $z, w \in C$ με $zw = 1$.Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 > 0$ και $\alpha(z + \bar{z}) + i\beta(\bar{z} - z) + \gamma(z\bar{z} - 1) + \delta(z\bar{z} + 1) = 0$, να αποδείξετε ότι:

Ε1. Η εικόνα του z διαγράφει κύκλο ή ευθεία.

Ε2. Αν η εικόνα του z διαγράφει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε η εικόνα του w διαγράφει ευθεία.

Ε3. Αν η εικόνα του z διαγράφει ευθεία που δεν περνάει από την αρχή των αξόνων, τότε η εικόνα του w διαγράφει κύκλο ο οποίος περνάει από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Ε1. Έστω $z = x + yi, x, y \in R$, τότε έχουμε

$$\alpha(z + \bar{z}) + i\beta(\bar{z} - z) + \gamma(z\bar{z} - 1) + \delta(z\bar{z} + 1) = 0$$

$$2\alpha x - 2\beta y + \gamma x^2 + \gamma y^2 + \gamma + \delta x^2 + \delta y^2 - \delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\gamma + \delta)x^2 + (\gamma + \delta)y^2 + 2\alpha x - 2\beta y + (\gamma - \delta) = 0 \ \ (1)$$

☑ Αν $\gamma = -\delta$, τότε η **(1)** γίνεται $2\alpha x - 2\beta y - 2\delta = 0 \Leftrightarrow \alpha x - \beta y - \delta = 0$ **(2)**

Η **(2)** παριστάνει εξίσωση ευθείας, διότι δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές των x και y, αφού $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 > 0$

☑ Αν $\gamma \neq -\delta$ τότε η **(1)** γίνεται $x^2 + y^2 + \frac{2\alpha}{(\gamma + \delta)}x - \frac{2\beta}{(\gamma + \delta)}y + \frac{(\gamma - \delta)}{(\gamma + \delta)} = 0$ **(3)**

Έχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=\left(\frac{2\alpha}{\gamma+\delta}\right)^2+\left(\frac{2\beta}{\gamma+\delta}\right)^2-4\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}=$

$\frac{4\alpha^2+4\beta^2}{(\gamma+\delta)^2}-\frac{4(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)}{(\gamma+\delta)^2}=\frac{4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2)}{(\gamma+\delta)^2}>0.$

Άρα η **(3)** παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{\gamma+\delta},\frac{\beta}{\gamma+\delta}\right)$ και ακτίνας

$$\rho=\frac{\sqrt{\frac{4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2)}{(\gamma+\delta)^2}}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2}}{|\gamma+\delta|}.$$

Επομένως η εικόνα του z διαγράφει κύκλο ή ευθεία.

Ε2. Αφού η εικόνα του z διαγράφει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχουμε από **(3)** ότι $\gamma=\delta\neq 0$ αφού $\gamma\neq-\delta$, οπότε ο κύκλος είναι ο

$x^2+y^2+\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\beta}{\gamma}y=0$ με κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{2\gamma},\frac{\beta}{2\gamma}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}.$$

Άρα αποδείχτηκε πως $\left|z+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\right|=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}$ **(1)**.

Θέτουμε $z_0=-\frac{\alpha}{2\gamma}+\frac{\beta i}{2\gamma}$ και $\rho=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}$.

Προφανώς ισχύει πως $|z_0|=\rho=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}$ άρα η **(1)** γίνεται

$$|z-z_0|=|z_0|\overset{z=\frac{1}{w}}{\Leftrightarrow}\left|\frac{1}{w}-z_0\right|=|z_0|\Leftrightarrow\left|\frac{1-wz_0}{w}\right|=|z_0|\Leftrightarrow|1-wz_0|=|w||z_0|$$

$$\Leftrightarrow|z_0|\left|\frac{1}{z_0}-w\right|=|w||z_0|\overset{|z_0|\neq 0}{\Leftrightarrow}\cancel{|z_0|}\left|\frac{1}{z_0}-w\right|=|w|\cancel{|z_0|}\Leftrightarrow\left|w-\frac{1}{z_0}\right|=|w-0|$$

Συνεπώς η εικόνα του w κινείται στη μεσοκάθετο των εικόνων των μιγαδικών $A\left(\frac{1}{z_0}\right)$ και $O(0+0i)$ που είναι ευθεία.

Β΄ τρόπος

Αφού η εικόνα του z διαγράφει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχουμε από **(3)** ότι $\gamma=\delta\neq 0$ αφού $\gamma\neq-\delta$, οπότε ο κύκλος είναι ο

$x^2+y^2+\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\beta}{\gamma}y=0$ με κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{2\gamma},\frac{\beta}{2\gamma}\right)$ και ακτίνας

$$\rho=\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}}}{2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}.$$

Έχουμε $\left|z+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\right|=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}$. Έστω $w=k+mi, k,m\in R$.

Έχουμε,

$$zw=1\overset{w\neq 0}{\Rightarrow} z=\frac{1}{w}\Rightarrow z+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}=\frac{1}{w}+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\Rightarrow\left|z+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\right|=\left|\frac{1}{w}+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\right|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{w}+\frac{\alpha}{2\gamma}-\frac{\beta i}{2\gamma}\right|=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}\Rightarrow\frac{|2\gamma+w\alpha-w\beta i|}{2|\gamma||w|}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\gamma|}\Rightarrow$$

$$|2\gamma+k\alpha+m\alpha i-k\beta i+\beta m|=|w|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{(2\gamma+k\alpha+m\beta)^2+(m\alpha-k\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{k^2+m^2}\Rightarrow$$

$$4\gamma^2+k^2\alpha^2+\beta^2m^2+4\gamma k\alpha+4\gamma m\beta+2k\alpha m\beta+m^2\alpha^2-2m\alpha k\beta+k^2\beta^2$$

$$=k^2\alpha^2+m^2\alpha^2+\beta^2m^2+k^2\beta^2\Rightarrow$$

$$4\gamma k\alpha+4\gamma m\beta+4\gamma^2=0\overset{\gamma\neq 0}{\Rightarrow}\alpha k+\beta m+\gamma=0\ \ (4).$$

Η **(4)** παριστάνει εξίσωση ευθείας αφού δε μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές των k και m, αφού $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2=\alpha^2+\beta^2>0$.

Ε3. Έχουμε ότι η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $\alpha x-\beta y-\delta=0$ **(5).** Επειδή η ευθεία δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε $\delta\neq 0$

$$zw=1\Leftrightarrow(x+yi)(k+mi)=1\Leftrightarrow xk+xmi+kyi-ym=1\Leftrightarrow\begin{cases}xk-ym=1\\ mx+ky=0\end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε $x=\frac{k}{k^2+m^2}$ και $y=-\frac{m}{k^2+m^2}$

Επομένως η **(5)** γίνεται $\alpha\frac{k}{k^2+m^2}+\beta\frac{m}{k^2+m^2}-\delta=0\Rightarrow\delta(k^2+m^2)-\alpha k-\beta m=0\Rightarrow$

$$k^2+m^2-\frac{\alpha}{\delta}k-\frac{\beta}{\delta}m=0\Rightarrow(k^2-2\frac{\alpha}{2\delta}k+\frac{\alpha^2}{4\delta^2})+(m^2-2\frac{\beta}{2\delta}m+\frac{\beta^2}{4\delta^2})=\frac{\alpha^2}{4\delta^2}+\frac{\beta^2}{4\delta^2}$$

$$(k-\frac{\alpha}{2\delta})^2+(m-\frac{\beta}{2\delta})^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\delta^2}.$$

Κύκλος με κέντρο $\Lambda\left(\frac{\alpha}{2\delta},\frac{\beta}{2\delta}\right)$ και ακτίνας $\rho=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2|\delta|}$ ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αφού οι συντεταγμένες της αρχής των αξόνων επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.

ΘΕΜΑ 15 — Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω $\alpha,\beta\in C^*$ και z_1,z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\alpha z+\beta^2=0$. Να δείξετε ότι:

Ε1. Αν $|\alpha|=|\beta|=1$ τότε $|z_1|\le 2$ και $|z_2|\le 2$.

Ε2. Αν $|z_1|=|z_2|$, τότε ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι πραγματικός.

Ε3. Αν $\frac{\alpha}{2\beta}\in R$, και ο $\frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός , να δείξετε ότι $|z_1|=|z_2|$.

Λύση:

Ε1. Αφού z_1,z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+\alpha z+\beta^2=0$.

Έχουμε, $(z-z_1)(z-z_2)=0\Leftrightarrow z^2-zz_2-z_1z+z_1z_2=0\Leftrightarrow z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=0$.

Συνεπώς $z_1+z_2=-\alpha\Rightarrow|z_1+z_2|=|\alpha|\Leftrightarrow|z_1+z_2|=1$.

και $z_1\cdot z_2=\beta^2\Rightarrow|z_1\cdot z_2|=|\beta^2|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|=1$.

Ας υποθέσουμε ότι $|z_1|>2\overset{\cdot|z_2|}{\Leftrightarrow}|z_1||z_2|>2|z_2|\Rightarrow|z_1z_2|>2|z_2|\overset{|z_1z_2|=1}{\Rightarrow}1>2|z_2|\Rightarrow|z_2|<\frac{1}{2}$ **(1)**

Όμως αφού $z_1+z_2=-\alpha\Rightarrow z_1=-\alpha-z_2\Rightarrow|z_1|=|\alpha+z_2|\le|\alpha|+|z_2|=1+|z_2|$.

Άρα $1+|z_2|\ge|z_1|$ όμως $|z_1|>2$ οπότε $1+|z_2|>2\Rightarrow|z_2|>1$ πράγμα όμως που έρχεται σε αντίφαση με την **(1)**. Άρα αποκλείεται να είναι $|z_1|>2$ οπότε θα πρέπει $|z_1|\le 2$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $|z_2|\le 2$.

Ε2. Έστω $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\rho}>0\Rightarrow z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=\rho\Rightarrow\begin{cases}\overline{z_1}=\frac{\rho}{z_1}\\ \overline{z_2}=\frac{\rho}{z_2}\end{cases}$

Ακόμη $z_1\cdot z_2=\beta^2\Rightarrow|z_1\cdot z_2|=|\beta^2|\Leftrightarrow|z_1|\cdot|z_2|=|\beta^2|\Leftrightarrow\rho=|\beta^2|$

Έστω $w=\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{z_1+z_2}{\beta}$.

$$\overline{w}=-\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{\beta}}=-\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{\beta}}=-\frac{\frac{\rho}{z_1}+\frac{\rho}{z_2}}{\overline{\beta}}=-\rho\frac{z_1+z_2}{\overline{\beta}z_1z_2}.$$

Όμως $z_1+z_2=-\alpha$ και $z_1z_2=\beta^2$, οπότε $\overline{w}=-\beta^2\frac{-\alpha}{\overline{\beta}\beta^2}\overset{\rho=|\beta^2|}{=}|\beta^2|\frac{\alpha}{|\beta|^2\cdot\beta}=\frac{\alpha}{\beta}=w.$

Άρα $w=\frac{\alpha}{\beta}\in R$.

Ε3. Έχουμε από την υπόθεση ότι $\frac{\alpha}{2\beta}=k,k\in R\Rightarrow\alpha=2k\beta$.

Οπότε είναι $z_1+z_2=-2\beta k$ και $z_1z_2=\beta^2$.

Άρα: $(z_1+z_2)^2=4k^2\beta^2 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=4k^2z_1z_2 \Rightarrow \dfrac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2}=k^2\in R$.

Άρα $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2}=\dfrac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})^2}{4\overline{z_1}\,\overline{z_2}}\Rightarrow$

$$(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)\overline{z_1}\,\overline{z_2}=(\overline{z_1}^2+2\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_2}^2)z_1z_2\Rightarrow$$

$$z_1^2\overline{z_1}\,\overline{z_2}+z_2^2\overline{z_1}\,\overline{z_2}-\overline{z_1}^2z_1z_2-\overline{z_2}^2z_1z_2=0\Rightarrow$$

$$z_1\overline{z_1}(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)-z_2\overline{z_2}(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0\Rightarrow$$

$$\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right)(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0.$$

Αν ήταν $z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0\Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2}\in R$ που είναι **άτοπο.**

Άρα υποχρεωτικά θα έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 16 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η εξίσωση $z=2\left(\sqrt{2}-\dfrac{2}{z}\right), z\in C^*$, **(1).**

Ε1. Να βρεθούν οι ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης **(1).**

Ε2. Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες τιμές του v, για τις οποίες ισχύει η σχέση $z_1^v+z_2^v=0$.

Ε3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y, που επαληθεύουν την ισότητα $\dfrac{1}{x+yi}+(-i)^{2011}=i^{-16}+\dfrac{1}{z_1^2}+\dfrac{1}{z_2^2}$.

Ε4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει $|z-z_1^2|=|z-z_2^4|$.

α. Να βρεθεί ο μιγαδικός z_0 που έχει το μικρότερο μέτρο.

β. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z+7-i|$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $z=2\left(\sqrt{2}-\dfrac{2}{z}\right)\Leftrightarrow z=2\sqrt{2}-\dfrac{4}{z}\Leftrightarrow z^2-2\sqrt{2}z+4=0$. Άρα με

$\Delta=-8$ παίρνουμε $z_{1,2}=\dfrac{2\sqrt{2}\pm i2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \begin{cases} z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2} \\ z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{cases}$.

Ε2. Έχουμε,

$$z_1^v+z_2^v=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^v+\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^v=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\right)^v(1+i)^v+\left(\sqrt{2}\right)^v(1-i)^v=0$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=0 \Leftrightarrow (1+i)^{\nu}+\left(-i(1+i)\right)^{\nu}=0 \Leftrightarrow (1+i)^{\nu}+(-i)^{\nu}(1+i)^{\nu}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+(-i)^{\nu}=0 \Leftrightarrow 1+(-i)^{4\kappa+\upsilon}=0 \Leftrightarrow 1+(-i)^{\upsilon}=0$$

όπου $\mathbf{\upsilon}$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathbf{\nu}$ με το $\mathbf{4}$. Τότε $(-i)^{\upsilon}=-1$. Άρα πρέπει $\upsilon=2$ και συνεπώς $\nu=4\kappa+2$ με $\kappa\in\{0,1,2,\dots\}$.

Ε3. $$\frac{1}{x+iy}+(-i)^{2011}=i^{-16}+\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+iy}-i^{2011}=\frac{1}{i^{16}}+\frac{z_2^2+z_1^2}{z_1^2z_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x+iy}-i^{4\cdot 502+3}=\frac{1}{(i^4)^4}+\frac{(z_1+z_2)^2-2z_1z_2}{(z_1z_2)^2} \Leftrightarrow \frac{x-iy}{x^2+y^2}+i=1+\frac{(2\sqrt{2})^2-2\cdot 4}{4^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}+i=1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2}+\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2}=1 \\ 1-\dfrac{y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος δίνει $x=y=\frac{1}{2}$.

Ε4. Έχουμε $z_1^2=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2(1+i)^2=4i$ και

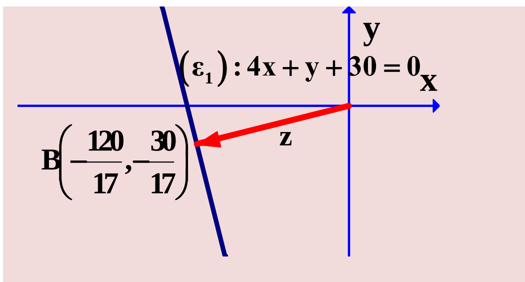
$z_2^4=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4(1-i)^4=4\left((1-i)^2\right)^2=4(-2i)^2=-16$. Οπότε

$|z-z_1^2|=|z-z_2^4| \Leftrightarrow |z-4i|=|z+16| \Leftrightarrow |z-4i|=|z-(-16)|$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τις εικόνες των μιγαδικών $4i$ και -16 και είναι η ευθεία $(\varepsilon_1): 4x+y+30=0$.

Β΄ τρόπος (Για την εύρεση του $z_2{}^4$)

Έχουμε $z_2{}^4=\overline{z_1}^{\,4}=\overline{z_1{}^4}=\overline{(z_1{}^2)^2}=\overline{(4i)^2}=\overline{-16}=-16$.

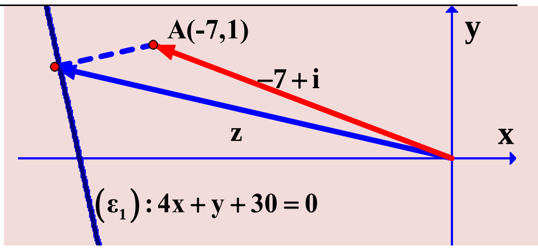
α. Ο μιγαδικός με το μικρότερο μέτρο είναι αυτός του οποίου η εικόνα βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Η ευθεία που διέρχεται από το $O(0,0)$ και είναι κάθετη στην (ε_1) έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y=\frac{1}{4}x$.



Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού με το ελάχιστο μέτρο. Το σημείο τομής είναι το $B\left(-\frac{120}{17},-\frac{30}{17}\right)$ και ο μιγαδικός είναι ο

$$z_o=-\frac{120}{17}-\frac{30}{17}i.$$

β. Έχουμε $|z+7-i|=|z-(-7+i)|$. Το ελάχιστο αυτής της απόστασης είναι η απόσταση της εικόνας του $-7+i$ από την ευθεία $(\varepsilon_1): 4x+y+30=0$.



Άρα αν $A(-7,1)$ η εικόνα του $-7+i$, τότε

$$\min|z+7-i|=d(A,\varepsilon_1)=\frac{|4(-7)+1+30|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

ΘΕΜΑ 17

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται ο μιγαδικός $z=(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i$ με $t\in R$ και $k>1$.

Ε1. Να βρείτε πού κινείται η εικόνα του μιγαδικού z.

Ε2. Αν η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στην ευθεία $y=-x-(k-1)$, να βρείτε το k ώστε το $|z-w|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$.

Ε3. Για το k του **Ε2** ερωτήματος βρείτε πού κινείται η εικόνα του $\bar{z}$ και το ελάχιστο και μέγιστο του $|z-\bar{z}|$.

Ε4. Για το k του **Ε2** ερωτήματος βρείτε το ελάχιστο του $|w-3+4i|$.

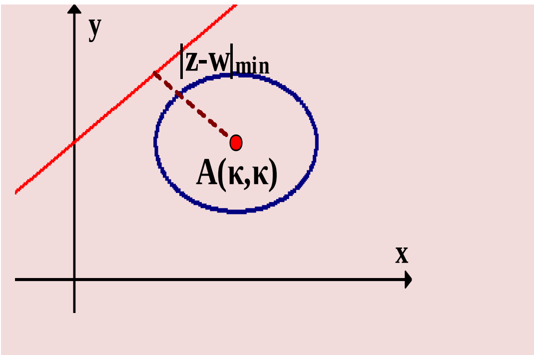
Ε5. Αν ο μιγαδικός u με $u=(-1+m\eta\mu t)+(-1+m\sigma\upsilon\nu t)i$, να βρείτε για ποια τιμή του m ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u περνά από την αρχή των αξόνων.

Ε6. Για τα k,m του **Ε2** και **Ε5** ερωτήματος, να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο του $|z-u|$.

Λύση:

Ε1. Θέτουμε $z=x+yi, x,y\in R$ και τότε είναι $x=k-\eta\mu t, y=k-\sigma\upsilon\nu t$. Αφού,

$\eta\mu^2(t)+\sigma\upsilon\nu^2(t)=1\Rightarrow(x-k)^2+(y-k)^2=1$.



Έτσι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το $A(k,k)$ και ακτίνα $\rho_1=1$ με $k>1$.

Ε2. Είναι $d(A,\varepsilon)=\frac{|3k-1|}{\sqrt{2}}>1$ γιατί $k>1$, έτσι η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο. Τότε $|z-w|_{min}=d(A,\varepsilon)-1=\frac{|3k-1|}{\sqrt{2}}-1$ και πρέπει

$$|z-w|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1\Rightarrow\frac{|3k-1|}{\sqrt{2}}-1=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1\Rightarrow|3k-1|=5\Rightarrow k=2,$$ γιατί $k>1$.

Ε3. Για $\mathbf{k=2}$ είναι $\bar{z}=(2-\eta\mu t)+(\sigma\upsilon\nu t-2)i$.

Θέτουμε $\bar{z}=\alpha+\beta i, \alpha,\beta\in R$ και τότε $\alpha=2-\eta\mu(t)$ και $\beta=\sigma\upsilon\nu(t)-2$ και αφού $\eta\mu^2(t)+\sigma\upsilon\nu^2(t)=1 \Rightarrow (\alpha-2)^2+(\beta+2)^2=1$. Έτσι η εικόνα του $\bar{z}$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το $B(2,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=\rho_1=1$.

Β΄ τρόπος

Από το **Ε1** και για $k=2$ έχουμε ότι $|z-(2+2i)|=1 \Rightarrow |\bar{z}-(2-2i)|=1$ που σημαίνει ότι η εικόνα του $\bar{z}$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το $B(2,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=\rho_1=1$.

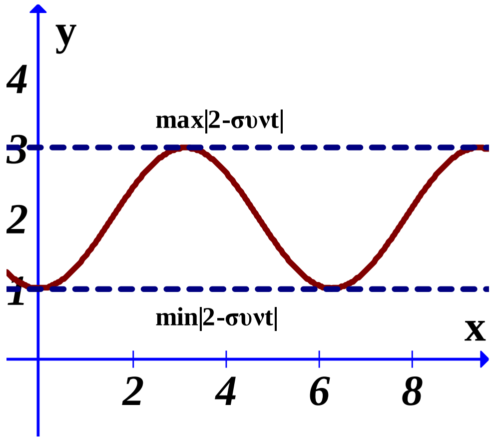
Είναι $|z-\bar{z}|=$

$=|(2-\eta\mu t)+(2+\sigma\upsilon\nu t)i-(2-\eta\mu t)+(2-\sigma\upsilon\nu t)i|=$

$=|2(2-\sigma\upsilon\nu t)i|$

Έχουμε $|z-\bar{z}|_{min}=|2\cdot 1|=2$ και

$|z-\bar{z}|_{max}=|2\cdot 3|=6$



Ε4. Είναι $|w-3+4i|=|w-(3-4i)|$ και παριστάνει την απόσταση της εικόνας του w από το $K(3,-4)$.

Είναι $|w-3+4i|_{min}=d(K,\epsilon)=\dfrac{|3-4+1|}{\sqrt{2}}=0$ (ή αλλιώς είναι μηδέν γιατί το σημείο K ανήκει στην ευθεία).

Ε5. Θέτουμε $u=\gamma+\delta i, \gamma,\delta\in R$.

Τότε $\eta\mu(t)=\dfrac{1+\gamma}{m}, \sigma\upsilon\nu(t)=\dfrac{1+\delta}{m}$ (είναι $m\neq 0$ γιατί αν $m=0$, τότε η εικόνα του u θα είναι το $(-1,-1)$.

Έτσι $\dfrac{(\gamma+1)^2}{m^2}+\dfrac{(\delta+1)^2}{m^2}=1 \Rightarrow (\gamma+1)^2+(\delta+1)^2=m^2$ και η εικόνα του u κινείται σε κύκλο με κέντρο το $\Delta(-1,-1)$ και ακτίνα $\rho_3=|m|$. Για να περνάει ο κύκλος από το $O(0,0)$ πρέπει $(0+1)^2+(0+1)^2=m^2 \Rightarrow m^2=2 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Β΄ τρόπος

Για να διέρχεται ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w από την αρχή των αξόνων πρέπει να υπάρχει τιμή του $m\in R$ ώστε $u=0+0i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+m\eta\mu t=0 \\ -1+m\sigma\upsilon\nu t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu t=\dfrac{1}{m} \\ \sigma\upsilon\nu t=\dfrac{1}{m} \end{cases} \text{ και επειδή}$$

$$\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{2}{m^2}=1 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}.$$

Ε6. Έστω

$$c=z-u=(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i-(-1+m\eta\mu t)-(-1+m\sigma\upsilon\nu t)i=$$
$$=(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i+(1-m\eta\mu t)+(1-m\sigma\upsilon\nu t)i=$$
$$=(k-\eta\mu t+1-m\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t+1-m\sigma\upsilon\nu t)i=$$
$$=\left[k+1-(1+m)\eta\mu t\right]+\left[(k+1-(1+m)\sigma\upsilon\nu t)\right]i$$

Θεωρούμε $c=x+yi, x,y\in R$ άρα

$x=k+1-(1+m)\eta\mu t \Leftrightarrow x-(k+1)=-(1+m)\eta\mu t,$

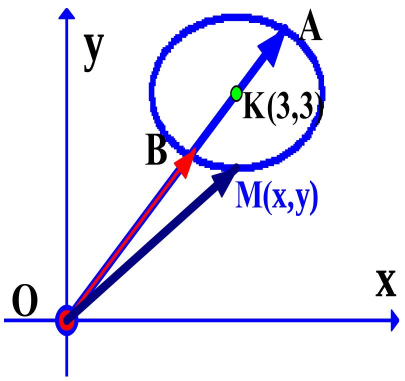
και $y=k+1-(1+m)\sigma\upsilon\nu t \Leftrightarrow y-(k+1)=-(1+m)\sigma\upsilon\nu t$

Άρα

$$\left(x-(k+1)\right)^2+\left(y-(k+1)\right)^2=(1+m)^2\eta\mu^2 t+(1+m)^2\sigma\upsilon\nu^2 t$$

$$\left(x-(k+1)\right)^2+\left(y-(k+1)\right)^2=(1+m)^2 \underset{m=\pm\sqrt{2}}{\overset{k=2}{\Leftrightarrow}} \left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2=(1\pm\sqrt{2})^2$$

$$\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2=(1+\sqrt{2})^2$$



Έστω $M(x,y)$ σημείο του κύκλου $(x-3)^2+(y-3)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. Φέρνουμε την ευθεία OK, που τέμνει τον κύκλο στα $A,B.$

Έχουμε

$(OK)=d(K,O)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι

$OB\le(OM)\le(OA).$

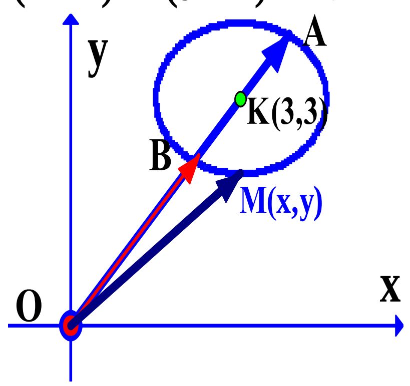
Οπότε

$$|C|_{max}=(OA)=(OK)+\rho=$$
$$=3\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=4\sqrt{2}+1$$

και

$$|C|_{min}=(OB)=(OK)+\rho=$$
$$=3\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1.$$

$$\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2=(1-\sqrt{2})^2$$



Έστω $M(x,y)$ σημείο του κύκλου $(x-3)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Φέρνουμε την ευθεία OK, που τέμνει τον κύκλο στα $A,B.$

Έχουμε

$(OK)=d(K,O)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι

$OB\le(OM)\le(OA).$

Οπότε

$$|C|_{max}=(OA)=(OK)+\rho=$$
$$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=4\sqrt{2}-1$$

και

$$|C|_{min}=(OB)=(OK)+\rho=$$
$$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}+1.$$

ΘΕΜΑ 18 Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Έστω οι μιγαδικοί z, w με τις ιδιότητες $4|z|^2 - 2z\bar{w} = 1, |w|^2 - 2z\bar{w} = 3$.

Ε1. Να δείξετε ότι $|2z - w| = 2$.

Ε2. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z και w ανήκουν σε κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων, των οποίων να βρείτε και την ακτίνα.

Ε3. Να βρείτε το $|6z + w|$.

Ε4. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

Πηγή : Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Αρχικά έχουμε

$$4|z|^2 - 2z\bar{w} = 1 \Leftrightarrow 2z\bar{w} = 4|z|^2 - 1 \Leftrightarrow z\bar{w} = \left(\frac{4|z|^2 - 1}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$

Οπότε $z\bar{w} = \bar{z}w$

$$|2z - w|^2 = (2z - w)(2\bar{z} - \bar{w}) = 4z\bar{z} - 2z\bar{w} - 2w\bar{z} + w\bar{w} =$$

$$4|z|^2 - 2z\bar{w} + |w|^2 - 2z\bar{w} = 4|z|^2 - 2z\bar{w} + |w|^2 - 2\bar{z}w = 4$$

Επομένως, $|2z - w| = 2$.

Ε2. Έχουμε, $|w|^2 - 2z\bar{w} = 3 \Leftrightarrow w\bar{w} - 2z\bar{w} = 3 \Leftrightarrow \bar{w}(w - 2z) = 3$

$$\Rightarrow |\bar{w}||w - 2z| = 3 \overset{E1}{\Rightarrow} 2|\bar{w}| = 3 \Rightarrow |w| = \frac{3}{2}.$$

Και $4|z|^2 - 2z\bar{w} = 1 \Leftrightarrow 4z\bar{z} - 2z\bar{w} = 1 \overset{z\bar{w}=w\bar{z}}{\Leftrightarrow} 4z\bar{z} - 2\bar{z}w = 1 \Leftrightarrow$

$$2\bar{z}(2z - w) = 1 \Rightarrow |2\bar{z}||2z - w| = 1 \overset{E1}{\Rightarrow} 4|z| = 1 \Rightarrow |z| = \frac{1}{4}.$$

Επομένως οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = \frac{1}{4}$, ενώ του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\rho_2 = \frac{3}{2}$.

Ε3. Έχουμε $z\bar{w} = \bar{z}w = \dfrac{4\frac{1}{16} - 1}{2} = \dfrac{\frac{1}{4} - 1}{2} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{2} = -\dfrac{3}{8}$ και

$$|6z + w|^2 = (6z + w)(6\bar{z} + \bar{w}) = 36z\bar{z} + 6z\bar{w} + 6w\bar{z} + w\bar{w} \overset{z\bar{w}=\bar{z}w}{=}$$

$$36|z|^2 + 12z\bar{w} + |w|^2 = \frac{36}{16} + 12\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{9}{4} = 0$$

οπότε $|6z+w|=0$. Επομένως αν A η εικόνα του $-6z$ και B η εικόνα του w, έχουμε ότι $A\equiv B$.

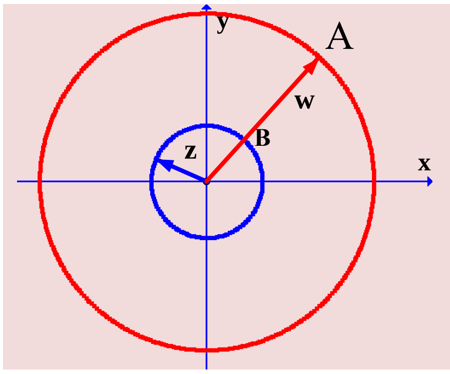
Ε4. $|z-w|^2=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=z\bar{z}-z\bar{w}-w\bar{z}+w\bar{w}\overset{z\bar{w}=w\bar{z}}{=}$

$$|z|^2-2z\bar{w}+|w|^2=\frac{1}{16}-2\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{9}{4}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3+\frac{1}{16}=\frac{49}{16}$$

Οπότε $|z-w|=\frac{7}{4}$.Συνεπώς $|z-w|_{min}=|z-w|_{max}=\frac{7}{4}=$ **σταθερό.**

Β΄ τρόπος

Επειδή από το **Ε3** έχουμε ότι η εικόνα A του $-6z$ και η εικόνα B του w ταυτίζονται, αν Γ η εικόνα του z, έχουμε ότι τα σημεία Γ,O,B είναι συνευθειακά καθώς και ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι αντίρροπα.



Οπότε $|z-w|=|\overrightarrow{B\Gamma}|=|\overrightarrow{BO}|+|\overrightarrow{O\Gamma}|=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

Γ΄ τρόπος

Από το **Ε3** ερώτημα έχουμε πως $|6z+w|=0\Leftrightarrow 6z+w=0\Leftrightarrow w=-6z$.

Οπότε $|z-w|=|z-(-6z)|=|z+6z|=|7z|=7|z|=7\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ διότι $|z|=\frac{1}{4}$

Συνεπώς $|z-w|_{min}=|z-w|_{max}=|z-w|=\frac{7}{4}$.

ΘΕΜΑ 19 — Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και $f(z)=\dfrac{i}{|z-2|-|z-1|}$.

Ε1. Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς z ορίζεται ο $f(z)$.

Ε2. Να δείξετε ότι $|f(z)|\geq 1$.

Ε3. Αν $f(z)=i$, τότε:

α. Να δείξετε ότι $|z-1|+Re(z)=1$.

β. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το $Re(z)$.

γ. Να βρείτε που κινείται η εικόνα του z, όπου ο z είναι μιγαδικός που επαληθεύει την εξίσωση του ερωτήματος **Ε3α**.

Λύση:

Ε1. Πρέπει να είναι $|z-2|-|z-1|\neq 0\Leftrightarrow |z-2|\neq|z-1|$. Τότε:

$$|z-2|-|z-1|\neq 0\Leftrightarrow|z-2|\neq|z-1|\Rightarrow|z-2|^2\neq|z-1|^2$$

$$\Rightarrow(z-2)(\bar{z}-2)\neq(z-1)(\bar{z}-1)\Rightarrow z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4\neq z\bar{z}-z-\bar{z}+1$$

$\Rightarrow z+\bar{z}\neq 3\Rightarrow 2Re(z)\neq 3\Rightarrow Re(z)\neq\frac{3}{2}$. Δηλαδή ο $f(z)$ ορίζεται για κάθε μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $Re(z)\neq\frac{3}{2}$.

Ε2. $|f(z)|=\left|\dfrac{i}{|z-2|-|z-1|}\right|=\dfrac{1}{||z-2|-|z-1||}\geq\dfrac{1}{|(z-2)-(z-1)|}=1.$

Ε3. **α.** $f(i)=i\Rightarrow\dfrac{i}{|z-2|-|z-1|}=i\Rightarrow|z-2|=1+|z-1|$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο παίρνουμε :

$$|z-2|^2=\left(1+|z-1|\right)^2\Rightarrow(z-2)\left(\bar z-2\right)=1+2|z-1|+(z-1)\left(\bar z-1\right)$$

$$\Rightarrow z\bar z-2z-2\bar z+4=1+2|z-1|+z\bar z-z-\bar z+1\Rightarrow 2|z-1|=2-\left(z+\bar z\right)$$

$$\Rightarrow 2|z-1|=2-2\mathrm{Re}(z)\Rightarrow|z-1|=1-\mathrm{Re}(z).$$

β. $0\leq|z-1|=1-\mathrm{Re}(z)\Rightarrow 1-\mathrm{Re}(z)\geq 0\Leftrightarrow 1\geq\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)\leq 1.$

γ. Αν στη σχέση $|z-1|=1-\mathrm{Re}(z)$ θέσουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1-x\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=(1-x)^2\\ 1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x\leq 1\end{cases}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η ημιευθεία $y=0$ με $x\leq 1$.

ΘΕΜΑ 20

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ε1. Να κάνετε τις πράξεις $(z+3+i)(z-4+2i)$.

Ε2. Να λύσετε την εξίσωση $z^2-(1-3i)z-14+2i=0$ **(1).**

Ε3. Έστω z_1,z_2 οι ρίζες της **(1)** με $\mathrm{Re}(z_1)>0$ και A,B,Γ οι εικόνες των z_1,z_2 και $z_3=3+i$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Ε4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ που είναι εικόνες των μιγαδικών z και ικανοποιούν τη σχέση $(MA)^2+2(MB)^2=2(M\Gamma)^2+30.$

Λύση:

Ε1. Έχουμε,

$$\left(z+3+i\right)\left(z-4+2i\right)=z^2-4z+2iz+3z-12+6i+iz-4i-2\Leftrightarrow$$

$$\left(z+3+i\right)\left(z-4+2i\right)=z^2-\left(1-3i\right)z-14+2i.$$

Ε2. Λόγω του **Ε1** ερωτήματος έχουμε

$$z^2-\left(1-3i\right)z-14+2i=0\Leftrightarrow\left(z+3+i\right)\left(z-4+2i\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=4-2i\\ z_2=-3-i\end{cases}$$

Ε3. Οι εικόνες των τριών μιγαδικών z_1,z_2 και $z_3=3+i$ είναι τα σημεία $A(4,-2)$, $B(-3,-1)$ και $\Gamma(3,1)$ αντίστοιχα. Τότε

$$\left(AB\right)=|z_1-z_2|=|4-2i-(-3-i)|=|7-i|=\sqrt{50},$$

$(\text{ΑΓ})=|z_1-z_3|=|4-2i-(3+i)|=|1-3i|=\sqrt{10}$ και

$(\text{ΒΓ})=|z_2-z_3|=|-3-i-(3+i)|=|-6-2i|=\sqrt{40}$.

Επειδή $(\text{ΑΒ})^2=(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΒΓ})^2$ το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την **ΑΒ** και ορθή τη γωνία **Γ.**

Β΄ τρόπος

Οι εικόνες των τριών μιγαδικών z_1,z_2 και $z_3=3+i$ είναι τα σημεία $A(4,-2)$, $B(-3,-1)$ και $\Gamma(3,1)$ αντίστοιχα.

$\overrightarrow{AB}=(-3-4,-1+2)=(-7,1)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(3-4,1+2)=(-1,3)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(3+3,1+1)=(6,2)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-7 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-21+1=-20\neq 0\Rightarrow \overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{A\Gamma}$$

άρα τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου

κι επειδή $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=(-1,3)(6,2)=-6+6=0\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$

το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία τη γωνία **Γ.**

Ε4. Έστω οι μιγαδικοί $z=x+iy,x,y\in\mathbb{R}$ με εικόνες τα σημεία $M(x,y)$.

Τότε $(MA)^2+2(MB)^2=2(M\Gamma)^2+30\Leftrightarrow$

$$\left(\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}\right)^2+2\left(\sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2}\right)^2$$

$$=2\left(\sqrt{(x_M-x_\Gamma)^2+(y_M-y_\Gamma)^2}\right)^2+30$$

$$\Leftrightarrow(x-4)^2+(y+2)^2+2\left((x+3)^2+(y+1)^2\right)=2\left((x-3)^2+(y-1)^2\right)+30$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+16x+12y-10=0.$ Η τελευταία είναι στη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=16,B=12,\Gamma=-10$ και παριστάνει κύκλο αφού $A^2+B^2-4\Gamma=440>0$. Τότε το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(-8,-6)$

και η ακτίνα του είναι $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{440}}{2}=\sqrt{110}.$

ΘΕΜΑ 21

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1,z_2 ώστε αν $\dfrac{z_1}{z_2}=z$ να ισχύει

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2},\text{Im}(z)\geq 0$.

Ε1. Να βρείτε το μιγαδικό z.

Ε2. Να βρείτε κάθε $\nu \in N^*$ ώστε να ισχύει $z_1^{2\nu} = z_2^{2\nu}$.

Ε3. Να δείξετε ότι $z^{95} + z^{94} + ... + z + 1 = 0$.

Ε4. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_2 κινείται πάνω στην ευθεία $y = 2x + 1$, να δείξετε ότι η εικόνα του z_1 κινείται σε ευθεία , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Ε5. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, όπου O, A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών $0, z_1, z_2$ αντίστοιχα.

Ε6. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου OAB του **(Ε5)** ερωτήματος.

Λύση:

Ε1. Από τη $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}, Im(z) \geq 0$ με απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε ότι $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ με ρίζα $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ αφού $Im(z) \geq 0$.

Ε2. Από τη σχέση $\dfrac{z_1}{z_2} = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ και

$(z_1)^{2\nu} = (z_2)^{2\nu} \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2\nu} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\nu}(1+i)^{2\nu} = 1$ που ισχύει όταν $\nu = 4k, k \in Z$.

Ε3. Οι προσθετέοι του αθροίσματος $1 + z + ... + z^{94} + z^{95}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1, \lambda = z$ και είναι 96 το πλήθος.

Το άθροισμα ισούται λοιπόν αφού $z \neq 1$ με $\dfrac{z^{96-1}}{z-1} = 0$ γιατί

$z^{96} = (z^2)^{48} = i^{48} = i^{4 \cdot 1 + 0} = i^0 = 1$.

Ε4. Αν θέσουμε $z_2 = \alpha + \beta i, z_1 = x + yi$ με αντικατάσταση στη σχέση

$\dfrac{z_1}{z_2} = z \Leftrightarrow x + yi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\alpha + \beta i)$ και με λίγες πράξεις και την σχέση $\beta = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow y = -3x - \sqrt{2}$ που είναι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z_1.

Ε5. Αν πάρουμε μέτρα στη δοσμένη σχέση $\dfrac{z_1}{z_2} = z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ έχουμε

$\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, άρα το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

Ε6. Για τη γωνία $\hat{O}$ του τριγώνου OAB παίρνουμε σημεία

$A\in\left(y=-3x-\sqrt{2}\right)$ και $B\in\left(y=2x+1\right)$ λόγω της σχέσης μεταξύ των z_1,z_2 έχουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ με συντεταγμένες $x_A=(-\alpha-1)(\frac{\sqrt{2}}{2})$ και $y_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(3\alpha+1)$ και $x_B=\alpha, y_B=2\alpha+1$ και $\alpha\in R$. Τότε, έχουμε $\sigma\upsilon\nu t=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}$ και με αντικατάσταση $\sigma\upsilon\nu t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $t=45$ μοίρες και άρα οι άλλες ίσες γωνίες $\hat{A}=\hat{B}$ είναι από $\frac{180^o-45^o}{2}=\frac{135^o}{2}=67^o30'$ μοίρες.

ΘΕΜΑ 22

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται ο μιγαδικός $z\in C-\{2i\}$ και η συνάρτηση $f(z)=\frac{z^3+8i}{z-2i}$.

Ε1. Για $z\neq 2i$, να δείξετε ότι $f(z)=z^2+2iz-4$.

Ε2. Να βρείτε το $\left|f(1+i)\right|$.

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση $f(z)=\left|z^2\right|+2iz-4$.

Ε4. Να λύσετε την εξίσωση $f(z)=2iz+\bar{z}-6$.

Ε5. Αν $\left|z\right|=1$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $f(z)$ είναι σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=7$.

Λύση:

Ε1. Είναι $f(z)=\frac{z^3+8i}{z-2i}=\frac{z^3-(2i)^3}{z-2i}=\frac{(z-2i)(z^2+2iz-4)}{z-2i}=z^2+2iz-4$.

Ε2. Είναι $|f(1+i)|=|(1+i)^2+2i(1+i)-4|=|4i-6|=\sqrt{4^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$.

Ε3. $f(z)=|z^2|+2iz-4\Rightarrow z^2+2iz-4=|z^2|+2iz-4\Rightarrow z^2=|z^2|$
$\Rightarrow z^2-|z^2|=0\Rightarrow z^2-z\bar{z}=0\Rightarrow z(z-\bar{z})=0$.
Άρα, ή $z=0$ ή $z-\bar{z}=0\Leftrightarrow z\in R$ και άρα λύσεις της αρχικής εξίσωσης, είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

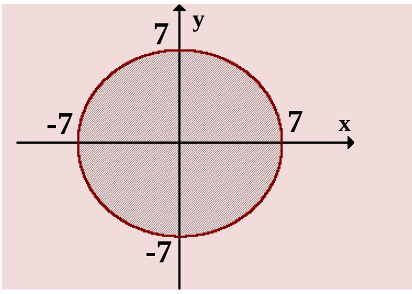
Ε4. Έχουμε $f(z)=2iz+\bar{z}-6\Rightarrow z^2+2iz-4=2iz+\bar{z}-6\Rightarrow z^2-\bar{z}+2=0$.
(1) Θέτουμε $z=x+iy,\ x,y\in R$ και η (1) γίνεται
$\left(x+iy\right)^2-x+iy+2=0\Rightarrow\left(x^2-y^2-x+2\right)+\left(2xy+y\right)i=0$. Θα πρέπει $x^2-y^2-x+2=0$ (2) και $y(2x+1)=0$ (3).
Από την (3) έχουμε

- $y=0\Rightarrow x^2-x+2=0$ και η τελευταία είναι αδύνατη στο R

- ή $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{11}}{2}$ ή $y=-\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Έτσι $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i, z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

Ε5. Είναι $|z|=1$. Ακόμη από τριγωνική ανισότητα έχουμε $|f(z)|\le|2i||z|+|-4|+|z|^2\Rightarrow|f(z)|\le 7$, έτσι η εικόνα του $f(z)$ κινείται σε κυκλικό δίσκο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 7.



ΘΕΜΑ 23

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $(\bar{z})^{2005}z^{2008}=1 \ (1)$.

Ε1. Να βρείτε το $|z|$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}=z^2$.

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση (1).

Ε4. Έστω μιγαδικός z με $\mathrm{Im}(z)>0$, που είναι λύση της εξίσωσης (1) και ο μιγαδικός $w=\frac{\lambda+z}{\lambda-z}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να εκφράσετε το $|w|$ ως συνάρτηση του λ.

β. Να βρείτε το λ, ώστε ο w να έχει μέγιστο μέτρο.

Λύση:

Ε1. Έχουμε: $|\bar{z}|^{2005}.|z|^{2008}=1\Rightarrow|z|^{4013}=1\Rightarrow|z|=1$.

Ε2. Αφού $|z|=1\neq 0\Rightarrow z\neq 0$, έχουμε $|z|=1\Rightarrow z\bar{z}=1\Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

$$(\bar{z})^{2005}z^{2008}=1\Rightarrow\left(\frac{1}{z}\right)^{2005}\cdot z^{2008}=1\Rightarrow z^3=1\Rightarrow z^2\cdot z=1\Rightarrow z^2=\frac{1}{z}\Rightarrow z^2=\bar{z}.$$

Ε3. $(\bar{z})^{2005}z^{2008}=1\Leftrightarrow \bar{z}^{2005}\cdot z^{2005}\cdot z^3=1\Leftrightarrow(\bar{z}z)^{2005}\cdot z^3=1\Leftrightarrow(|z|^2)^{2005}\cdot z^3=1$
$\Leftrightarrow 1\cdot z^3=1\Leftrightarrow(z-1)(z^2+z+1)=0$.

Άρα οι ρίζες είναι $z_1=1, z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ε4. Με βάση τις απαιτήσεις της άσκησης, έχουμε $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Άρα

α. $w=\dfrac{\lambda-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\Rightarrow|w|=\sqrt{\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}}$

β. Ζητάμε να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(\lambda)=\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1},\lambda\in R$.

Έχουμε

$f'(\lambda)=\dfrac{2(\lambda^2-1)}{(\lambda^2+\lambda+1)^2}$, οπότε

$f'(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
λ^2-1		+	0	-	0	+	
$(\lambda^2+\lambda+1)^2$		+		+		+	
$f'(\lambda)$		+		-		+	
$f(\lambda)$	$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f(x)=1$	↗	Τ.μ $f(-1)=3$	↘	Τ.ε $f(1)=\frac{1}{3}$	↗	$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f(x)=1$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}f(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\right)=1$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}\right)=1$

$f(-1)=3$ και $f(1)=\dfrac{1}{3}$.

Άρα από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών της f' και μονοτονίας της f βρίσκουμε ότι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης παρουσιάζεται στη θέση $\lambda=-1$ με τιμή $f(-1)=3$, ενώ το ολικό ελάχιστο παρουσιάζεται στη θέση $\lambda=1$ με τιμή $f(1)=\dfrac{1}{3}$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το $\sqrt{3}$ και η ελάχιστη το $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 24

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω οι μιγαδικοί z_1,z_2 με $Im(z_1)>0$ ώστε $z_1|z_2|+z_2|z_1|=40(1)$ και $z_1z_2=25(2)$.

Ε1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2.

Ε2. Να βρείτε το μιγαδικό $w=z_1-i$, ο οποίος έχει ελάχιστο μέτρο.

Ε3. Έστω $\nu\in N^*$ και ο μιγαδικός $z=z_1^\nu-z_2^\nu$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μιγαδικοί z_1,z_2 ώστε ο z να είναι φανταστικός.

Λύση:

Ε1. Από $z_1z_2=25\Rightarrow z_2=\dfrac{25}{z_1}$ η σχέση (1) γίνεται

$$z_1\left|\frac{25}{z_1}\right|+\frac{25}{z_1}|z_1|=40\Leftrightarrow\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{|z_1|}{z_1}=\frac{40}{25}\Leftrightarrow\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{|z_1|}{z_1}=\frac{8}{5}\Leftrightarrow z_1{}^2+|z_1|^2=\frac{8}{5}z_1|z_1|\ (3)$$

Αν $z_1=x+yi,x\in R,y>0$ τότε η (3) γίνεται

$$(x+yi)^2+x^2+y^2=\frac{8}{5}(x+yi)\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2+x^2+y^2=\frac{8}{5}(x+yi)\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 = \frac{8}{5}x\sqrt{x^2+y^2} \\ 2xy = \frac{8}{5}y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 = \frac{4}{5}x\sqrt{x^2+y^2} \\ x = \frac{4}{5}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Επομένως

$$x = \frac{4}{5}\sqrt{x^2+y^2} \overset{x>0,y>0}{\Leftrightarrow} 25x^2 = 16(x^2+y^2) \Leftrightarrow 9x^2 = 16y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9x^2}{16} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x, x>0$$

Επομένως η εικόνα του z_1 κινείται στην ημιευθεία $y = \frac{3}{4}x$ με $x > 0$

Αν $z_2 = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in R$ τότε

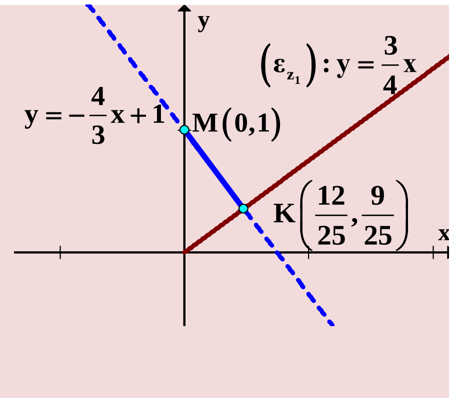
$$z_1 z_2 = 25 \Leftrightarrow z_2 = \frac{25}{z_1} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{25}{x+yi} \overset{y=\frac{3}{4}x}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta i = \frac{25}{x + \frac{3}{4}xi} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{100}{x(4+3i)} \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta i = \frac{100(4-3i)}{25x} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{4(4-3i)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{16}{x} \\ \beta = -\frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{\alpha} \\ x = -\frac{12}{\beta} \end{cases} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \left\{ \frac{16}{\alpha} = -\frac{12}{\beta} \right. \Leftrightarrow \left\{ \beta = -\frac{3}{4}\alpha \right.$$

Επομένως η εικόνα του z_2 κινείται στην ημιευθεία $y = -\frac{3}{4}x$ με $x > 0$

Ε2. Έχουμε $|w| = |z_1 - i| = |z_1 - (0+i)| = (MA)$ όπου A η εικόνα του z_1 και $M(0,1)$. O w έχει ελάχιστο μέτρο, όταν η εικόνα του z_1 βρεθεί στο σημείο K που είναι το σημείο τομής της καθέτου από το M προς την $y = \frac{3}{4}x$.



Η MK έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x + 1$ και μετά την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 1 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$

βρίσκουμε ότι το K έχει συντεταγμένες $\left(\frac{12}{25}, \frac{9}{25}\right)$.

Άρα όταν $z_1 = \frac{12}{25} + \frac{9}{25}i$ τότε ο $w = z_1 - i = \frac{12}{25} + \frac{9}{25}i - i = \frac{12}{25} - \frac{16}{25}i$ έχει το ελάχιστο μέτρο.

Ε3. Ο z_1 έχει γενικά τη μορφή $z_1 = \alpha + \frac{3}{4}\alpha i = \frac{\alpha}{4}(4+3i)$ και λόγω της (2) ο z_2 τη μορφή $z_2 = \frac{4}{\alpha}(4-3i)$ όπου $\alpha > 0$.

Αν ο $z = z_1^\nu - z_2^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι φανταστικός τότε και ο $z_1 - z_2$ για $\nu = 1$ θα είναι φανταστικός.

Αλλά $z_1 - z_2 = \frac{\alpha^2 - 16}{\alpha} + \frac{3\alpha - 48}{4\alpha} i$ που είναι φανταστικός μόνο για $\alpha = 4$.

Άρα υπάρχουν μιγαδικοί που είναι οι $z_1 = 4+3i$ και $z_2 = 4-3i$ ώστε ο $z = z_1^\nu - z_2^\nu = (4+3i)^\nu - (4-3i)^\nu$ να είναι φανταστικός(ως διαφορά συζυγών).

ΘΕΜΑ 25 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ που έχει ρίζες τις $z_1 = -\frac{2}{i}$ και z_2.

Ε1. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τη ρίζα z_2.

Ε2. Να βρείτε το $\nu \in \mathbb{R}$, ώστε $z_1^\nu - z_2^\nu = -16i$.

Ε3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει η παρακάτω σχέση $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16$ (1).

Ε4. Αν για το μιγαδικό z ισχύει η (1), να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - 4 - 4i|$.

Λύση:

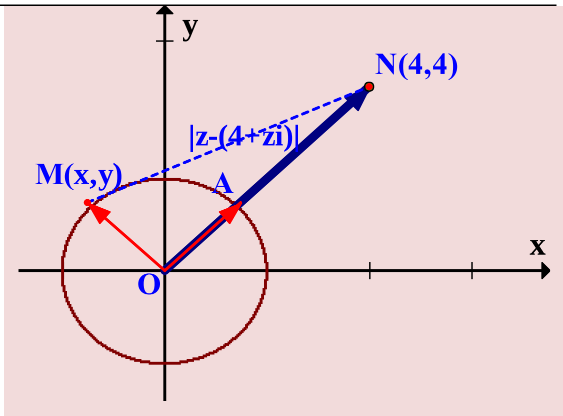
Ε1. Αφού η εξίσωση έχει λύση $z_1 = -\frac{2}{i} = 2i$ τότε θα έχει $z_2 = \overline{z_1} = -2i$. Από τους τύπους **Vieta** έχουμε: $z_1 + z_2 = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $z_1 z_2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 4$.

Ε2. Έστω $d = z_1^\nu - z_2^\nu = (2i)^\nu - (-2i)^\nu = i^\nu[2^\nu - (-2)^\nu]$.
Αν το ν: άρτιος, τότε $d = 0$ (άτοπο).
Άρα, ν: περιττός και τότε $d = -16i \Leftrightarrow i^\nu \cdot 2 \cdot 2^\nu = -16i \Leftrightarrow i^\nu \cdot 2^{\nu+1} = -16i$. Παίρνοντας μέτρα, έχουμε: $2^{\nu+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{\nu+1} = 2^4 \Leftrightarrow \nu = 3$ που επαληθεύει τη δοθείσα σχέση.

Ε3. Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, η σχέση γίνεται:

$|x + (y-2)i|^2 + |x + (y+2)i|^2 = 16 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 + x^2 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ δηλαδή κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.



Ε4. Έστω $\mathbf{M(z)=M(x,y)}$ με $|\mathbf{z}|=2$, τότε $\mathbf{M\in(C): x^2+y^2=4}$ και το σημείο $\mathbf{N(4,4)}$ που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $(\mathbf{C})$ διότι $\mathbf{ON=4\sqrt{2}>2=\rho}$. Το μέτρο $|\mathbf{z-4-4i}|=|\mathbf{z-(4+4i)}|=(\mathbf{MN})$ εκφράζει την απόσταση των σημείων του κύκλου $(\mathbf{C})$ από το σημείο $\mathbf{N(4,4)}$.

Τότε έχουμε $|\mathbf{z-4-4i}|_{\min}=\mathbf{(NA)=(ON)-\rho=4\sqrt{2}-2}$ όπου $\mathbf{A}$ το σημείο τομής της διακέντρου $\mathbf{ON}$ και του κύκλου $(\mathbf{C})$ που βρίσκεται πλησιέστερα στο $\mathbf{N}$

ΘΕΜΑ 26 — Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνονται οι μιγαδικοί $\mathbf{z,w\neq 0}$ για τους οποίους ισχύει $\mathbf{zw+\bar{z}\bar{w}=0}$.

Ε1. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $\left(\dfrac{\bar{z}}{w}\right)^{2010}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Ε2. Να δείξετε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών $\mathbf{\bar{z},w}$ τέμνονται κάθετα.

Ε3. Να δείξετε ότι $|\mathbf{\bar{z}-w}|=|\mathbf{z+\bar{w}}|$.

Ε4. Αν επιπλέον $\dfrac{\bar{z}}{w}+\dfrac{\bar{w}}{z}=2i$.

α. Να βρείτε την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $\dfrac{\bar{z}}{w}$ από το σημείο $\mathbf{A(1,0)}$.

β. Να βρείτε το μιγαδικό $\left(\dfrac{\bar{z}}{w}\right)^{2012}$.

Πηγή :Κώστας Τηλέγραφος

Λύση:

Ε1. Από τη σχέση $\mathbf{zw+\overline{zw}=0}$ έχουμε

$\mathbf{zw+\overline{zw}=0 \Leftrightarrow zw=-\bar{z}\cdot\bar{w} \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}}{w}=-\dfrac{z}{\bar{w}} \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}}{w}=-\overline{\left(\dfrac{\bar{z}}{w}\right)}}$. Συνεπώς ο μιγαδικός $\dfrac{\bar{z}}{w}$ είναι φανταστικός. Άρα υπάρχει $\mathbf{k\in R}$ τέτοιος ώστε $\dfrac{\bar{z}}{w}=\mathbf{ki}$. Τότε

$$\left(\frac{\bar{z}}{w}\right)^{2010}=(ki)^{2010}=k^{2010}i^{2010}=k^{2010}i^{2}=-k^{2010}<0.$$

Ε2. Από τη σχέση $\mathbf{zw+\overline{zw}=0}$ έχουμε $\mathbf{zw+\overline{zw}=0\Leftrightarrow zw=-\overline{zw}}$. Συνεπώς ο μιγαδικός $\mathbf{zw}$ είναι φανταστικός και συνεπώς υπάρχει $\mathbf{m\in R}$ τέτοιος ώστε $\mathbf{zw=mi}$. Έστω τώρα $\mathbf{z=\alpha+\beta i}$ και $\mathbf{w=\gamma+\delta i}$ με $\mathbf{\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}}$. Τότε

$zw=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\delta)i$. Επειδή ο μιγαδικός zw είναι φανταστικός έχουμε $Re(zw)=0 \Leftrightarrow \alpha\gamma-\beta\delta=0$. Τώρα, αν $M(\alpha,-\beta)$ και $N(\gamma,\delta)$ οι εικόνες των $\bar{z}$ και w αντίστοιχα, τότε οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι οι $\overrightarrow{OM}=(\alpha,-\beta)$ και $\overrightarrow{ON}=(\gamma,\delta)$ αντίστοιχα. Επειδή $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=(\alpha,-\beta)(\gamma,\delta)=\alpha\gamma-\beta\delta=0$, έχουμε ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι κάθετες.

Ε3. Έχουμε

$$|\bar{z}-w|=\left|-\frac{zw}{\bar{w}}-w\right|=\left|-w\left(\frac{z}{\bar{w}}+1\right)\right|=|-w|\left|\frac{z+\bar{w}}{\bar{w}}\right|=|w|\frac{|z+\bar{w}|}{|\bar{w}|}=|z+\bar{w}|.$$

Ε4. **α.** Στη σχέση $\frac{\bar{z}}{w}+\frac{\bar{w}}{z}=2i$ θέτουμε $\frac{\bar{z}}{w}=u$. Αφού ο μιγαδικός $\frac{\bar{z}}{w}$ είναι φανταστικός από το **Ε1** ερώτημα, έχουμε $\bar{u}=-u$. Τότε $\frac{\bar{w}}{z}=\overline{\left(\frac{w}{\bar{z}}\right)}=\frac{1}{\bar{u}}$ και

$\frac{\bar{z}}{w}+\frac{\bar{w}}{z}=2i \Rightarrow u+\frac{1}{\bar{u}}=2i \Rightarrow u-\frac{1}{u}=2i \Rightarrow u^2-2iu-1=0 \Rightarrow (u-i)^2=0$. Οπότε $u=i$ με εικόνα το σημείο $B(0,1)$. Η ζητούμενη απόσταση είναι λοιπόν $(AB)=\sqrt{2}$
.

β. Έχουμε $\left(\frac{\bar{z}}{w}\right)^{2012}=u^{2012}=i^{2012}=i^{4\cdot 503}=(i^4)^{503}=1^{503}=1$.

ΘΕΜΑ 27 — Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου

Δίνονται οι μιγαδικοί z με την ιδιότητα : $1+2|z|^2=|z^2+1|^2+2|z+1|^2$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $(z+\bar{z}+1)^2+(z\bar{z}-1)^2=0$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι $z^2+z+1=0$.

Ε4. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς z με τη δοσμένη ιδιότητα καθώς και το μέτρο τους.

Ε5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=z^{2012}+z^{2014}+2013$.

Λύση:

Ε1. Έστω ότι $z\in\mathbb{R}$. Τότε έστω $z=x\in\mathbb{R}$. Η δοσμένη σχέση γίνεται

$1+2|z|^2=|z^2+1|^2+2|z+1|^2 \Rightarrow 1+2x^2=(x^2+1)^2+2(x+1)^2 \Rightarrow$

$1+2x^2=x^4+2x^2+1+2(x+1)^2 \Rightarrow x^4+2(x+1)^2=0$ η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Άρα ο z δεν είναι πραγματικός.

Ε2. Από τη σχέση $1+2|z|^2=|z^2+1|^2+2|z+1|^2$ έχουμε:

$$1+2z(\overline{z})=(z^2+1)(\overline{z}^2+1)+2(z+1)(\overline{z}+1)$$

$$1+2z(\overline{z})=(z\overline{z})^2+z^2+(\overline{z})^2+1+2z(\overline{z})+2z+2(\overline{z})+2$$

$$1+2z(\overline{z})=(z\overline{z})^2+z^2+(\overline{z})^2+1+2z(\overline{z})+2z+2(\overline{z})+2\Rightarrow$$

$$\left(z^2+(\overline{z})^2+1+2z\overline{z}+2z+2\overline{z}\right)+\left((z\overline{z})^2-2z\overline{z}+1\right)=0\Rightarrow$$

$$(z+\overline{z}+1)^2+(z\overline{z}-1)^2=0\,.$$

Ε3. Επειδή οι παραστάσεις στη σχέση του προηγούμενου ερωτήματος είναι πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα τετραγώνων ίσο με το 0, θα είναι:

$z+\overline{z}+1=0$ και $|z|^2-1=0$. Άρα $|z|^2-1=0\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, οπότε

$z+\overline{z}+1=0\Leftrightarrow z+\dfrac{1}{z}+1=0\Leftrightarrow z^2+z+1=0$.

Ε4. Από τη σχέση $z+\overline{z}+1=0$ παίρνουμε

$z+\overline{z}+1=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)=-1\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\dfrac{1}{2}$. Επιπλέον ισχύει ότι $|z|=1$

Τότε, αν θέσουμε $z=x+yi$, επειδή $x=-\dfrac{1}{2}$ και $x^2+y^2=1$, βρίσκουμε τελικά

ότι : $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ε5. Είναι $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z^2=-z-1$

$\Rightarrow z^3=zz^2=z(-z-1)=-z^2-z=-(-z-1)-z=z+1-z=1\Rightarrow z^3=1$.

Οπότε έχουμε:

$z^{2012}+z^{2014}+2013=(z^3)^{674}+(z^3)^{674}z^2+2013=z+z^2+1+2012=2012$.

ΘΕΜΑ 28 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq 2i$ και η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^2+4}{|z-2i|}$ (1).

Ε1. Να βρείτε το $\mathrm{Im}(f(1+i))$.

Ε2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $f(z)\in\mathbb{R}$.

Ε3. Να δείξετε ότι $|f(z)|=|z+2i|$.

Ε4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει $|f(z-5i)|+|f(z+i)|=10$ (2).

Ε5. Για τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη (2), να βρείτε τους μιγαδικούς με το μέγιστο μέτρο.

Ε6. Αν οι μιγαδικοί z_1 και z_2 ικανοποιούν την **(2)**, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 10.$

Λύση:

Ε1. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε :

$$f(1+i) = \frac{(1+i)^2+4}{|(1+i)-2i|} = \frac{2i+4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(2+i) \Rightarrow Im(f(1+i)) = \sqrt{2}\ .$$

Ε2. Αφού $f(z) \in R \Rightarrow \overline{f(z)} = f(z) \Rightarrow \frac{(\bar{z})^2+4}{|z-2i|} = \frac{(z^2+4)}{|z-2i|}$.

Άρα $(\bar{z})^2 = z^2$ και συνεπώς έχουμε $(\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = 0 \Rightarrow z \in R$ ή $z \in C - 2i$.

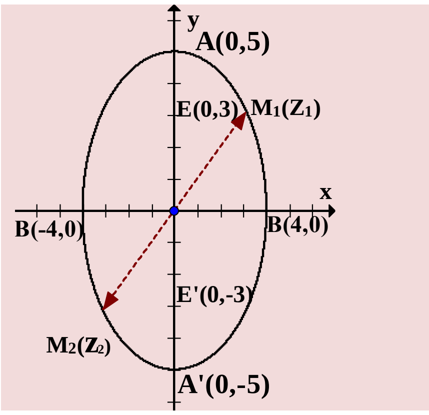
Ε3. Αν πάρουμε μέτρα στη δοσμένη σχέση έχουμε $|f(z)| = \frac{|(z-2i)(z+2i)|}{|z-2i|}$ και έτσι $|f(z)| = |z+2i|$.

Ε4. Λόγω του **Ε3** έχουμε

$$|f(z-5i)| + |f(z+i)| = 10 \Leftrightarrow |z-5i+2i| + |z+i+2i| = 10 \Leftrightarrow |z-3i| + |z+3i| = 10$$

Αν M η εικόνα του z και $E(0,3)$, $E'(0,-3)$ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ αντίστοιχα, τότε έχουμε $|z-3i| + |z+3i| = 10 \Rightarrow (ME) + (ME') = 10 > (EE') = 6$. Οπότε οι εικόνες του z κινούνται στην έλλειψη με εστίες $E(0,3)$, $E'(0,-3)$ και $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = 3$.

Ε5. Από τους παραπάνω μιγαδικούς με εικόνα πάνω στην έλλειψη, αυτοί με το μέγιστο μέτρο είναι αυτοί με εικόνες στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, δηλαδή τα σημεία $A'(0,-5)$ και $A(0,5)$. Είναι λοιπόν οι μιγαδικοί $z = 5i$ και $z = -5i$ αυτοί με το μεγαλύτερο μέτρο.



Ε6. Ισχύει ότι η μεγίστη απόσταση δύο σημείων μιας έλλειψης είναι η (AA'). Δηλαδή $|z_1 - z_2| \le (AA') \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \le 10.$

ΘΕΜΑ 29

Προτείνει ο Ηλίας Καμπέλης

Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \alpha z + 9 = 0$, $\alpha \in R$ και $z_1, z_2 \notin R$.

Ε1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού α.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $\left(z_1^{17}+z_2^{17}\right)\in R$.

Ε3. Να βρείτε τα $|z_1|,|z_2|$.

Ε4. Αν $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=-2$ να βρείτε το α.

Ε5. Για $\alpha=0$ και $\mathrm{Im}(z_1)>0$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z-z_1|=4+|z-z_2|$.

Λύση:

Ε1. Επειδή οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, έχουμε ότι $\Delta<0$. Επομένως $(-\alpha)^2-4\cdot1\cdot9<0\Leftrightarrow\alpha^2<36\Leftrightarrow|\alpha|<6\Leftrightarrow-6<\alpha<6$.

Ε2. Αρκεί να δείξουμε πως $u=z_1^{17}+z_2^{17}=\bar{u}$.

Έχουμε, $z_2=\overline{z_1}$ και $\overline{z_2}=z_1$. Τότε $u=z_1^{17}+z_2^{17}$ και

$\bar{u}=\overline{z_1^{17}+z_2^{17}}=\overline{z_1^{17}}+\overline{z_2^{17}}=\left(\overline{z_1}\right)^{17}+\left(\overline{z_2}\right)^{17}=z_2^{17}+z_1^{17}=u$. Άρα $\left(z_1^{17}+z_2^{17}\right)\in R$.

Β΄ τρόπος

$$z_1^{17}+z_2^{17}\overset{z_2=\overline{z_1}}{=}z_1^{17}+\left(\overline{z_1}\right)^{17}=z_1^{17}+\overline{z_1^{17}}=2\mathrm{Re}\left(z_1^{17}\right)\in R$$

Ε3. $P=z_1\cdot z_2\Rightarrow 9=z_1\cdot z_2\Rightarrow|z_1\cdot z_2|=9\Rightarrow|z_1|\cdot|z_2|=9\overset{|z_1|=|z_2|}{\Rightarrow}|z_2|^2=9\Rightarrow|z_2|=3$.

Άρα $|z_1|=|z_2|=3$.

Ε4. Έχουμε ότι $z_{1,2}=\dfrac{\alpha\pm i\sqrt{36-\alpha^2}}{2}$

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2\Leftrightarrow z_1^2+2z_1z_2+z_2^2=0\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2=0\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+i\sqrt{36-\alpha^2}}{2}=-\frac{\alpha-i\sqrt{36-\alpha^2}}{2}\Leftrightarrow\alpha+i\sqrt{36-\alpha^2}=-\alpha+i\sqrt{36-\alpha^2}\Leftrightarrow2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

Β΄ τρόπος

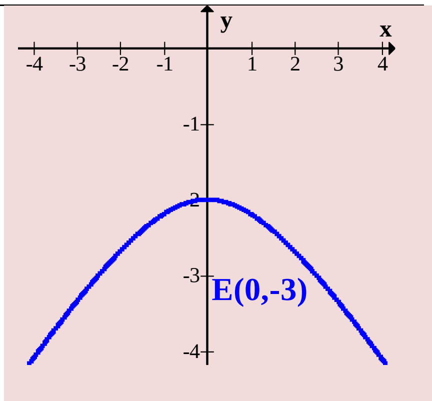
$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2\Leftrightarrow z_1{}^2+z_2{}^2+2z_1z_2=0\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2=0\Leftrightarrow z_1+z_2=0$$

$$S=z_1+z_2=\frac{-(-\alpha)}{1}=\alpha=0$$

Ε5. Για $\alpha=0$ έχουμε $z_{1,2}=\pm 3i$, επειδή $Im(z_1)>0$ έχουμε $z_1=3i$ και $z_2=-3i$.

$|z-z_1|=4+|z-z_2| \Leftrightarrow$

$|z-z_1|-|z-z_2|=4 \Leftrightarrow |z-3i|-|z+3i|=4$ (1).



Αν M η εικόνα του z και $E(0,3)$, $E'(0,-3)$ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1=3i,\ z_2=-3i$ αντίστοιχα, τότε έχουμε

$|z-3i|-|z+3i|=4 \Rightarrow (ME)-(ME')=4<(EE')=6$. Οπότε οι εικόνες του z κινούνται στον κάτω κλάδο της υπερβολής με εστίες $E(0,3)$, $E'(0,-3)$

Και $\gamma=3$, $2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Επομένως η (1), παριστάνει την υπερβολή $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ με $y\le -2$.

ΘΕΜΑ 30 — Προτείνει ο Στρατής Αντωνέας

Ε1. Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση : $z^3-3z^2+4z-2=0$.

Ε2. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων: $z^3+4z=3z^2+2$ και $z^{10}-32z+32=0$.

Λύση:

Ε1. Η εξίσωση γίνεται με την βοήθεια του **Horner** γίνεται $(z-1)(z^2-2z+2)=0$ οπότε $z=1$ ή $z^2-2z+2=0$ (1).

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=4-8=-4<0$, οπότε έχει λύσεις:

$$z_{1,2}=\frac{2\pm 2i}{2} \Rightarrow \begin{matrix} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{matrix}$$

Ε2. $z^3+4z=3z^2+2 \Leftrightarrow z^3-3z^2+4z-2=0$ η οποία έχει λύσεις τις παραπάνω.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $z=1$ δεν είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης.

Έχουμε $(z_1)^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$ και

$(z_2)^2=(1-i)^2=1-2i-1=-2i$

Αντικαθιστώντας την z_1 στην εξίσωση, έχουμε ισοδύναμα:

$$z_1^{10}-32z_1+32=0 \Leftrightarrow (z_1^2)^5-32z_1+32=0 \Leftrightarrow (2i)^5-32(1+i)+32=0 \Leftrightarrow$$

$32\cdot i^5-32-32i+32=0 \Leftrightarrow 32i-32i=0$ που ισχύει.

Άρα ο z_1 είναι κοινή λύση των εξισώσεων.

Ομοίως, αντικαθιστώντας την z_2 στην εξίσωση, έχουμε ισοδύναμα:

$$z_2^{10}-32z_2+32=0 \Leftrightarrow (z_2^2)^5-32z_2+32=0 \Leftrightarrow (-2i)^5-32(1-i)+32=0 \Leftrightarrow$$

$-32 \cdot i^5 - 32 + 32i + 32 = 0 \Leftrightarrow -32i + 32i = 0$ που ισχύει.
Άρα ο z_2 είναι κοινή λύση των εξισώσεων.
Οπότε οι κοινές λύσεις των εξισώσεων είναι οι $1+i$ και $1-i$.

Β΄ τρόπος

Ο μιγαδικός $z=1$ δεν είναι ρίζα της $z^{10} - 32z + 32 = 0$ διότι δεν την επαληθεύει.
Οι άλλες ρίζες είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 - 2w + 2 = 0 \Leftrightarrow w^2 = 2w - 2$
Συνεπώς και της $\left(w^2\right)^2 = \left(2w-2\right)^2$ καθώς και της

$$\left(w^2\right)^2 = \left(2w-2\right)^2 \Rightarrow w^4 = 4w^2 - 8w + 4 = 4\left(2w-2\right) - 8w + 4 = 8w - 8 - 8w + 4 = -4 .$$

Οπότε $w^{10} - 32w + 32 = \left(w^4\right)^2 w^2 - 32w + 32 \underset{w^2=2w-2}{\overset{w^4=-4}{=}} (-4)^2\left(2w-2\right) - 32w + 32$

$$= 16\left(2w-2\right) - 32w + 32 = 32w - 32 - 32w + 32 = 0 .$$

Συνεπώς οι ρίζες της $z^2 - 2z + 2 = 0$, που είναι οι $1+i$ και $1-i$, είναι και ρίζες της $z^{10} - 32z + 32 = 0$ και είναι οι μόνες κοινές ρίζες των εξισώσεων αυτών.

ΘΕΜΑ 31 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$, με $\alpha > 0$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό $\left(\alpha,\beta\right)$.

Έστω επιπλέον και οι μιγαδικοί: $z_1 = \alpha + if\left(\alpha\right)$ **και** $z_2 = \beta + if\left(\beta\right)$.

Ε1. Αν ισχύει $\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in \left(\alpha,\beta\right)$, ώστε $f\left(x_1\right) = 0$.

Ε2. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί A και B, με $A \neq B$, ώστε: $Az_1\overline{z_2} + B\overline{z_1}z_2 = 100$. Να αποδείξετε ότι:

α. Ο μιγαδικός $z_1\overline{z_2}$ είναι πραγματικός.

β. Ισχύει $\dfrac{f\left(\alpha\right)}{\alpha} = \dfrac{f\left(\beta\right)}{\beta}$.

γ. Υπάρχει $x_o \in \left(\alpha,\beta\right)$, ώστε $f'\left(x_o\right) = \dfrac{f\left(x_o\right)}{x_o}$.

δ. Υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$$\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right| \Leftrightarrow \left|\alpha + \beta + \left(f\left(\alpha\right) + f\left(\beta\right)\right)i\right| = \left|\left(\alpha - \beta\right) + \left(f\left(\alpha\right) - f\left(\beta\right)\right)i\right|$$

$$\sqrt{\left(\alpha+\beta\right)^2 + \left(f\left(\alpha\right) + f\left(\beta\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\alpha-\beta\right)^2 + \left(f\left(\alpha\right) - f\left(\beta\right)\right)^2}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + f^2\left(\alpha\right) + 2f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right) + f^2\left(\beta\right) = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + f^2\left(\alpha\right) - 2f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right) + f^2\left(\beta\right)$$

$$4f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right) = -4\alpha\beta \Leftrightarrow f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right) = -\alpha\beta .$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f\left(\alpha\right)f\left(\beta\right) = -\alpha\beta < 0$ αφού $0 < \alpha < \beta$.

Επομένως από το θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Β΄ τρόπος

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$\Leftrightarrow \cancel{z_1\overline{z_1}}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+\cancel{z_2\overline{z_2}}=\cancel{z_1\overline{z_1}}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+\cancel{z_2\overline{z_2}}$

$\Leftrightarrow 2z_1\overline{z_2}+2z_2\overline{z_1}=0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=0$

$z_1\overline{z_2}=(\alpha+f(\alpha)i)(\beta-f(\beta)i)=(-\alpha\beta-f(\alpha)f(\beta))+(-\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha))i$

Οπότε $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\alpha\beta-f(\alpha)f(\beta)=0 \Rightarrow f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta<0$ αφού $0<\alpha<\beta$.

Επομένως από το θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Ε2. **α.** Έχουμε $Az_1\overline{z_2}+B\overline{z_1}z_2=100 \ (1)$.

Επομένως $Az_1\overline{z_2}+B\overline{z_1}z_2=100 \Rightarrow \overline{Az_1\overline{z_2}+B\overline{z_1}z_2}=\overline{100} \Rightarrow A\overline{z_1}z_2+Bz_1\overline{z_2}=100 \quad (2)$

Από (1), (2) έχουμε

$Az_1\overline{z_2}+B\overline{z_1}z_2=A\overline{z_1}z_2+Bz_1\overline{z_2} \Leftrightarrow (A-B)z_1\overline{z_2}-(A-B)\overline{z_1}z_2=0$

$\Leftrightarrow (A-B)(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0$. Αφού $A\neq B$ έχουμε $z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0$. Επειδή $z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2$ έχουμε $z_1\overline{z_2}\in\mathbb{R}$.

β. **Έχουμε** $z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta i)(f(\alpha)-f(\beta))i=(\alpha-\beta i)(f(\alpha)+f(\beta))i \Leftrightarrow$

$\alpha f(\alpha)-\alpha f(\beta)i+\beta f(\alpha)i+\beta f(\beta)=\alpha f(\alpha)+\alpha f(\beta)i-\beta f(\alpha)i+\beta f(\beta) \Leftrightarrow$

$2\alpha f(\beta)i=2\beta f(\alpha)i \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

γ. Θεωρούμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in[\alpha,\beta]$ (ισχύει πως $x\neq 0$ διότι $0<\alpha\leq x\leq\beta$).

Η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η g παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επιπλέον έχουμε

$g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ και $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$, οπότε $g(\alpha)=g(\beta)$ και από το θεώρημα **Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$g'(x_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{{x_0}^2}=0 \Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 είναι η

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-f(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}(x-x_0)\ \ (3).$$

Για $x=y=0$ η (3) γίνεται, $-f(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}(-x_0)\Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0)$ Ισχύει.

Επειδή οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0, υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 32

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ με $f(\alpha)>\alpha>0$ τέτοια ώστε, ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{\beta+if(\beta)}{\alpha-if(\alpha)}$ να είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

Ε1. Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

Ε2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<1$.

Ε3. Αν η εξίσωση $f(x)=x$ έχει λύσεις στο διάστημα (α,β) τους αριθμούς x_1,x_2 με $x_1<x_2$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Ε1. $$z=\frac{\beta+if(\beta)}{\alpha-if(\alpha)}=\frac{(\beta+if(\beta))(\alpha+if(\alpha))}{\alpha^2+f^2(\alpha)}=\frac{\alpha\beta+i\beta f(\alpha)+i\alpha f(\beta)-f(\alpha)f(\beta)}{\alpha^2+f^2(\alpha)}$$

Αφού ο z είναι φανταστικός θα ισχύει:

$$\alpha\beta-f(\alpha)f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)=\alpha\beta\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{\beta}{f(\beta)}\ \ (1)$$

Αφού $f(\alpha)f(\beta)=\alpha\beta>0\overset{\beta>\alpha>0}{\Leftrightarrow}f(\alpha)f(\beta)>0\overset{f(\alpha)>\alpha>0}{\Leftrightarrow}f(\beta)>0$

Τώρα επειδή $f(\alpha)>\alpha\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)}{\alpha}>1$.

Από την (1) θα είναι και $\frac{\beta}{f(\beta)}>1\Leftrightarrow f(\beta)<\beta\Leftrightarrow f(\beta)-\beta<0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. (η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha>0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\beta<0$. Οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$

Από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta)$ με $g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=x_1$.

Β΄ τρόπος

$$z\in I\Leftrightarrow\bar{z}=-z\Leftrightarrow\frac{\beta+f(\beta)i}{\alpha-f(\alpha)i}=-\overline{\left(\frac{\beta+f(\beta)i}{\alpha-f(\alpha)i}\right)}\Leftrightarrow\frac{\beta+f(\beta)i}{\alpha-f(\alpha)i}=\frac{-\beta+f(\beta)i}{\alpha+f(\alpha)i}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha\beta + \cancel{\beta f(\alpha) i} + \cancel{\alpha f(\beta) i} + f(\alpha)f(\beta)i^2 = -\alpha\beta + \cancel{\beta f(\alpha) i} + \cancel{\alpha f(\beta) i} - f(\alpha)f(\beta)i^2$

$\Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2f(\alpha)f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) = \alpha\beta \Rightarrow f(\beta) = \dfrac{\alpha\beta}{f(\alpha)}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. (η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha > 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta = \dfrac{\alpha\beta}{f(\alpha)} - \beta = \beta\dfrac{\alpha - f(\alpha)}{f(\alpha)} < 0$.

αφού $f(\alpha) > \alpha > 0 \Rightarrow \alpha - f(\alpha) < 0$ και $\beta > \alpha > 0$.

Οπότε $g(\alpha)g(\beta) < 0$

Από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha,\beta)$ με $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$.

Γ τρόπος:

Έστω $z \in I \Leftrightarrow z = ki \Leftrightarrow \dfrac{\beta + if(\beta)}{\alpha - if(\alpha)} = ki \Leftrightarrow \beta + if(\beta) = k\alpha i + \kappa f(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \kappa f(\alpha) \\ f(\beta) = k\alpha \end{cases}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. (η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha > 0$ (από την υπόθεση)και

$g(\beta) = f(\beta) - \beta \underset{\beta = \kappa f(\alpha)}{\overset{f(\beta) = \kappa\alpha}{=}} \kappa\alpha - \kappa f(\alpha) = \kappa(\alpha - f(\alpha)) < 0$, αφού $\kappa > 0$ λόγω της $\beta = \kappa f(\alpha)$ και των $f(\alpha) > \alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Οπότε $g(\alpha)g(\beta) < 0$

Από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha,\beta)$ με $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$.

Ε2. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x) = f'(x) - 1$. Από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow f'(x_0) - 1 = \frac{(f(\beta) - \beta) - (f(\alpha) - \alpha)}{\beta - \alpha} < 0$$

γιατί ο αριθμητής είναι άθροισμα αρνητικών αριθμών και ο παρονομαστής θετικός.

Έτσι $f'(x_0) - 1 < 0 \Leftrightarrow f'(x_0) < 1$.

Ε3. Η εφαπτομένη της C_f σ' ένα σημείο $A(x_3, f(x_3))$ έχει εξίσωση $y - f(x_3) = f'(x_3)(x - x_3)$ (3).

Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα πρέπει η (3) να επαληθεύεται για $x = y = 0$ δηλαδή: $-f(x_3) = -f'(x_3)x_3 \Leftrightarrow f'(x_3)x_3 - f(x_3) = 0$.

Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ (ισχύει πως $x \neq 0$ διότι $0 < \alpha \le x \le \beta$)

είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,x_2\right)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επίσης $h(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{x_1}=1$ και $h(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=1$ γιατί οι x_1,x_2 είναι ρίζες της $f(x)=x$.

Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3\in(x_1,x_2)$ με

$h'(x_3)=0\Leftrightarrow x_3f'(x_3)-f(x_3)=0$.

Άρα στο σημείο $A(x_3,f(x_3))$ η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 33

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(|z|x+2\right)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, όπου $|z|=\rho>0$ το μέτρο του μιγαδικού z.

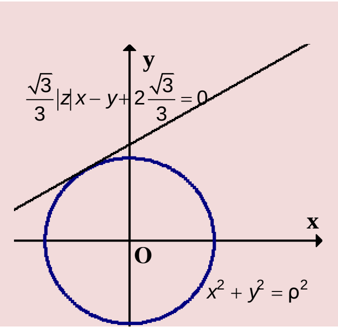
Ε1. **α.** Να βρεθεί ο θετικός αριθμός ρ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να εφάπτεται στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z, καθώς και

β. Το σημείο επαφής.

Ε2. Να βρεθεί το διάστημα που ανήκει ο αριθμός ρ ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος **Bolzano** για τη συνάρτηση f στο $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Ε3. Έστω ο μιγαδικός $w=f\left(\sqrt{3}\right)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\left(\sqrt{2|z|+1}\right)\cdot i$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w.

Λύση:



Ε1. **α.** Η $|z|=\rho,\rho>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνας ρ.

Η $f(x)=\left(|z|x+2\right)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ παριστάνει την ευθεία

$\varepsilon:\dfrac{\sqrt{3}}{3}|z|x-y+2\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0$ (1).

Η (1) εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνας ρ αν και μόνο αν

$$d(O,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{|z|^2+3}}\overset{|z|=\rho}{=}\rho\Leftrightarrow\rho\sqrt{\rho^2+3}=2\Leftrightarrow\rho^2(\rho^2+3)=4\Leftrightarrow\rho^4+3\rho^2-4=0\Leftrightarrow$$

$$(\rho^2-1)(\rho^2+4)=0\Leftrightarrow\rho^2-1=0\Leftrightarrow|z|^2=1\overset{|z|=\rho>0}{\Rightarrow}|z|=1.$$

β. Για $|z|=1$ έχουμε $f(x)=(x+2)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Για να βρούμε το σημείο επαφής, θα λύσουμε το σύστημα του κύκλου και της ευθείας.

Έχουμε $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)\right)^2=1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{3}(x+2)^2=1 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+(x+2)^2=3 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+4x+1=0 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Β΄ τρόπος

Για να βρούμε το σημείο επαφής αρκεί να λύσουμε το σύστημα της εφαπτομένης (ε) και της ευθείας (η) της καθέτου στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής την διερχόμενη από το κέντρο του κύκλου.

$$(\varepsilon): y=(x+2)\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} (\eta)\perp(\varepsilon) \\ \lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_\varepsilon\lambda_\eta=-1 \\ \lambda_\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \lambda_\eta=-\frac{1}{\lambda_\varepsilon}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

$$(\eta): y-y_o=\lambda(x-x_o)\underset{(x_o,y_o)=(0,0)}{\overset{\lambda=-\sqrt{3}}{\Rightarrow}} y-0=-\sqrt{3}(x-0)\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x$$

$$\begin{cases} (\varepsilon): y=\frac{x+2}{\sqrt{3}} \\ (\eta): y=-\sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}x \\ y=-\sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow x+2=-3x\Rightarrow 4x=-2\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\sqrt{3}x=-\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το σημείο $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ε2. Έχουμε $f(x)=(|z|x+2)\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

$$f(-\sqrt{3})=(-|z|\sqrt{3}+2)\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ και } f(\sqrt{3})=(|z|\sqrt{3}+2)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, διότι είναι εξίσωση ευθείας με $\alpha=\frac{\sqrt{3}|z|}{3}=\frac{\sqrt{3}\rho}{3}>0$, για να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του **Bolzano** στο $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$, αφού $-\sqrt{3}<\sqrt{3}\overset{f\nearrow R}{\Rightarrow} f\left(-\sqrt{3}\right)<f\left(\sqrt{3}\right)$ και για να ισχύει $f\left(-\sqrt{3}\right)f\left(\sqrt{3}\right)<0$ θα πρέπει $f\left(-\sqrt{3}\right)<0<f\left(\sqrt{3}\right)$ οπότε πρέπει

$f\left(\sqrt{3}\right)>0\Rightarrow\left(|z|\sqrt{3}+2\right)\frac{\sqrt{3}}{3}>0\Rightarrow|z|\sqrt{3}+2>0\Rightarrow|z|>0$ και

$f\left(-\sqrt{3}\right)<0\Rightarrow\left(-|z|\sqrt{3}+2\right)\frac{\sqrt{3}}{3}<0\Rightarrow-|z|\sqrt{3}+2<0\Rightarrow|z|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Επομένως πρέπει $|z|>\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

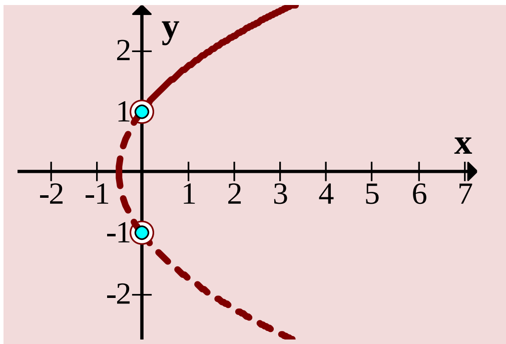
Ε3. $f\left(\sqrt{3}\right)=\left(|z|\sqrt{3}+2\right)\frac{\sqrt{3}}{3}=|z|+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Έστω $w=x+yi, x,y\in R$

$w=f\left(\sqrt{3}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}+\left(\sqrt{2|z|+1}\right)i\Leftrightarrow$

$w=|z|+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\left(\sqrt{2|z|+1}\right)i\Leftrightarrow$

$x+yi=|z|+(\sqrt{2|z|+1})i\Leftrightarrow\begin{cases}x=|z|>0\\ y=\sqrt{2|z|+1}>0\end{cases}$



Οπότε $y^2=2x+1, x>0, y>0$.

ΘΕΜΑ 34

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Αν για τον μιγαδικό $z=x+yi$, ισχύει $\frac{2012\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}+\frac{1}{2}\left|2012+2012i\sqrt{3}\right|=0$, τότε:

Ε1. Να δειχθεί ότι η εικόνα $M(x,y)$ του z διαγράφει κύκλο του οποίου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα.

Ε2. Ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς z έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος ;

Ε3. Αν z είναι κάποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς, να δειχθεί ότι $\mathrm{Im}(z)<0$.

Λύση:

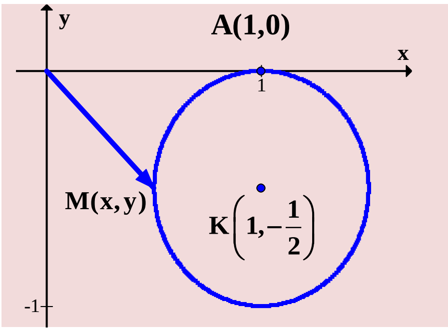
Ε1. Έχουμε για $z=x+yi, x,y\in R$

$$\frac{2012\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}+\frac{1}{2}\left|2012+2012i\sqrt{3}\right|=0\Leftrightarrow\frac{2012y}{|z-1|^2}+\frac{1}{2}\sqrt{2012^2+2012^2\cdot 3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2012y}{|z-1|^2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2012=0 \Leftrightarrow |z-1|^2=-y \Leftrightarrow |x+yi-1|^2=-y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Άρα η εικόνα $M(x,y)$ του z διαγράφει τον παραπάνω κύκλο με κέντρο $K\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, ακτίνας $\rho=\frac{1}{2}$, εκτός του σημείου $A(1,0)$ το οποίο είναι η εικόνα του $z=1$ που μηδενίζει τον αρχικό παρονομαστή.



Ε2. Έχουμε $0\le\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-(x-1)^2$, οπότε

$$\frac{1}{4}-(x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow |x-1|\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x-1\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}.$$

Για $x=\frac{3}{2}$ έχουμε $y=-\frac{1}{2}$ και συνεπώς ο μιγαδικός z με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος είναι ο $z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$.

Ε3. Έχουμε $0\le(x-1)^2=\frac{1}{4}-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$, οπότε

$$0\le\frac{1}{4}-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|y+\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le y+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1\le y\le 0 \Leftrightarrow -1\le \mathrm{Im}(z)\le 0.$$

ΘΕΜΑ 35 — Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνεται η f συνεχής στο R, $f(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$ με $\int_1^{|z|}f(x)dx=0$ και $f(1)=1$

Ε1. Να δειχτεί ότι $f(x)>0$.

Ε2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των z.

Ε3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(|z+\bar z|-3)x^3+x}{(|z-\bar z|-3)x^2+x}$.

Ε4. Αν το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x'x$, από την ευθεία $x=0$ μέχρι την ευθεία $x=1$, είναι μικρότερο του $|z+2\bar z|$, να δειχτεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=3x^2+6x-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Πηγή :Κώστας Τηλέγραφος

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ συνεχής και διάφορη του μηδενός για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ και συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbf{R}$. Αφού $\mathbf{f(1)=1>0}$, έχουμε $\mathbf{f(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$.

Ε2. Η σχέση $\int_1^{|z|}\mathbf{f(x)dx=0}$ ισχύει για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ και $\mathbf{f(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$. Επειδή $|\mathbf{z}|\geq \mathbf{0}$ και η συνεχής $\mathbf{f(x)>0}$:

Αν $|\mathbf{z}|<\mathbf{1}$ τότε $\int_{|z|}^{1}\mathbf{f(x)dx>0}\ \overset{\int_1^{|z|}f(x)dx=0}{\Rightarrow}\ \mathbf{0>0}$, άτοπο.

Αν $|\mathbf{z}|>\mathbf{1}$ τότε $\int_{1}^{|z|}\mathbf{f(x)dx>0}\ \overset{\int_1^{|z|}f(x)dx=0}{\Rightarrow}\ \mathbf{0>0}$, άτοπο.

Οπότε $|\mathbf{z}|=\mathbf{1}$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των $\mathbf{z}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Ε3. Για $\mathbf{z=\alpha+\beta i,\alpha,\beta\in R}$ έχουμε $|z+\bar{z}|=2|\alpha|$ και $|z-\bar{z}|=2|\beta|$. Οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(|z+\bar{z}|-3\right)x^3+x}{\left(|z-\bar{z}|-3\right)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2|\alpha|-3\right)x^3+x}{\left(2|\beta|-3\right)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2|\alpha|-3\right)x^3}{\left(2|\beta|-3\right)x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2|\alpha|-3}{2|\beta|-3}x\right)=-\infty.$$

Γιατί: Η εικόνα του $\mathbf{z}$ κινείται στο μοναδιαίο κύκλο και συνεπώς $|\alpha|\leq 1<\frac{3}{2}$, άρα $2|\alpha|-3<0$. Ομοίως $2|\beta|-3<0$.

Ε4. Το εμβαδόν που περικλείεται από τη $\mathbf{C_f}$, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $\mathbf{x=0,x=1}$ είναι $\int_0^1\mathbf{f(x)dx}$, αφού λόγω του (Ε1) έχουμε $\mathbf{f(x)>0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$. Άρα $\int_0^1 f(x)dx<|z+2\bar{z}|\leq|z|+2|\bar{z}|=|z|+2|z|=3|z|=3$.

Άρα $\int_0^1 f(x)dx-3<0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt-3x^2-6x+6$ με $x\in[0,1]$.

Η $\mathbf{h(x)}$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις των συνεχών $\int_0^x f(t)dt$ (η $\mathbf{f(x)}$ συνεχής και άρα η $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη) και $-3x^2-6x+6$ (συνεχής ως πολυωνυμική).

Επιπλέον $\mathbf{h(0)=6>0}$ και $\mathbf{h(1)=\int_0^1 f(x)dx-3<0}$ από τη σχέση **(1)**.

Από Θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_o\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{h(x_o)=0\Leftrightarrow\int_0^{x_o} f(t)dt-3t^2-6t+6=0}.$$

ΘΕΜΑ 36

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνεχής στο διάστημα $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z=\alpha^2+if(\alpha)}$ και $\mathbf{w=\beta^2-if(\beta)}$ με $\mathbf{\alpha\cdot\beta\neq0}$ και $\mathbf{f(\alpha)\cdot f(\beta)\neq0}$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{|\overline{w}+z|<|w-\overline{z}|}$ και $\mathbf{f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)}$. Να δειχθεί ότι:

Ε1. Υπάρχει $\mathbf{x_o\in(\alpha,\beta)}$ ώστε $\mathbf{f(x_0)=0}$.

Ε2. Υπάρχει $\mathbf{x_1\in(\alpha,\beta)}$ ώστε $\mathbf{f(x_1)=f(\gamma)}$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$$\mathbf{|\overline{w}+z|<|w-\overline{z}|\Leftrightarrow|\beta^2+if(\beta)+\alpha^2+if(\alpha)|<|\beta^2-if(\beta)-\alpha^2+if(\alpha)|}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow\left|(\alpha^2+\beta^2)+i(f(\alpha)+f(\beta))\right|<\left|(\beta^2-\alpha^2)+i(f(\alpha)-f(\beta))\right|}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2+(f(\alpha)+f(\beta))^2}<\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)^2+(f(\alpha)-f(\beta))^2}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow 2\alpha^2\beta^2+2f(\alpha)f(\beta)<-2\alpha^2\beta^2-2f(\alpha)f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<-\alpha^2\beta^2<0}$$

Β΄ τρόπος

$$\mathbf{|\overline{w}+z|<|w-\overline{z}|\Leftrightarrow|\overline{w}+z|^2<|w-\overline{z}|^2\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow(\overline{w}+z)\overline{(\overline{w}+z)}<(w-\overline{z})\overline{(w-\overline{z})}\Leftrightarrow(\overline{w}+z)(w+\overline{z})<(w-\overline{z})(\overline{w}-z)}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow\cancel{\overline{w}w}+\overline{w}\overline{z}+zw+\cancel{z\overline{z}}<\cancel{w\overline{w}}-\overline{w}\overline{z}-zw+\cancel{\overline{z}z}}$$

Σχόλιο:

Εδώ μπορούμε να διαγράψουμε γιατί διαγράφουμε πραγματικούς, γενικά όμως δεν διαγράφουμε στους μιγαδικούς γιατί δεν ισχύει η διάταξη.

$$\mathbf{\Leftrightarrow 2\overline{w}\overline{z}+2zw<0\Leftrightarrow\overline{zw}+zw<0\Leftrightarrow 2Re(zw)<0\Leftrightarrow Re(zw)<0}$$

$$\mathbf{zw=(\alpha^2+f(\alpha)i)(\beta^2-f(\beta)i)=(\alpha^2\beta^2+f(\alpha)f(\beta))+(-\alpha^2f(\beta)+\beta^2f(\alpha))i}$$

Οπότε $\mathbf{Re(zw)=\alpha^2\beta^2+f(\alpha)f(\beta)<0\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)<-\alpha^2\beta^2<0}$

Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και επιπλέον $\mathbf{f(\alpha)f(\beta)<0}$. Από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_o\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_0)=0}$.

Ε2. Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και $\mathbf{f(\alpha)\neq f(\beta)}$ αφού $\mathbf{f(\alpha)<f(\beta)}$. Επειδή

$f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(\gamma)$.

Β΄ τρόπος

Θέτουμε $g(x)=f(x)-f(\gamma)$ με $x\in[\alpha,\beta]$.

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον:

$g(\alpha)=f(\alpha)-f(\gamma)<0$ διότι $f(\alpha)<f(\gamma)$

$g(\beta)=f(\beta)-f(\gamma)>0$ διότι $f(\gamma)<f(\beta)$

Συνεπώς $g(\alpha)g(\beta)<0$.

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα **Bolzano** θα υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=f(\gamma)$.

ΘΕΜΑ 37

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Ε1. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2 για τους οποίους ισχύει $|z_1+\overline{z}_2|\le|\overline{z}_1-z_2|$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w=z_1\cdot z_2$.

Ε2. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=1+i\alpha^{f(x)}$, με $\alpha>0$, και $z_2=(1+f(x))+i$ που ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **Ε1** και f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(0)\neq 0$. Να δειχθεί ότι $2<\alpha<3$.

Ε3. Αν για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\mathrm{Im}(z_1z_2)$, όπου z_1,z_2 οι μιγαδικοί του ερωτήματος **Ε2**, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $[\gamma,\delta]$ να δείξετε ότι $\dfrac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}}=\dfrac{1+f(\delta)}{1+f(\gamma)}$, $f(\gamma)\neq -1$.

Λύση:

Ε1. Είναι $|z_1+\overline{z_2}|\le|\overline{z_1}-z_2|\Leftrightarrow|z_1+\overline{z_2}|^2\le|\overline{z_1}-z_2|^2$

$$\Leftrightarrow(z_1+\overline{z_2})\left(\overline{z_1+\overline{z_2}}\right)\le(\overline{z_1}-z_2)\left(\overline{\overline{z_1}-z_2}\right)\Leftrightarrow(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}+z_2)\le(\overline{z_1}-z_2)(z_1-\overline{z_2})$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_1z_2+\overline{z_2}\,\overline{z_1}+\overline{z_2}z_2\le\overline{z_1}z_1-\overline{z_1}\,\overline{z_2}-z_2z_1+z_2\overline{z_2}$$

Σχόλιο:

Εδώ μπορούμε να διαγράψουμε γιατί διαγράφουμε πραγματικούς, γενικά όμως δεν διαγράφουμε στους μιγαδικούς γιατί δεν ισχύει η διάταξη.

$$\Leftrightarrow 2z_1z_2+2\overline{z_1}\,\overline{z_2}\le 0\Leftrightarrow 2\left(z_1z_2+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right)\le 0\Leftrightarrow 4\mathrm{Re}(z_1z_2)\le 0.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1z_2 είναι το ημιεπίπεδο για τα $x\le 0$.

Ε2. Αφού οι $z_1 = 1 + i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = 1 + f(x) + i$ ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **Ε1** θα ισχύει για αυτούς $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \le 0$.

Όμως $z_1 z_2 = \left(1 + i\alpha^{f(x)}\right)\left(1 + f(x) + i\right) = 1 + f(x) + i + i\alpha^{f(x)} + i\alpha^{f(x)} f(x) - \alpha^{f(x)}$

$\Leftrightarrow z_1 z_2 = \left(1 + f(x) - \alpha^{f(x)}\right) + \left(1 + \alpha^{f(x)} + \alpha^{f(x)} f(x)\right)i$.

Οπότε $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \le 0 \Leftrightarrow 1 + f(x) - \alpha^{f(x)} \le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 1 + f(x) - \alpha^{f(x)}$ με $x \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε $h(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le h(0)$.

Δηλαδή η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 0$ που είναι εσωτερικό .

Επιπλέον η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$h'(x) = f'(x) - \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x) \Leftrightarrow h'(x) = f'(x)\left(1 - \alpha^{f(x)} \ln\alpha\right)$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$. Από Θεώρημα **Fermat** λοιπόν θα ισχύει

$h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0)\left(1 - a^{f(0)} \ln\alpha\right) = 0$. Όμως $f'(0) \ne 0$, οπότε

$1 - \alpha^{f(0)} \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$. Συνεπώς ισχύει $2 < \alpha < 3$.

Ε3. Για την $g(x)$ έχουμε: $g(x) = \mathrm{Im}(z_1 z_2) \Leftrightarrow g(x) = 1 + e^{f(x)} + e^{f(x)} f(x)$.

Η $g(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\gamma, \delta]$ και συνεπώς η $g(x)$ συνεχής στο $[\gamma, \delta]$, παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα και $g(\gamma) = g(\delta)$. Οπότε $g(\gamma) = g(\delta) \Leftrightarrow 1 + e^{f(\gamma)} + e^{f(\gamma)} f(\gamma) = 1 + e^{f(\delta)} + e^{f(\delta)} f(\delta)$

$\Leftrightarrow e^{f(\gamma)}\left(1 + f(\gamma)\right) = e^{f(\delta)}\left(1 + f(\delta)\right) \Leftrightarrow \dfrac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}} = \dfrac{1 + f(\delta)}{1 + f(\gamma)}$ με $f(\gamma) \ne -1$

ΘΕΜΑ 38

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η γραφική παράστασή της διέρχεται από το σημείο $A(0,-2)$. Δίνονται ακόμα οι μιγαδικοί αριθμοί $z = f(x) + f(x)i$ και $w = f(x) - f^2(x)i$ με $|z| = \sqrt{2} \cdot (e^x + 1)$

Ε1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Ε2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$ δεν έχει ακρότατα.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$z = f(x) + f(x)i \Rightarrow |z| = \sqrt{f^2(x) + f^2(x)} \Rightarrow \sqrt{2}\left(e^x + 1\right) = \sqrt{2}\left|f(x)\right|$

$\Rightarrow \left|f(x)\right| = e^x + 1$ **(1).**

Προφανώς $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. και συνεχής και άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $A(0,-2)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=-2<0$, η $f(x)<0$ για κάθε $x\in R$ και από τη σχέση **(1)** ο τύπος της είναι $f(x)=-e^x-1$

Ε2. Αφού $z=f(x)+f(x)i$, με $f(x)<0$, έχουμε ότι $Re(z)=Im(z)<0$ και συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι η ημιευθεία $y=x$ για τα $x,y<0$.

Ε3. Έχουμε

$$z\overline{w}=\left(f(x)+f(x)i\right)\cdot\overline{f(x)-f^2(x)i}=f(x)(1+i)\left(f(x)+f^2(x)i\right)$$
$$=f(x)(1+i)f(x)\left(1+f(x)i\right)=f^2(x)(1+i)\left(1+f(x)i\right)$$
$$=f^2(x)\left(1+f(x)i+i-f(x)\right)=f^2(x)\left[1-f(x)+\left(1+f(x)\right)i\right]$$
$$=f^2(x)\left(1-f(x)\right)+f^2(x)\left(1+f(x)\right)i$$

Οπότε έχουμε $g(x)=Re\left(z\overline{w}\right)=f^2(x)\left(1-f(x)\right)$ με $x\in R$.

Συνεπώς η g συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγισίμων ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=2f(x)f'(x)\left(1-f(x)\right)+f^2(x)\left(-f'(x)\right)$$
$$=2f(x)f'(x)\left(1-f(x)\right)-f^2(x)f'(x)=f(x)f'(x)\left[2\left(1-f(x)\right)-f(x)\right]$$
$$=f(x)f'(x)\left(2-3f(x)\right)=\left(-e^x-1\right)\left(-e^x-1\right)'\left(2-3\left(-e^x-1\right)\right)$$

$=\left(-e^x-1\right)\left(-e^x\right)\left(5+3e^x\right)>0$ για κάθε $x\in R$. Συνεπώς η g γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ΘΕΜΑ 39 — Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ συνεχής και $z\in C-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ έτσι ώστε να ισχύουν

$f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)$ για κάθε x πραγματικό και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m, m=\dfrac{|z-2|}{|2z-1|}$.

Ε1. Να δείξετε ότι:

α. $|z-2|=|2z-1|$.

β. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

Ε2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$.

Ε3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

Ε4. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f.

Ε5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x=x^3+10$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,2]$

Λύση:

Ε1. **α.** Για $x\neq 0$ έχουμε $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\dfrac{2f(x)}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2f(x)}{x}\right)\Rightarrow m^2+1=2m\Rightarrow (m-1)^2=0\Rightarrow m=1\,.$$

Για $m=1$ έχουμε $\dfrac{|z-2|}{|2z-1|}=1\Rightarrow |2z-1|=|z-2|$.

β. $|2z-1|=|z-2|\Rightarrow |2z-1|^2=|z-2|^2\Rightarrow (2z-1)(2\bar z-1)=(z-2)(\bar z-2)\Rightarrow$

$4z\bar z-2z-2\bar z+1=z\bar z-2z-2\bar z+4\Rightarrow 3z\bar z=3\Rightarrow |z|^2=1\Rightarrow |z|=1$.

Β΄ τρόπος

Θέτουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

$|2z-1|=|z-2|\Leftrightarrow |2(x+yi)-1|=|x+yi-2|$

$\Leftrightarrow |(2x-1)+2yi|=|(x-2)+yi|\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-4x+1+4y^2}^{\,2}=\sqrt{x^2-4x+4+y^2}^{\,2}$

$\Leftrightarrow 4x^2-\cancel{4x}+1+4y^2=x^2-\cancel{4x}+4+y^2\Leftrightarrow 3x^2+3y^2=3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow |z|=1$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}}{\dfrac{x(x-1)}{\eta\mu x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}}{\dfrac{(x-1)}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}}\right)=\frac{1}{\dfrac{-1}{1}}=-1$$

Θέτουμε $\eta\mu x=u$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x)=\eta\mu 0=0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{f(u)}{u}\right)=1$.

Ε2. $f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow g^2(x)=x^2-\eta\mu^2 x$.

Ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ άρα για $x\neq 0$ έχουμε $x^2-\eta\mu^2 x\neq 0$, οπότε $g^2(x)\neq 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά τα διαστήματα..

Ε3. Έχουμε 4 δυνατούς τύπους για την $\mathbf{f}$

1ος τύπος: $f(x)-x=\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x\in R$

2ος τύπος:[$f(x)-x=-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x\in R$

3ος τύπος: Αν η $\mathbf{f}$ είναι δίκλαδη

Τότε $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x<0 \end{cases}$

4ος τύπος: Αν η $\mathbf{f}$ είναι δίκλαδη

τότε $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x\leq 0 \\ x-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, x>0 \end{cases}$

Ε4. Θεωρούμε $h(x)=(|z+3-4i|+5)x-x^3-10, x\in[1,2]$

Η $\mathbf{h}$ στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών

$h(1)=|z+3-4i|+5-11=|z+3-4i|-6\leq 0$ διότι $|z+3-4i|\leq|z|+|3-4i|=6$

$h(2)=2|z+3-4i|+10-8-10=2(|z+3-4i|-4)\geq 0$, διότι

$|z+3-4i|\geq\big||z|-|3-4i|\big|=4$

Οπότε $h(1)h(2)\leq 0$

- ☑ Αν $h(1)h(2)<0$ τότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$. Δηλαδή η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x=x^3+10$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$
- ☑ Αν $h(1)h(2)=0$, τότε η $x=1$ ή η $x=2$ ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x=x^3+10$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1,2]$

ΘΕΜΑ 40

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Θεωρούμε το μιγαδικό $z=(1+3\sigma\upsilon\nu x)+(\sqrt{3}+3\eta\mu x)i$, όπου $x\in[0,2\pi)$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα $\mathbf{M}$ του $\mathbf{z}$ κινείται σε κύκλο (C) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

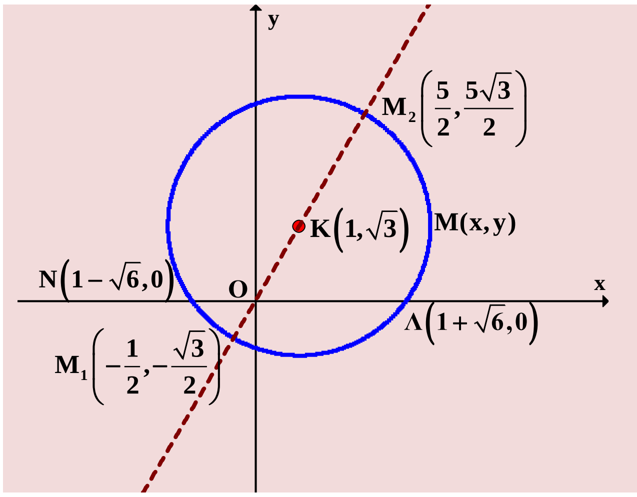
Ε2. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mathbf{x}$ το $|z|$ γίνεται ελάχιστο και για ποια μέγιστο. Να υπολογίσετε και την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z|$.

Ε3. Έστω x_1, x_2 οι τιμές του $\mathbf{x}$ για τις οποίες το $|z|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του και έστω M_1, M_2 οι αντίστοιχες εικόνες του $\mathbf{z}$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία M_1, M_2. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (C).

Λύση:

Ε1. Έστω $z=\alpha+\beta i, \alpha,\beta\in R$ τότε $\alpha=1+3\sigma\upsilon\nu x$, $\beta=\sqrt{3}+3\eta\mu x$. Από την ισότητα μιγαδικών προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\alpha-1}{3}$ και $\eta\mu x=\frac{\beta-\sqrt{3}}{3}$. Με αντικατάσταση στη σχέση $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$ προκύπτει ότι οι εικόνες του μιγαδικού ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $(\alpha-1)^2+\left(\beta-\sqrt{3}\right)^2=9$.

Ε2.



Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι από το ερώτημα **Ε1** ο κύκλος με κέντρο $K\left(1,\sqrt{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=3$.

Το μέτρο $|z|$ εκφράζει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επειδή $(OK)=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2<3=\rho$ το σημείο O είναι εσωτερικό του κύκλου.

$|z|_{min}=OM_1=\rho-(OK)=3-2=1$

$|z|_{max}=OM_2=(OK)+\rho=3+2=5$

Για να βρούμε τους μιγαδικούς με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αρκεί να λύσουμε το σύστημα της ευθείας OK και του κύκλου (K,ρ).

$$\lambda_{OK}=\frac{y_K-x_O}{x_K-x_O}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$$

$$(OK): y-y_o=\lambda(x-x_o)\underset{(x_o,y_o)=(0,0)}{\overset{\lambda=\sqrt{3}}{\Rightarrow}} y-0=\sqrt{3}(x-0)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x$$

$$\begin{cases}(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=9\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+\sqrt{3}^2(x-1)^2=9\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2(1+3)=9\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\pm\frac{3}{2}\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ M_2\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$

Αφού $(\mathbf{OM_1})=\mathbf{1}=\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)^2}<\mathbf{5}=\mathbf{5}\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)^2}=(\mathbf{OM_2})$

Οι μιγαδικοί με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο έχουν εικόνες τα σημεία $\mathbf{M_1}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right),\mathbf{M_2}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$ αντίστοιχα.

Για να έχουμε ελάχιστο μέτρο πρέπει

$$\begin{cases}\mathbf{1+3συνx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{3ημx}=-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{3συνx}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{3ημx}=-\frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{συνx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{ημx}=-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\overset{x\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\mathbf{x}=\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}$$

Για να έχουμε μέγιστο μέτρο πρέπει

$$\begin{cases}\mathbf{1+3συνx}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\\ \sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{3ημx}=\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{3συνx}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{3ημx}=\frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{συνx}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{ημx}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\end{cases}\overset{x\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow}\mathbf{x}=\frac{\mathbf{\pi}}{\mathbf{3}}$$

Ε3. Έχουμε $\mathbf{M_1}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$ και $\mathbf{M_2}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)$ και για τη συνεχή $\mathbf{f}$ στο $\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right]$, επειδή $\mathbf{f}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)=-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}<\mathbf{0}$, σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathbf{x_o}\in\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_o)=0}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τον $\mathbf{x'x}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\mathbf{x_o}\in\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)$. Τέλος ο κύκλος $(\mathbf{x-1})^2+(\mathbf{y}-\sqrt{\mathbf{3}})^2=\mathbf{9}$ τέμνει τον $\mathbf{x'x}$ στα σημεία $\mathbf{N}(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{6}},\mathbf{0})$ και $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{6}},\mathbf{0})$. Επειδή $\mathbf{x_o}\in\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)$, θα ισχύει και $\mathbf{x_o}\in(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{6}},\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{6}})$. Οπότε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει τον $\mathbf{x'x}$, βρίσκεται μέσα στον παραπάνω κύκλο.

Συναρτήσεις όριο συνεχεία

Συλλογή 30 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 17/02/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Συναρτήσεις -Όριο Συνέχεια:-Μια συλλογή 30 ασκήσεων.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=22127

Έλυσαν οι:

Αλέξανδρος Συγκελάκης
Αναστάσης Κοτρώνης
Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Δημήτρης Κρικώνης
Διονύσης Βουτσάς
Κώστας Καπένης
Κώστας Ρεκούμης
Κώστας Τηλέγραφος
Λευτέρης Πρωτοπαπάς
Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μπάμπης Στεργίου
Μυρτώ Λιάπη
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Περικλής Παντούλας
Ροδόλφος Μπόρης
Σπύρος Καπελλίδης
Χρήστος Κανάβης
Χρήστος Στραγάλης
Χρήστος Τσιφάκης
parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 41

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Ε1. Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{1}{1-x_0} - \dfrac{1}{x_0}$.

Ε2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $1 + x \le f(x) \le e^x, \ x \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Αν η f είναι συνεχής στο R, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$, ώστε $\dfrac{f(x_0)}{2004} = x_0$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Λύση:

Ε1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)x(1-x) - x + (1-x)$ για την οποία ισχύει : $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών και $g(0) = 1 > 0, \quad g(1) = -1 < 0$ άρα $g(0)g(1) < 0$ έτσι με το θεώρημα του **Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (0,1)$: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)x_0(1-x_0) - x_0 + (1-x_0) = 0$ και διαιρώντας με $x_0(1-x_0) \ne 0$ αφού $x_0 \in (0,1), \ x_0 \ne 0,1$ προκύπτει

$$f(x_0) = \frac{1}{1-x_0} - \frac{1}{x_0}.$$

Ε2. **α.** Για $x = 0$ στη δοσμένη ανισότητα έχουμε $1 + 0 \le f(0) \le e^0 \Leftrightarrow 1 \le f(0) \le 1$ άρα $f(0) = 1$ και επειδή $\lim\limits_{x \to 0}(1+x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$,δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο μηδέν.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2004x$ στο διάστημα $[-1,1]$ που είναι συνεχής και $h(-1) = f(-1) + 2004 > 0$ αφού από τη δοσμένη ανισότητα για $x = -1$ είναι $0 \le f(-1) \le \dfrac{1}{e}$ και $h(1) = f(1) - 2004 < 0$ αφού $2 \le f(1) \le e < 2004$ οπότε ισχύει ότι $h(-1)h(1) < 0$ και από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε

$$h(x_0) = f(x_0) - 2004x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2004} = x_0.$$

γ. Για $x > 0$ επειδή $1 + x \le f(x) \le e^x$ έχουμε $0 \le \dfrac{1}{f(x)} \le \dfrac{1}{1+x}$ και επειδή

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 42

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με τύπο: $f(x)=-2x^5-|z|x^3+2|z|^5$ με $x\in\mathbb{R}$ και $z\in\mathbb{C}^*$.

Ε1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $\mathbf{f}$.

Ε2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $\mathbf{f}$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,|z|)$.

Ε4. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2|z|^5}{\eta\mu^3 x}=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $\mathbf{z}$.

Πηγή http://www.study4exams.gr

Λύση:

Ε1. Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^5<x_2^5\Rightarrow -2x_1^5>-2x_2^5$ **(1)** και

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow -|z|x_1^3>-|z|x_2^3$ **(2)**.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1), (2)** και με πρόσθεση του $2|z|^5$ και στα δύο μέλη προκύπτει

$-2x_1^5-|z|x_1^3+2|z|^5>-2x_2^5-|z|x_2^3+2|z|^5\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, άρα η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ε2. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^5)=-\infty$, και επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Ε3. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[0,|z|]$ως πολυωνυμική με

$f(0)=2|z|^5>0,\quad f(|z|)=-|z|^4<0$ (καθώς $z\neq 0$), άρα $f(0)f(|z|)<0$ και από Θεώρημα **Bolzano** η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,|z|)$ που είναι μοναδική αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ **(Ε1)**.

Ε4. Είναι $$\lim_{x\to0}\frac{2|z|^5-f(x)}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^5+|z|x^3}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x^2}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3}+\frac{|z|}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3}\right)=|z|$$

συνεπώς $|z|=1$ οπότε οι εικόνες του $\mathbf{z}$ κινούνται στο μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 43

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)f^2(x)=e^xg(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ καθώς και $|f(0)|<1$.

Ε1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ε2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Ε3. Να δείξετε ότι $g(0)\le -1$.

Ε4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)(e^x+x)[g(x)+e^x]=x[f(x-1)+x]$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ και μία τουλάχιστον μη θετική ρίζα.

Λύση:

Ε1. Από τη δοθείσα σχέση $g(x)(f^2(x)-e^x)=1\neq 0$ συνεπώς $f^2(x)-e^x\neq 0$
Επομένως επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν $f^2(x)-e^x>0 \Leftrightarrow f^2(x)>e^x, x\in\mathbb{R}$ άρα και για $x=0$ θα ισχύει $f^2(0)>1$ **άτοπο,** αφού από υπόθεση $|f(0)|<1$ άρα αναγκαία
$f^2(x)-e^x<0 \Leftrightarrow f^2(x)<e^x, x\in\mathbb{R}$ οπότε θα ισχύει και
$|f(x)|<\sqrt{e^x} \Leftrightarrow -\sqrt{e^x}<f(x)<\sqrt{e^x}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Ε2. Επειδή ισχύει από $g(x)(f^2(x)-e^x)=1$ έχουμε ότι

$g(x)=\dfrac{1}{f^2(x)-e^x}$ (1) και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f^2(x)-e^x)=0$ με $f^2(x)-e^x<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f^2(x)-e^x}=-\infty$.

Ε3. Αρκεί από (1) να δείξουμε ότι $\dfrac{1}{f^2(0)-1}\le -1$. Επειδή ισχύει $|f(0)|<1$ αρκεί $1\ge -f^2(0)+1 \Leftrightarrow f^2(0)\ge 0$ που ισχύει.

Ε4. Θεωρούμε τη $h(x)=(x-1)(e^x+x)(g(x)+e^x)-x(f(x-1)+x)$.
Επειδή η g είναι συνεχής $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, $f(x-1)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των συνεχών $f(x)$, και $x-1$, οπότε και η h θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη ισχύουν $h(1)=-(f(0)+1)<0$ λόγω του $|f(0)|<1$ και $h(0)=-(g(0)+1)\ge 0$ λόγω του **(Ε3)**
επομένως $h(0)h(1)\le 0$.
Αν $g(0)=-1$ τότε $h(0)=0$ και η $h(x)=0$ έχει ρίζα το 0.
Αν $g(0)\neq -1$ τότε $h(0)h(1)<0$ και από θεώρημα **Bolzano** η $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ οπότε σε κάθε περίπτωση η $h(x)=0$ έχει ρίζα στο $[0,1)$.
Τώρα μελετάμε την συνεχή στο $(-\infty,0]$ συνάρτηση $h(x)$. Ισχύουν
$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)+e^x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x-1) \overset{x-1=y}{=} \lim\limits_{y\to-\infty} f(y) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x-1)+x] = 0-\infty = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ άρα θα υπάρχει $x_o < 0$ τέτοιο ώστε $h(x_o) < 0$

Αν $h(0) = 0$ τότε η h έχει ρίζα το 0.

Αν $h(0) \neq 0 \Rightarrow h(0) > 0$

τότε για την συνεχή στο $[x_o, 0]$ συνάρτηση h θα ισχύει πως $h(x_o)h(0) < 0$

οπότε από Θεώρημα **Bolzano** η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_o, 0) \subseteq (-\infty, 0)$

οπότε συνοψίζοντας η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 0]$

δηλαδή η h έχει μία τουλάχιστον μη θετική ρίζα.

ΘΕΜΑ 44

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Μια συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(1) = \dfrac{1}{2}$ έχει την ιδιότητα:

$f(xy) = f(x)f\left(\dfrac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ για κάθε $x, y \in R^*$

Ε1. Να αποδειχθεί ότι:

α. $f(3) = \dfrac{1}{2}$

β. $f\left(\dfrac{3}{x}\right) = f(x), x \in \Re^*$

γ. $f(xy) = 2f(x)f(y)$ και $f^2(x) = \dfrac{1}{4}$ για κάθε $x \in R$

Ε2. Να βρεθεί ο τύπος της f

Λύση:

Ε1. **α.** Για $x = y = 1$ ισχύει $f(1) = 2f(1)f(3)$ και επειδή $f(1) = \dfrac{1}{2}$ προκύπτει ότι $f(3) = \dfrac{1}{2}$.

β. Για $y = 1$ προκύπτει ότι $f(x) = f(x)f(3) + f(1)f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\dfrac{3}{x}) = f(x), x \in R^*$.

γ. Λόγω **(β)** θα ισχύει $f(xy) = f(x)f(y) + f(y)f(x) \Leftrightarrow f(xy) = 2f(x)f(y)$ και για $y = \dfrac{3}{x}$ έχουμε $f(3) = 2f(x)f(\dfrac{3}{x})$ και λόγω **(α)** και **(β)** $\dfrac{1}{2} = 2f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) = \dfrac{1}{4}, x \neq 0.$

Ε2. Από $f^2(x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow |f(x)| = \dfrac{1}{2} \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε

$x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο R^* θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Αφού $f(3)=\frac{1}{2}>0$ θα είναι $f(x)>0,\ \ x\in(0,+\infty)$ και $f(x)=\frac{1}{2},x\in(-\infty,0)$ ή $f(x)=-\frac{1}{2},x\in(-\infty,0)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x_0=0$ θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ άρα τελικά $f(x)=\frac{1}{2},x\in R$.

ΘΕΜΑ 45

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:R\to R$ και η συνάρτηση $g:R\to R$ ώστε για κάθε $x\in R$ να ισχύει η σχέση $f(f(x))=2g(x)-x$.

Ε1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Ε2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $h(x)=f(x)-g(x)$.

Ε3. Έστω $x_0\in R$ με $f(x_0)=x_0$.

α. Να δείξετε ότι η C_f και η C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x+x_0-2))+x+x_0=2f(x+x_0-2)+2$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x+x_0+1))+\ln x+1<x_0$.

Πηγή: Χ.Πατήλας (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

Λύση:

Ε1. Από τη δοσμένη σχέση είναι $g(x)=\dfrac{f(f(x))+x}{2}$.

Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ **(1)** τότε επειδή f γνήσια φθίνουσα ισχύει και $f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1)<f(f(x_2))$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και διαιρώντας με το 2 προκύπτει

$g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Ε2. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ **(1)** και $x_1<x_2\Rightarrow g(x_1)<g(x_1)\Rightarrow -g(x_1)>-g(x_2)(2)$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει $h(x_1)>h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Ε3. **α.** Αφού $f(x_o)=x_o\Rightarrow f(f(x_o))=f(x_o)\Rightarrow 2g(x_o)-x_o=x_0\Rightarrow$
$\Rightarrow 2g(x_o)=2x_o\Rightarrow g(x_o)=x_o=f(x_0)$.

Συνεπώς οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_o. Το x_o είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ καθώς η $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

β. Έχουμε ισοδύναμα $f(f(x+x_o-2))+x+x_o=2f(x+x_o-2)+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2g(x+x_o-2)-x-x_o+2+x+x_o=2f(x+x_o-2)+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g(x+x_o-2)=f(x+x_o-2)$ **(1)** οπότε σύμφωνα με το Ε3.α ερώτημα πρέπει $x+x_o-2=x_o \Leftrightarrow x=2$.

γ. Είναι $f(f(\ln x+x_o+1))+\ln x+1<x_o \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2g(\ln x+x_o+1)-\ln x-x_o-1+\ln x+1<x_o$ αφού $g(x_0)=x_0$
$\Leftrightarrow 2g(\ln x+x_o+1)<2g(x_o) \Leftrightarrow \ln x+x_o+1<x_o \Leftrightarrow \ln x<-1 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{e}$.

ΘΕΜΑ 46

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία για κάθε $x,y>0$ ισχύει $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ καθώς και η εξίσωση $f(x)=0$ που έχει μοναδική ρίζα.

Ε1. Να βρείτε το $f(1)$.

Ε2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2)+f(x)=f(5x-6)$.

Ε4. Αν $f(x)<0$ για κάθε $x>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση:

Ε1. Για $x=y$ παίρνουμε $f(1)=0$ οπότε αφού η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση το 1 αυτή είναι και η μοναδική λύση της.

Ε2. Έστω $x_1, x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θέτουμε στην αρχική όπου $x=x_1$ και $y=x_2$ και παίρνουμε $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$ άρα $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=0$ και επειδή το 1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ θα είναι $\frac{x_1}{x_2}=1$ απ' όπου $x_1=x_2$. Άρα η f είναι $'1-1'$ και αντιστρέφεται.

Ε3. Προφανώς για να ορίζονται τα $f(5x-6)$, $f(x)$ και $f(x^2-2)$ πρέπει $5x-6>0$, $x>0$ και $x^2-2>0$ δηλαδή τελικά $x>\sqrt{2}$. Με αυτή την προϋπόθεση η εξίσωση γράφεται $f(x^2-2)=f(5x-6)-f(x)$ και αφού $x>0$, η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της αρχικής γράφεται: $\mathbf{f(x^2-2)=f\left(\frac{5x-6}{x}\right)}$ και επειδή η $\mathbf{f}$ είναι '$\mathbf{1-1}$' γράφεται ισοδύναμα $\mathbf{x(x^2-2)=5x-6}$ και λύνοντας την τριτοβάθμια παίρνουμε $\mathbf{x=1}$ ή $\mathbf{x=2}$ ή $\mathbf{x=-3}$ απ' όπου δεκτή μόνο η $\mathbf{x=2}$.

Ε4. Έστω $\mathbf{x_1,x_2>0}$ με $\mathbf{0<x_1<x_2}$. Τότε για $\mathbf{x=x_2}$ και $\mathbf{y=x_1}$ στην αρχική παίρνουμε $\mathbf{f(x_2)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<0}$ διότι $\mathbf{\frac{x_2}{x_1}>1}$. Άρα $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$ συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ΘΕΜΑ 47

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=2-\ln(\sqrt{x-2}+1)}$.

Ε1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Ε2. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε3. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την $\mathbf{f^{-1}}$.

Ε4. Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{f^{-1}(x)=2}$.

Ε5. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $\mathbf{C_f}$ και της $\mathbf{y=x}$.

Πηγή: Α.Μπάρλας (εκδόσεις ελληνοεκδοτική)

Λύση:

Ε1. Πρέπει για να ορίζεται η $\mathbf{f}$ να ισχύει $\mathbf{x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2}$ και $\mathbf{\sqrt{x-2}+1>0}$, που ισχύει για κάθε $\mathbf{x\ge 2}$ άρα τελικά το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{A_f=[2,+\infty)}$.

Ε2. Έστω $\mathbf{x_1,x_2\in[2,+\infty)}$ με $\mathbf{2\le x_1<x_2 \Rightarrow 0\le x_1-2<x_2-2}$ άρα $\mathbf{\sqrt{x_1-2}<\sqrt{x_2-2}\Rightarrow \sqrt{x_1-2}+1<\sqrt{x_2-2}+1}$ και αφού η συνάρτηση $\mathbf{\ln x}$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $\mathbf{\ln(\sqrt{x_1-2}+1)<\ln(\sqrt{x_2-2}+1)\Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow 2-\ln(\sqrt{x_1-2}+1)>2-\ln(\sqrt{x_2-2}+1)}$ άρα $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$ πού σημαίνει ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[2,+\infty)}$.

Ε3. Η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ άρα και αντιστρέψιμη αφού είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω τώρα η εξίσωση $\mathbf{f(x)=y,\ y\in R}$, τότε ισοδύναμα έχουμε

$\mathbf{y=2-\ln(\sqrt{x-2}+1)\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x-2}+1)=2-y\Leftrightarrow}$

$\mathbf{\sqrt{x-2}+1=e^{2-y}\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=e^{2-y}-1}$ (1) και επειδή $\mathbf{\sqrt{x-2}\ge 0}$ πρέπει αναγκαία $\mathbf{e^{2-y}-1\ge 0\Leftrightarrow e^{2-y}\ge 1\Leftrightarrow 2-y\ge 0\Leftrightarrow y\le 2}$ και τότε από (1) ισοδύναμα

$\mathbf{x-2=(e^{2-y}-1)^2\Leftrightarrow x=2+(e^{2-y}-1)^2}$ (2) που προφανώς ανήκει στο $\mathbf{A_f=[2,+\infty)}$.

Τελικά $\mathbf{f^{-1}(x)=(e^{2-x}-1)^2+2,\quad x\le 2}$.

Ε4. Είναι $f^{-1}(x)=2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(2) \Leftrightarrow x=f(2)=2.$

Ε5. Αφού $f(2)=2$ το 2 είναι ρίζα της $h(x)=f(x)-x,\ x\in[2,+\infty)$ οπότε το σημείο $(2,2)$ είναι κοινό σημείο της C_f με την $y=x$.
Τώρα για την $h(x)=f(x)-x$ με $2\le x_1<x_2$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύουν ότι $f(x_1)>f(x_2)$ και $-x_1>-x_2$ έτσι με πρόσθεση κατά μέλη ισχύει $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$ δηλαδή $h(x_1)>h(x_2)$ πού σημαίνει ότι η h είναι γνήσια φθίνουσα, στο $[2,+\infty)$ άρα το 2 είναι μοναδική της ρίζα.

ΘΕΜΑ 48

Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+f(x+y))=f(2x)+y$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι :

Ε1. $f(0)=0.$

Ε2. $(f\circ f)(x)=x,\ x\in\mathbb{R}.$

Ε3. Η f είναι $1-1.$

Ε4. Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}.$

Ε5. $f(x)=x,\quad x\in\mathbb{R}.$

Λύση:

Ε1. Για $x=0$ έχουμε $f(f(y))=f(0)+y$ άρα $f(f(x))=f(0)+x, x\in\mathbb{R}\,(1)$ επίσης για $x=y$ ισχύει $f(x+f(2x))=f(2x)+x$.

Και αν $g(x)=f(2x)+x$ θα ισχύει $f(g(x))=g(x)\,(2)$ απ΄ όπου $f(f(g(x)))=f(g(x))$ και λόγω (1),(2) θα ισχύει $f(0)+g(x)=g(x)\Leftrightarrow f(0)=0.$

Ε2. Λόγω (1) τώρα αφού $f(0)=0$ θα ισχύει $f(f(x))=x, x\in\mathbb{R}.$

Ε3. Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε ισχύει και $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ άρα λόγω (Ε2) $x_1=x_2$ επομένως η f είναι '$1-1$'.

Ε4. Θεωρώντας την εξίσωση $f(x)=y, y\in\mathbb{R}$ αν έχει ρίζα το αριθμό α τότε θα ισχύει $f(\alpha)=y$ και αναγκαία $f(f(\alpha))=f(y)$ και λόγω (Ε2) ερωτήματος αναγκαία $\alpha=f(y)$ και επειδή τώρα από $f(f(x))=x, x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(f(f(y)))=f(y)$ και λόγω του ότι η f είναι '$1-1$' θα ισχύει $f(f(y))=y$ που σημαίνει ότι ο αριθμός $f(y)$ είναι ρίζα της $f(x)=y, y\in\mathbb{R}$ άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Β΄ τρόπος.

Για να έχει η f σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, σημαίνει ότι κατά την λύση της

$f(x)=y$ ως προς x δεν προέκυψαν περιορισμοί για το y.

Δηλαδή για κάθε για κάθε $y_0 \in R$ μπορούμε να βρούμε $x_0 \in R$ ώστε $f(x_0)=y_0$

ετσί έχουμε $f(x_0) \overset{x_0=f(2-y_0)}{=} f(f(2-y_0)) \overset{(4)}{=} 2-(2-y_0)=y_0$.

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το R.

E5. Στην αρχική $f(x+f(x+y))=f(2x)+y$ για $y=0$ ισχύει $f(x+f(x))=f(2x)$ και επειδή f είναι **1-1** θα ισχύει

$x+f(x)=2x \Rightarrow f(x)=x, x\in R.$

ΘΕΜΑ 49 — Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)$.

E1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

E2. Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f.

E3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f.

E4. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

E5. Βρείτε το $m<0$ ώστε $f(m)=m$.

E6. Αν $g(x)=f(x)-x,\ \ x<0$, να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$.

E7. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-1)<x+1$.

E8. Αν $h(x)=-\ln(-x)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in R$ τέτοιο ώστε $f(c)=h(c)$.

E9. Να βρείτε το όριο : $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-1)x^3+x^2+6}{f(-3)x^2-x-2}$ και το όριο $B=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{f(x)}-e^{f^{-1}(x)})$.

Λύση:

E1. Για να ορίζεται η f πρέπει και αρκεί $1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$, αφού $1+e^x>0, x\in R$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-\infty,0)$.

E2. Επειδή $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$ και $\dfrac{1-e^x}{1+e^x}<1, x\in(-\infty,0)$. Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,0)$ έχουμε $f(x)<0$.

E3. Για $x_1<x_2<0$ ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$ άρα και $1-e^{x_1}>1-e^{x_2}$, $1+e^{x_1}<1+e^{x_2}$

οπότε και $\ln(1-e^{x_1})>\ln(1-e^{x_2})$ και

$\ln(1+e^{x_1})<\ln(1+e^{x_2})\Leftrightarrow -\ln(1+e^{x_1})>-\ln(1+e^{x_2})$. Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων ισχύει και $\ln(1-e^{x_1})-\ln(1-e^{x_1})>\ln(1-e^{x_2})-\ln(1-e^{x_2})$ δηλαδή $f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

Ε4. Επειδή η f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ θα είναι '$1-1$' άρα αντιστρέψιμη με $f^{-1}:f(A)\to A$ και επειδή f συνεχής ως πράξεις μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων $1-e^x$, $1+e^x$ και $\ln x$ θα είναι
$f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0}f(x))$.

Θέτοντας $u=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=1$. Επειδή $\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$ το

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και ακόμη $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=0$.

Και επειδή $\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$ το $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ άρα $f(A)=(-\infty,0)$ και με $y\in(-\infty,0)$ η εξίσωση

$$y=\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)\Leftrightarrow e^y=\frac{1-e^x}{1+e^x}\Leftrightarrow e^y+e^ye^x=1-e^x\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^ye^x+e^x=1-e^y\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1-e^y}{1+e^y}\Leftrightarrow x=\ln(\dfrac{1-e^y}{1+e^y})$ αφού $\dfrac{1-e^y}{1+e^y}>0, y<0$ άρα

$f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}>0, x<0$.

Ε5. Λύνοντας την εξίσωση $\ln\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)=x, x\in(-\infty,0)$ ισοδύναμα

$$\frac{1-e^x}{1+e^x}=e^x\Leftrightarrow 1-e^x=e^x+e^{2x}\Leftrightarrow (e^x+1)^2=2\Leftrightarrow x=\ln(\sqrt{2}-1).$$

Ε6. Αν $x_1<x_2<0$ τότε $-x_1>-x_2$ και επειδή f γνήσια φθίνουσα $f(x_1)>f(x_2)$ και με πρόσθεση των ανισοτήτων προκύπτει ότι $g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

Ε7. Είναι $f(x)-f(-1)<x+1\Leftrightarrow f(x)-x<f(-1)-(-1)\Leftrightarrow g(x)<g(-1)$ και επειδή η g γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ ισχύει για $x>-1$.

Ε8. Αρκεί η $t(x)=f(x)-h(x)=f(x)+\ln(-x)$ να έχει ρίζα στο $(-\infty,0)$. Επειδή τώρα η συνάρτηση $\ln(-x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση των συνεχών $\ln x$, $-x$ η h θα είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και η f συνεχής είναι στο $(-\infty,0)$, η $t(x)$ συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών, και ακόμη,

επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-x)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} t(x)=+\infty$

και επειδή $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\ln(-x)=-\infty$ το $\lim\limits_{x\to0} t(x)=-\infty$

άρα αφού είναι συνεχής η $t(x)=f(x)+\ln(-x)$ θα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα θα έχει ρίζα στο $(-\infty,0)$.

Ε9. Είναι $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-1)x^3}{f(-3)x^2}=\dfrac{f(-1)}{f(-3)}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ γιατί $f(A)=(-\infty,0)$ άρα $\dfrac{f(-1)}{f(-3)}>0$. Επίσης θα είναι $B=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{f(x)}-e^{f^{-1}(x)})=0$ λόγω του **(Ε4)**

ΘΕΜΑ 50 — Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=x+\ln x$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

Ε2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$.

Ε3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

Ε4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f .

Ε5. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$.

Ε6. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x-1$.

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,+\infty)$ και συνεχής σε αυτό ως άθροισμα συνεχών. Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$, οπότε $\ln x_1<\ln x_2$, άρα $x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ε2. Η εξίσωση $f(x)=1$ έχει προφανή ρίζα το $x=1$ αφού $f(1)=1+\ln1=1+0=1$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$,

έχουμε ότι: $f(A)=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=\mathbb{R}$.

Αφού $0\in f(A)$, υπάρχει ρίζα της $f(x)=0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Ε4. Αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, θα είναι και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται. Τότε δεδομένου ότι το σύνολο τιμών της $\mathbf{f}$ είναι το $\mathbf{f(A)=R}$ το πεδίο ορισμού είναι της $\mathbf{f^{-1}}$ το $A_{f^{-1}}=\mathbf{f(A)=R}$ όποτε έχουμε $\mathbf{f^{-1}:R\to(0,+\infty)}$.

Ε5. Από την $\mathbf{f^{-1}:R\to(0,+\infty)}$ είναι $\mathbf{f^{-1}(x)>0}$ οπότε $\mathbf{f^{-1}(x)=x}$ και $\mathbf{x>0}$ άρα έχουμε:

$\mathbf{f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(x)\Leftrightarrow x=f(x)\Leftrightarrow x+\ln x=x\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1}$, δεκτή.

Ε6. Από την $\mathbf{f^{-1}:R\to(0,+\infty)}$ είναι $\mathbf{f^{-1}(x)>0}$ οπότε

- ☑ Για $\mathbf{x\le1\Leftrightarrow x-1\le0}$ η ανίσωση $\mathbf{f^{-1}(x)>x-1}$ ισχύει αφού το πρώτο μέλος είναι θετικό και το δεύτερο μέλος μη θετικό.
- ☑ Για $\mathbf{x>1}$, αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(0,\ +\infty)}$ θα ισχύει ισοδύναμα $\mathbf{f(f^{-1}(x))>f(x-1)\Leftrightarrow x>x-1+\ln(x-1)\Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow \ln(x-1)<1\Leftrightarrow x-1<e\Leftrightarrow x<e+1}$. Συνεπώς $\mathbf{1<x<e+1}$.

Άρα η ανίσωση επαληθεύεται για $\mathbf{x\in(-\infty,e+1)}$.

ΘΕΜΑ 51 — Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης

Δίνεται συνάρτηση $\mathbf{f}$ για την οποία ισχύει $\mathbf{2f(x)-\eta\mu(f(x))=x}$ για κάθε $\mathbf{x}$ πραγματικό αριθμό.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{|2f(x)-x|\le|f(x)|}$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{|f(x)|\le|x|}$.

Ε3. Να υπολογίσετε το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}}$.

Ε4. Να υπολογίσετε το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}$.

Λύση:

Ε1. Είναι $\mathbf{\eta\mu(f(x))=2f(x)-x}$ και επειδή $\mathbf{|\eta\mu(f(x)|\le|f(x)|}$ θα ισχύει και $\mathbf{|2f(x)-x|\le|f(x)|}$.

Ε2. Ισχύει $\mathbf{\big||2f(x)|-|\eta\mu(f(x)|\big|\le|2f(x)-\eta\mu(f(x)|=|x|}$ απ΄ όπου προκύπτει ότι $\mathbf{-|x|\le|2f(x)|-|\eta\mu(f(x)|\le|x|}$ άρα θα ισχύει

$\mathbf{2|f(x)|\le|x|+|\eta\mu(f(x)|\le|x|+|f(x)|}$ και τελικά θα ισχύει $\mathbf{|f(x)|\le|x|}$

Β΄τρόπος

Ισχύει $\mathbf{2f(x)=\eta\mu(f(x))+x}$ άρα

$\mathbf{|2f(x)|=|\eta\mu(f(x))+x|\le|\eta\mu f(x)|+|x|\le|f(x)|+|x|}$ Άρα $\mathbf{|f(x)|\le|x|}$.

Ε3. Επειδή από $|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$ και $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ από κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ οπότε θέτοντας $u=f(x)$ επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ του $x\to0$ το $u\to0$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$

Ε4. Από $2f(x)-\eta\mu f(x)=x$ με $x\neq0$ θα ισχύει

$$2\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}\eta\mu(f(x))=1\Leftrightarrow 2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)}{x}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}=1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\left(2-\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\right)=1$ και επειδή $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}=1$ είναι

$\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\right)=1\neq0$ οπότε κοντά στο 0 θα ισχύει

$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2-\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}}$ και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1.$

ΘΕΜΑ 52 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\frac{\sqrt3}{4}\sqrt{3x^2+30x+95}-\frac{\lambda}{4}(3x+5), x\in\mathbb{R},\lambda\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\frac{4x-5}{3}, x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση $f=goh$ ορίζεται για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$ και έχει τύπο $f(x)=(goh)(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$.

Ε2. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Ε3. Για εκείνη την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ που το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}$.

Ε4. Για την ίδια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3x}{f(x)+x}$.

Λύση:

Ε1. Για να ορίζεται η $g\circ h$ πρέπει $x\in D_h$ και $h(x)\in D_g$ ή ισοδύναμα $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)\in\mathbb{R}$ που ισχύει. Επομένως ορίζεται η σύνθεση $g\circ h$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έχει τύπο $f(x)=(g\circ h)(x)=\frac{\sqrt3}{4}\sqrt{3h^2(x)+30h(x)+95}-\frac{\lambda}{4}\left(3h(x)+5\right)=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{3\frac{(4x-5)^2}{9}+30\frac{4x-5}{3}+95}-\frac{\lambda}{4}\left(3\frac{4x-5}{3}+5\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{16x^2-40x+25}{3}+\frac{120x-150}{3}+\frac{285}{3}}-\lambda x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{16x^2+80x+160}{3}}-\lambda x=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x.$$

Ε2. Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$ και με $x>0$ γίνεται

$$f(x)=x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x=x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Για $1-\lambda\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1$

είναι όταν $1-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<1$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

και όταν $1-\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>1$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Για $1-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$ έχουμε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-x$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+10}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}=\frac{5}{2}$$

Ε3. Για $\lambda=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+2x}{x^4+x-14}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5x+10}-x+2x}{x^4+x-14}=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5x+10}+x}{x^4+x-14}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)}{\left(x^4+x-14\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{5x+10}{\left(x^4+x-14\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-7)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{5}{(x^3-2x^2+4x-7)\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)} = -\frac{5}{124}$$

Ε4. Για $\lambda = 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{f(x)+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^2+5x+10}-x+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right)$$

Επειδή $\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x \le \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+5x+10) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}\right) = +\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\right|\right) = 0 .$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+10}}\eta\mu^3 x\right) = 0.$

ΘΕΜΑ 53

Προτείνει ο Νίκος Αλεξανδρόπουλος

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+f(y)) = f(x)+y+1$ για κάθε $x, y \in R$ και έχει σύνολο τιμών το R. Να δειχθεί ότι :

Ε1. Η f είναι αντιστρέψιμη.

Ε2. Ισχύει $f(2x) = f(x)+f^{-1}(x)+1$ για κάθε $x \in R$.

Ε3. Η f δεν είναι περιττή.

Ε4. $f(-1) = 0.$

Λύση:

Ε1. Θέτοντας $x = 0$ στη δοσμένη σχέση, έχουμε $f(f(y)) = f(0)+y+1$

Έστω τώρα $y_1, y_2 \in R$ με $f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(0)+y_1+1 = f(0)+y_2+1 \Rightarrow y_1 = y_2$ για κάθε $y_1, y_2 \in R$. Άρα η f είναι '$1-1$' επομένως αντιστρέφεται.

Ε2. Στη δοσμένη σχέση αν θέσουμε όπου y το $f^{-1}(x)$ θα έχουμε:

$f(x+f(f^{-1}(x)) = f(x)+f^{-1}(x)+1$ και άρα $f(x+x) = f(x)+f^{-1}(x)+1$ δηλαδή

$f(2x) = f(x)+f^{-1}(x)+1$

Ε3. Αν η f ήταν περιττή στο R τότε θα ήταν $f(0) = 0$. Θέτοντας όμως στη δοσμένη σχέση $x=y=0$ έχουμε: $f(f(0))=f(0)+1$ και άρα $f(0)=0+1$ δηλαδή $0=1$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι περιττή.

Ε4. Από το **(Ε2)** ερώτημα, αν θέσουμε $x=0$ έχουμε: $f(0)=f(0)+f^{-1}(0)+1$ και άρα $f^{-1}(0)=-1$ και άρα $f(-1)=0$.

ΘΕΜΑ 54

Προτείνει ο Μίλτος Παπαγρηγοράκης

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α,β με $\alpha<\beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$ και $|f(x)|<2012$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x=f(\beta)\eta\mu x+f(\alpha)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,\alpha+\beta]$

Ε2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f της f τέμνει την $y=2x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$

Ε3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)\eta\mu 4x}{x^2+1}$

Ε4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)-h(x)=2004x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1,ρ_2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

Λύση:

Ε1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2x-f(\alpha)\eta\mu x-f(\alpha)=2x-2\alpha\eta\mu x-2\beta$ και γι' αυτή έχουμε:

$g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών με $g(0)=-2\beta<0$

$g(\alpha+\beta)=2(\alpha+\beta)-2\alpha\eta\mu(\alpha+\beta)-2\beta=2\alpha(1-\eta\mu(\alpha+\beta))\geq 0$ αφού $\alpha>0$

$\eta\mu(\alpha+\beta)\leq 1$. Άρα $g(0)g(\alpha+\beta)\leq 0$ και έχουμε 2 περιπτώσεις :

$1^η$ περίπτωση: αν $\eta\mu(\alpha+\beta)=1$ τότε $g(\alpha+\beta)=0$ που σημαίνει ότι $\alpha+\beta$ ρίζα της $g(x)=0$.

$2^η$ περίπτωση: αν $\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 1$ τότε $g(\alpha+\beta)<0$ και ισχύει $g(0)g(\alpha+\beta)<0$ Τότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα $xo\in(0,\alpha+\beta)$ ώστε $g(xo)=0$. Έτσι σε κάθε περίπτωση υπάρχει $xo\in(0,\alpha+\beta]$ ώστε να ισχύει

$g(xo)=0\Leftrightarrow 2xo-f(\beta)\eta\mu x_0-f(\alpha)=0.$

Ε2. α) **Α΄ τρόπος**

Επειδή $0<\alpha<\beta$ και η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη και ισχύει $2\alpha<2\beta$ οπότε $f(\alpha)>f(\beta)$ η f θα είναι γνήσια φθίνουσα.

Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ που ισχύει από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Διότι η f είναι συνεχής και ισχύει $f(\beta)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\alpha)$. Επιπλέον είναι και μοναδικό αφού είναι γνήσια μονότονη.

Β΄ τρόπος

Θέτω $g(x)=f(x)-\alpha-\beta$ με $x\in[\alpha,\beta]$

Έστω $\alpha\le x_1<x_2\le\beta \overset{f\searrow[\alpha,\beta]}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1)-\alpha-\beta>f(x_2)-\alpha-\beta\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha-\beta=2\beta-\alpha-\beta=\beta-\alpha>0$

$g(\beta)=f(\beta)-\alpha-\beta=2\alpha-\alpha-\beta=\alpha-\beta<0$

Όποτε $g(\alpha)g(\beta)<0$

Από το θεώρημα **Bolzano** προκύπτει πως θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\alpha+\beta$ κι επειδή η g είναι γνησίως μονότονη, το παραπάνω ξ είναι μοναδικό.

β) Θεωρώντας τη $\varphi(x)=f(x)-2x$ στο $[\alpha,\ \beta]$ πού είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών στο $[\alpha,\ \beta]$ με $\varphi(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha=2(\beta-\alpha)>0$ και $\varphi(\beta)=f(\beta)-2\beta=2(\alpha-\beta)<0$ άρα $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)<0$ και σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ ώστε $\varphi(x_0)=f(x_0)-2x_0$. Τώρα επειδή για $\alpha\le x_1<x_2\le\beta$ και f γνήσια φθίνουσα στο $[\alpha,\ \beta]$ θα ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$ και επειδή $-x_1>-x_2$ με πρόσθεση προκύπτει $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$ άρα η φ γνήσια φθίνουσα άρα το $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ είναι μοναδικό.

Ε3. Για $x>0$ έχουμε $\left|\dfrac{xf(x)\eta\mu x}{x^2+1}\right|=\dfrac{|xf(x)\eta\mu x|}{|x^2+1|}\le\dfrac{x|f(x)|}{x^2+1}<\dfrac{2012x}{x^2+1}$

Επομένως $\left|\dfrac{xf(x)\eta\mu x}{x^2+1}\right|<\dfrac{2012x}{x^2+1}\Leftrightarrow-\dfrac{2012x}{x^2+1}<\dfrac{xf(x)\eta\mu x}{x^2+1}<\dfrac{2012x}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2012x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2012x}{x^2}\right)=0\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2012x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2012x}{x^2}\right)=0$$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xf(x)\eta\mu x}{x^2+1}\right)=0.$

Ε4. Επειδή η συνάρτηση f έχει δύο ρίζες $\rho_1 < 0 < \rho_2$ έχουμε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0.$

Έχουμε $h(x) = f(x) - 2004x, x \in [\rho_1, \rho_2]$

Η h συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον

$h(\rho_1) = f(\rho_1) - 2004\rho_1 = -2004\rho_1 > 0$

$h(\rho_2) = f(\rho_2) - 2004\rho_2 = -2004\rho_2 < 0$

οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h(\rho) = 0.$

ΘΕΜΑ 55

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνονται οι $'1-1'$ συναρτήσεις $f, g : R \to R$ με $f(R) = g(R) = R$ για τις οποίες ισχύει:

$f(x) - (fog^{-1})(x) = 8$ και $3(fog)(x) + 2(fog^{-1})(x) = 10x - 7$ για κάθε $x \in R$

Ε1. Να βρείτε τις $f(x), g(x)$

Ε2. Εστω συνάρτηση $h : R \to R$ $h(g(f(x))) = e^{-2x} - 4x - 2,\ x \in R$ τότε:

α. Βρείτε την $h(x)$

β. Να δειχθεί ότι η $h(x)$ αντιστρέφεται

γ. Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{e}{e^{x^2}} - \dfrac{e}{e^{3x}} > 2x^2 - 6x$

δ.Βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x^2+1)}{e^{-x}+1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h^{-1}(e)x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 5x}$

Ε3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $h(x) = \ln(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θετική

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x) - (f \circ g^{-1})(x) = 8$ (1) και

$3(f \circ g)(x) + 2(f \circ g^{-1})(x) = 10x - 7, x \in R$ (2) άρα ισχύει $(f \circ g^{-1})(x) = f(x) - 8$ και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει ότι $3(f \circ g)(x) + 2f(x) - 16 = 10x - 7 \Leftrightarrow$ $3(f \circ g)(x) + 2f(x) = 10x + 9, x \in R$ (3) και βάζοντας όπου x το $g(x)$ στην (1) έχουμε ότι $f(g(x)) - (f \circ g^{-1})(g(x)) = 8 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) - f(x) = 8 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = f(x) + 8$ οπότε από (3)

$\Leftrightarrow 3(f(x) + 8) + 2f(x) = 10x + 9, x \in R \Leftrightarrow 5f(x) = 10x - 15 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 3$. Επίσης από (3) θα ισχύει τώρα

$\Leftrightarrow 3f(g(x)) + 2f(x) = 10x + 9 \Leftrightarrow 3(2g(x) - 3) + 2(2x - 3) = 10x + 9$ από όπου προκύπτει $g(x) = x + 4$.

Ε2. **α.** Είναι $g(f(x)) = f(x) + 4 = 2x - 3 + 4 = 2x + 1$ επομένως θα ισχύει ότι

$h(2x+1)=\dfrac{1}{e^{2x}}-2(2x)-2=\dfrac{e}{e^{2x+1}}-2(2x+1)$ από όπου προκύπτει ότι

$h(x)=\dfrac{e}{e^{x}}-2x.$

β. Για $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύουν ότι $-2x_1>-2x_2$ και $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow\dfrac{e}{e^{x_1}}>\dfrac{e}{e^{x_2}}$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $h(x_1)>h(x_2)$ οπότε η h είναι γνήσια φθίνουσα στο R άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

γ. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $\dfrac{e}{e^{x^2}}-2x^2>\dfrac{e}{e^{3x}}-2(3x)\Leftrightarrow h(x^2)>h(3x)$ και επειδή h είναι γνήσια φθίνουσα ισχύει $x^2<3x\Leftrightarrow x^2-3x<0\Leftrightarrow 0<x<3$.

δ. Είναι $\dfrac{h(x)}{x}=\dfrac{e}{xe^{x}}-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{x})=+\infty$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=-2$ ακόμη

$\dfrac{h(x^2+1)}{e^{-x}+1}=\dfrac{h(x^2+1)}{x^2+1}\dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x^2+1)}{x^2+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{h(u)}{u}=-2$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x^2+1)}{e^{-x}+1}=-\infty$.

Τώρα επειδή $h(0)=e\Leftrightarrow h^{-1}(e)=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h^{-1}(e)x^3+2x^2+3}{x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

Ε3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=h(x)-\ln x,\ x\in(0,+\infty)$ που είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και επειδή $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0}h(x)=h(0)=e-2$ το $\lim\limits_{x\to0}t(x)=-\infty$. Επίσης επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=-2$ ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{h(x)}{x}x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)=+\infty$ οπότε η $t(x)=h(x)-\ln x$ έχει σύνολο τιμών το R. Επομένως θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 56

Προτείνει ο Κανάβης Χρήστος

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\ \infty)\to(0,\ +\infty)$ για την οποία ισχύει

$f^2(x)+\ln f(x)-\ln x-1=0$.

Ε1. Να βρεθεί το $f(1)$.

Ε2. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=f(1)$.

Λύση:

Ε1. Από τη δοσμένη για $x=1$ έχουμε ότι ισχύει $f(1)^2+\ln(f(1))-\ln 1-1=0 \Leftrightarrow f(1)^2+\ln(f(1))-1=0$ που σημαίνει ότι το $f(1)$ είναι ρίζα της συνάρτησης $g(x)=x^2+\ln x-1,\quad x\in(0,+\infty)$. Αυτή έχει προφανή ρίζα την $x_0=1.$

Τώρα έστω $0<x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^{\ 2}<x_1^{\ 2} \\ \ln x_1<\ln x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^{\ 2}+\ln x_1<x_2^{\ 2}+\ln x_2$

$\Rightarrow x_1^{\ 2}+\ln x_1-1<x_2^{\ 2}+\ln x_2-1 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε η $x_0=1$ μοναδική λύση της άρα $f(1)=1$.

Ε2. Η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x}=f(1)$ έχει προφανή ρίζα την $x_0=1$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_1\in(0,\ +\infty),\ \ x_1\neq 1$ ώστε $f(x_1)=x_1$ τότε στην αρχική για $x=x_1$ θα ισχύει $f^2(x_1)+\ln f(x_1)-\ln x_1-1=0 \Leftrightarrow x_1^2+\ln x_1-\ln x_1-1=0$. Άρα $x_1^2=1,\ \ x_1>0$ άρα $x_1=1$ που είναι άτοπο. Αρά έχει μοναδική ρίζα την $x_0=1.$

ΘΕΜΑ 57

Προτείνει ο Νίκος Αλεξανδρόπουλος

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 1$ για την οποία ισχύει $(f(x)-\kappa)(f(y)+3\kappa)=\kappa$ για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}$ και $\kappa\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

Ε2. Για τη μικρότερη θετική ακέραια τιμή του κ να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

Λύση:

Ε1. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύουν:
$(f(x)-\kappa)(f(y)+3\kappa)=\kappa$ και $(f(y)-\kappa)(f(x)+3\kappa)=\kappa$.

Αφαιρούμε κατά μέλη και προκύπτει $\kappa(f(x)-f(y))=0$.

Αν υπάρχουν x,y με $f(x)\neq f(y)$, τότε $\kappa=0$ και η αρχική σχέση δίνει τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=0$, άτοπο αφού $f(x)\geq 1$.

Άρα για κάθε x,y είναι $f(x)=f(y)=c\geq 1$ (σταθερή) και η αρχική σχέση δίνει:
$3\kappa^2+(1-2c)\kappa-c^2=0$.

Αυτή έχει λύσεις:

$\kappa=\dfrac{2c-1+\sqrt{(1-2c)^2+12c^2}}{6}$, $\kappa=\dfrac{2c-1-\sqrt{(1-2c)^2+12c^2}}{6}$

Δηλαδή $\kappa=\dfrac{2c-1+\sqrt{(1-2c)^2+12c^2}}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{16c^2-4c+1}+\dfrac{1}{3}c-\dfrac{1}{6},\ c\geq 1$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(c)=\dfrac{1}{6}\sqrt{16c^2-4c+1}+\dfrac{1}{3}c-\dfrac{1}{6},\ c\geq 1$ αυτή είναι παραγωγίσιμη με $g'(c)=\dfrac{1}{3}\dfrac{8c-1}{\sqrt{16c^2-4c+1}}+\dfrac{1}{3}>0,\ c\geq 1$ επομένως είναι γνήσια αύξουσα με ελάχιστη τιμή $g(1)=\dfrac{1}{6}\sqrt{16-4+1}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{\sqrt{13}+1}{6}$ άρα ισχύει $\kappa\geq\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Με $c\geq 1$ το κλάσμα της δεύτερης λύσης ορίζει όμοια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και δίνει $\kappa\leq\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Ε2. Αφού $\kappa\geq\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ η μικρότερη θετική ακέραια τιμή του $\kappa=1$ οπότε από $3\kappa^2+(1-2c)\kappa-c^2=0$ έχουμε $3+(1-2c)-c^2=0\Leftrightarrow c^2+2c-4=0$ από όπου $c=\sqrt{5}-1,\ c\geq 1$ και από **(Ε1)** αφού η συνάρτηση είναι σταθερή $f(x)=\sqrt{5}-1$ θα είναι προφανώς συνεχής.

Β΄ τρόπος.

Από το ερώτημα **(Ε1)** έχουμε πως η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ οπότε η f είναι συνεχής.

ΘΕΜΑ 58

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ ώστε $f(x)f(y)=f(x+y)$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f(1)=e$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι : $f(0)=1, f(-1)=e^{-1}$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ε3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε:
- **α.** να βρεθεί η μονοτονία της
- **β.** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ αν υπάρχουν.

Ε4. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(0,1): 3f(x_0)=f(2^{-1})+f(3^{-1})+f(4^{-1})$.

Ε5. Να βρείτε τα όρια : **α.** $\lim\limits_{x\to0^+}f^{-1}(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)$ **γ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)}{f(x)}$

E6. Για $\alpha,\beta>0$, να δείξετε ότι $f^{-1}(\alpha\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$.

E7. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x^2)}{f^{-1}(x)}$.

E8. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1>0$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_1)=x_1^{-1}$.

E9. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(f(x))}{f(x)}$.

Λύση:

E1. Είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$.

Για $x=y=0$, ισχύει $f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)=0\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=1$. Επειδή $f(0)=0\notin(0,\ +\infty)$, απορρίπτεται. Επομένως $f(0)=1$. Για $x=1, y=-1$ έχουμε $f(0)=f(1)f(-1)\Leftrightarrow 1=ef(-1)\Leftrightarrow f(-1)=\dfrac{1}{e}=e^{-1}$.

E2. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0)f(h))=$

$=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}(f(h))=f(x_0)f(0)=f(x_0)$

E3. **α.** Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $-1<1$ ενώ $f(-1)=e^{-1}<f(1)=e$ έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης ,λόγω της μονοτονίας της, είναι το διάστημα $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$. Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$, πραγματικό. Τότε, προφανώς $\alpha>e$ και $\alpha-1>1$. Υπάρχει, επομένως κ με $f(\kappa)=\alpha-1$, αλλά τότε λόγω της αρχικής σχέσης $f(2\kappa)=f^2(\kappa)=(\alpha-1)^2>\alpha$, δηλαδή το $f(2\kappa)$ είναι εκτός συνόλου τιμών, άτοπο. Άρα απομένει το ζητούμενο όριο να είναι $+\infty$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $f(-x)f(x)=1$, οπότε βρίσκουμε μηδέν το πρώτο όριο με μια αλλαγή μεταβλητής από τη σχέση: $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=1$.

E4. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ θα ισχύει $f(0)<f(x)<f(1),\ x\in(0,1)$ οπότε

Για $x=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$ έχουμε $f(0)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(1)$.

Για $x=\dfrac{1}{3}\in[0,1]$ έχουμε $f(0)<\left(\dfrac{1}{3}\right)<f(1)$.

Για $x=\dfrac{1}{4}\in[0,1]$ έχουμε $f(0)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(1)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $3f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)<3f(1)$ οπότε

$$f(0)<\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{3}<f(1).$$

Επομένως από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών **,Θ.Ε.Τ,** υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\Leftrightarrow 3f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Ε5. **α.β.** Έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$. Εύκολα, δείχνουμε ότι η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f. Επομένως η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$.

γ. Για $y=-x$ έχουμε $f(0)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)f(-x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e\frac{1}{f(x)}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e}{f^2(x)}=\dfrac{e}{1^2}=e$.

Ε6. Για $\alpha,\beta>0$, θέτουμε $f^{-1}(\alpha)=x\Leftrightarrow \alpha=f(x)$ και $f^{-1}(\beta)=y\Leftrightarrow \beta=f(y)$. Έχουμε τότε,

$f(x)f(y)=\alpha\beta\Leftrightarrow f(x+y)=\alpha\beta\Leftrightarrow x+y=f^{-1}(\alpha\beta)\Leftrightarrow f^{-1}(\alpha\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$.

Ε7. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x^2)}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(xx)}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)+f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}=1+1=2$.

Ε8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^{-1}(x)-\dfrac{1}{x}$ που έχει $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ άρα υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $g(\alpha)<0$ και $g(e)=\dfrac{e-1}{e}>0$, έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του **Bolzano** υπάρχει $x_0\in(\alpha,\ e)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Ε9. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right)=-\infty$.

ΘΕΜΑ 59 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+7x-5$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι $1-1$.

β. Η εξίσωση $\mathbf{f(x)=0}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbf{(0,1)}$.

Ε2. Αν είναι $\mathbf{g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-3}{x-1}, x\neq 1 \\ \alpha^2+3\alpha \;, x=1 \end{cases}}$, να βρείτε το $\boldsymbol{\alpha\in R^*}$, ώστε η $\mathbf{g(x)}$ να είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=1}$.

Ε3. **α.** Να βρείτε τα όρια $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$ και $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}$.

β. Να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0\in R}$ ώστε να ισχύει $\mathbf{f(x_0)=7}$.

γ. Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $\mathbf{(\kappa,\kappa+1)}$, μέσα στο οποίο θα ανήκει αυτό το $\mathbf{x_0\in R}$, όπου $\boldsymbol{\kappa}$ ακέραιος.

Ε4. Να βρείτε:

α. Το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^4}}$.

β. Τον πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{\lambda}$, ώστε $\mathbf{f(\lambda^3-5\lambda)=f(2\lambda-6)}$.

Λύση:

Ε1. **α.** Έστω $\mathbf{x_1,x_2\in R}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ τότε
$\mathbf{x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+7x_1-5<x_2^3+7x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2),}$ άρα η $\mathbf{f}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ άρα και $\mathbf{1-1}$.

β. Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{[0,1]}$ με $\mathbf{f(0)=-5}$ και $\mathbf{f(1)=3}$ άρα $\mathbf{f(0)f(1)<0}$ οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_0)=0}$ και επειδή η $\mathbf{f}$ είναι '$\mathbf{1-1}$' το $\mathbf{x_0}$ είναι μοναδικό.

Ε2. Είναι $\mathbf{\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+7x-8}{x-1}=}$
$\mathbf{=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+8)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}x^2+x+8=10}$.

Αφού η $\mathbf{g}$ συνεχής για $\mathbf{x=1}$ θα πρέπει
$\mathbf{\alpha^2+3\alpha=10\Leftrightarrow\alpha^2+3\alpha-10=0\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha+5)=0\Leftrightarrow\alpha=2}$ ή $\mathbf{\alpha=-5}$.

Ε3. **α.** Είναι $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty}$ και $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty}$.

β. Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,\ +\infty)=R}$ και επειδή $\mathbf{7\in R}$ θα υπάρχει $\mathbf{x_0\in R}$ ώστε $\mathbf{f(x_0)=7}$.

γ. Για την $\mathbf{h(x)=f(x)-7}$ στο $\mathbf{[1,2]}$ που είναι συνεχής μ

$h(1)=f(1)-7=-4<0$ και $h(2)=f(2)-7=10>0$ αφού $h(1)h(2)<0$ από θεώρημα **Bolzano** θα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$.

Ε4. **α.** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3+7x-5)\eta\mu x}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+7x-5)}{x^3}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

β. Είναι $f(\lambda^3-5\lambda)=f(2\lambda-6)$ αφού η f είναι '$1-1$' έχουμε $\lambda^3-5\lambda=2\lambda-6\Leftrightarrow\lambda^3-7\lambda+6=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=-3$.

ΘΕΜΑ 60

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f^2(0)+f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)$.

Να αποδείξετε ότι :

Ε1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε2. Υπάρχουν μοναδικά x_1 και x_2 στο διάστημα $(0,1)$ τέτοια ώστε :

α. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y=3x$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη x_1.

β. $12f(x_2)=3f\left(\dfrac{1}{e}\right)+4f\left(\dfrac{1}{\pi}\right)+5f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ε3. Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x+4)-1)>3$.

Ε4. Ορίζουμε τους μιγαδικούς $z=f(x)+if(x)$ με $x\in[0,1]$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-5|$.

Λύση:

Ε1. Είναι,

$f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)\Leftrightarrow f^2(0)-6f(0)+9+f^2(1)-4f(1)+4=0\Leftrightarrow$

$$\left(f(0)-3\right)^2+\left(f(1)-2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=3\\ \text{και}\\ f(1)=2\end{cases}$$

Έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, επίσης $0<1$ ενώ $f(0)>f(1)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Ε2. **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x, x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών $g(0)=f(0)=3>0$ και $g(1)=f(1)-3=2-3=-1<0$ Οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=3x_1$.

Για $\alpha,\beta\in[0,1]$ με $\alpha<\beta$ έχουμε $f(\alpha)>f(\beta)$ και $\alpha<\beta\Rightarrow-3\alpha>-3\beta$ οπότε $f(\alpha)-3\alpha>f(\beta)-3\beta\Leftrightarrow g(\alpha)>g(\beta)$, επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[0,1]$. Οπότε η x_1 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$. Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=3x$ σε ένα μόνο σημείο.

β. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ έχουμε πως

$0\le x\le 1 \Rightarrow f(0)\ge f(x)\ge f(1) \Rightarrow 3\ge f(x)\ge 2 \Rightarrow \quad 2\le f(x)\le 3$

Για $x=\frac{1}{e}\in[0,1]$ έχουμε $2<f\left(\frac{1}{e}\right)<3$ οπότε $6<3f\left(\frac{1}{e}\right)<9$.

Για $x=\frac{1}{\pi}\in[0,1]$ έχουμε $2<f\left(\frac{1}{\pi}\right)<3$ οπότε $8<4f\left(\frac{1}{\pi}\right)<12$.

Για $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$ έχουμε $2<f\left(\frac{1}{2}\right)<3$ οπότε $10<5f\left(\frac{1}{2}\right)<15$.

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε, $24<3f\left(\frac{1}{e}\right)+4f\left(\frac{1}{\pi}\right)+5f\left(\frac{1}{2}\right)<36$, οπότε

$2<\dfrac{3f\left(\frac{1}{e}\right)+4f\left(\frac{1}{\pi}\right)+5f\left(\frac{1}{2}\right)}{12}<3$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=\dfrac{3f\left(\frac{1}{e}\right)+4f\left(\frac{1}{\pi}\right)+5f\left(\frac{1}{2}\right)}{12}$

$\Leftrightarrow 12f(x_2)=3f\left(\frac{1}{e}\right)+4f\left(\frac{1}{\pi}\right)+5f\left(\frac{1}{2}\right)$. Και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, έχουμε ότι το x_2 είναι μοναδικό.

Ε3. Για να έχει νόημα η ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x-4)-1)>4$ πρέπει $x>0$ και

$2\le \ln x+4\le 3 \Leftrightarrow -2\le \ln x\le -1 \Leftrightarrow x\in[e^{-2},e^{-1}]$ και

$0\le f^{-1}(\ln x+4)-1\le 1 \Leftrightarrow 1\le f^{-1}(\ln x+4)\le 2$. Από την τελευταία επειδή η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το $[0,1]$, έχουμε ότι $f^{-1}(\ln x+4)=1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(\ln x+4))=f(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x+4=2 \Leftrightarrow \ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2}$ άρα η ανίσωση ορίζεται μόνο για $x=e^{-2}$.
Επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη.

Β΄ τρόπος:
Επειδή από το ερώτημα Ε2.β ισχύει πως $2\le f(x)\le 3$ για κάθε $x\in[0,1]$, το όποιο είναι το πεδίο ορισμού της f, η ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x+4)-1)>3$ για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται, είναι αδύνατη.

Ε4. **α.** Έστω $z=\kappa+\lambda i,\ \ \kappa,\lambda\in R$ έχουμε

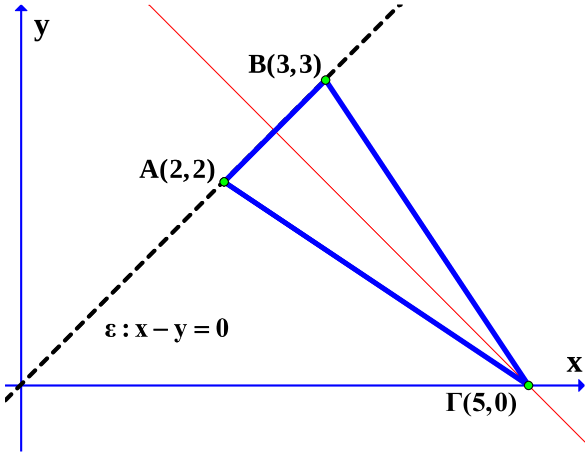
$$z=f(x)+f(x)i \Leftrightarrow \kappa+\lambda i=f(x)+f(x)i \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=f(x)\\ \text{και}\\ \lambda=f(x)\end{cases}$$

Οπότε ισχύει $\kappa=\lambda$ που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $y=x$ και επειδή ισχύει $2\le f(x)\le 3$, άρα και $\kappa,\lambda\in[2,3]$ οι εικόνες του μιγαδικού $\mathbf{z}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{AB}$ της ευθείας $\mathbf{y=x}$ με $\mathbf{A(2,2)}$ και $\mathbf{B(3,3)}$.

β. Το μέτρο $|z-5|=|z-(5+0i)|$ είναι απόσταση των εικόνων των μιγαδικών $\mathbf{z}$ από την εικόνα $\mathbf{\Gamma(5,0)}$ του μιγαδικού $\mathbf{5+0i}$.

Έχουμε $(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})=\sqrt{13}$

και $d(\Gamma,\varepsilon)=\dfrac{|1\cdot5-1\cdot0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$



Άρα $|z-5|_{max}=(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{B\Gamma})=\sqrt{13}$ και $|z-5|_{min}=d(\Gamma,\varepsilon)=\dfrac{|1\cdot5-1\cdot0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Β΄ τρόπος:

Επειδή ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού $\mathbf{z}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας $\mathbf{y=x}$ με $\mathbf{x\in[2,3]}$ θα ισχύει πως $\mathbf{z=x+yi=x+xi}$ με $\mathbf{x\in[2,3]}$.

$$|z-5|\overset{z=x+xi}{=}|x+xi-5|=|(x-5)+xi|=\sqrt{(x-5)^2+x^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-10x+25+x^2}=\sqrt{2x^2-10x+25}$$

$$=\sqrt{2\left(x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+25}=\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+25-\frac{25}{2}}=\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}}$$

Η συνάρτηση $\sqrt{2x^2-10x+25}$ με $\mathbf{x\in[2,3]}$ παρουσιάζει ακρότατα για τις ίδιες τιμές του $\mathbf{x}$ που παρουσιάζει ακρότατα και η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=2x^2-10x+25}$.

$$g(x)=2x^2-10x+25=2\left(x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+25.$$

$$g(x)=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+25-\frac{25}{2}=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

Η $\mathbf{g(x)}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\dfrac{5}{2}$

με τιμή $g\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$.

x	2		$\frac{5}{2}$		3
g(x)	τ.μ.	↘	ο.ε.	↗	τ.μ.

Η $\mathbf{g(x)}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x_1=2$ και $x_2=3$ με τιμές $g(2)=2\cdot2^2-10\cdot2+25=13$ και $g(2)=2\cdot3^2-10\cdot3+25=13$, συνεπώς παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x_1=2$ και $x_2=3$ με τιμή $g(2)=g(3)=13$.

Συνεπώς

$$|z-5|_{min}=\sqrt{g(x)_{min}}=\sqrt{g\left(\frac{5}{2}\right)}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$|z-5|_{max} = \sqrt{g(x)_{max}} = \sqrt{g(2)} = \sqrt{g(3)} = \sqrt{13}$$

ΘΕΜΑ 61

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Να βρεθεί ο τύπος της g όταν $y>0$ και $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{x}{e^{xy}+x^2+1}$

Λύση:

Αν $x=0$ τότε προφανώς $g(x)=0$. Αν τώρα $x>0 \Leftrightarrow e^x>1$ και $\lim\limits_{y\to+\infty}(e^x)^y=+\infty$

άρα και $\lim\limits_{y\to+\infty}((e^x)^y+x^2+1)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{x}{(e^x)^y+x^2+1}=0$ και $g(x)=0$.

Αν τώρα $x<0 \Leftrightarrow e^x<1$ και $\lim\limits_{y\to+\infty}((e^x)^y=0$, άρα $\lim\limits_{y\to+\infty}((e^x)^y+x^2+1)=x^2+1$

επομένως $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{x}{(e^x)^y+x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}$ επομένως $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Τελικά $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, x\in R$.

ΘΕΜΑ 62

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$
- $f(1)>0$
- $f(1)f(2)=f(3)f(4)$

Να αποδείξετε ότι:

Ε1. $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,4]$.

Ε2. Η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστονρίζα στο $(1,2)$.

Ε3. Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη.

Λύση:

Ε1. Επειδή $f(x)\neq 0, x\in[1,4]$και συνεχής, έχουμε ότι η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1,4]$. Αφού $f(1)>0$ θα ισχύει $f(x)>0, x\in[1,4]$.

Ε2. Η $g(x)=f^2(x)-f(1)f(2)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$,λόγω συνέχειας της f στο $[1,4]$ με $g(1)=f^2(1)-f(1)f(2)=f(1)(f(1)-f(2))$ και $g(2)=f^2(2)-f(1)f(2)=f(2)(f(2)-f(1))$.

Επομένως $g(1)g(2)=-f(1)f(2)(f(2)-f(1))^2\leq 0 \quad (1)$.

Αν $f(1)=f(2)=0$ προφανώς ρίζες της $g(x)=0$ το 1 και το 2.

Αν τώρα ισχύει $f(1)\neq f(2)$ από (1) $g(1)g(2)<0$ και από θεώρημα **Bolzano** η $g(x)=0$ έχει ρίζα στο $(1,2)$. Άρα σε κάθε περίπτωση η $g(x)=0$ έχει ρίζα ,έστω $x_1\in[1,2]$ αυτή.

Ε3. Τώρα αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x)=f^2(x)-f(3)f(4)}$,όμοια με προηγούμενα δείχνουμε ότι υπάρχει σε κάθε περίπτωση $\mathbf{x_2\in[3,4]}$, ώστε $\mathbf{h(x_2)=0}$ οπότε $\mathbf{f^2(x_2)=f(3)f(4)}$ και από **(Ε2)** $\mathbf{f^2(x_1)=f(1)f(2)}$.
Όμως $\mathbf{f(1)f(2)=f(3)f(4)}$ οπότε θα ισχύει $\mathbf{f^2(x_1)=f^2(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)}$ λόγω του ότι $\mathbf{f(x)>0, x\in[1,4]}$. Άρα η $\mathbf{f}$ δεν είναι $\mathbf{'1-1'}$ αφού για $\mathbf{x_1\neq x_2}$ ισχύει $\mathbf{f(x_1)=f(x_2)}$.

Β΄τρόπος:
Είναι $\mathbf{f}$ συνεχής σε $\mathbf{[1,4]}$, $\mathbf{f(x)>0}$ από ερώτημα **(Ε1)**
Άρα θα υπάρχουν $\mathbf{\xi_1,\xi_2\in[1,2]}$ με $\mathbf{f(\xi_1)=m, f(\xi_2)=M}$,
όπου $\mathbf{0<m\le f(x)\le M}$ για κάθε $\mathbf{x\in[1,2]}$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{x=1}{\Rightarrow}0<m\le f(1)\le M\\ \overset{x=2}{\Rightarrow}0<m\le f(2)\le M\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0<m^2\le f(1)f(2)\le M^2 \overset{16\sqrt{x}\nearrow[0,+\infty)}{\Rightarrow} \sqrt{0}<\sqrt{m^2}\le\sqrt{f(1)f(2)}\le\sqrt{M^2}\overset{m,M>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0<m\le\sqrt{f(1)f(2)}\le M\Rightarrow \overset{f(\xi_1)=m,f(\xi_2)=M}{\Rightarrow} 0<f(\xi_1)\le\sqrt{f(1)f(2)}\le f(\xi_2)$$

Ο αριθμός $\mathbf{\sqrt{f(1)f(2)}}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $\mathbf{f(\xi_1)}$, $\mathbf{f(\xi_2)}$.
Αν $\mathbf{\xi_1=\xi_2\Rightarrow f(\xi_1)=f(\xi_2)\Rightarrow m=M\Rightarrow f}$ σταθερή στο $\mathbf{[1,2]}$
άρα η $\mathbf{f}$ δεν είναι $\mathbf{1-1}$ και δεν αντιστρέφεται
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathbf{\xi_1<\xi_2}$
Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[1,2]\Rightarrow}$ f συνεχής στο $\mathbf{[\xi_1,\xi_2]\subseteq[1,2]}$.
Από Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών **,Θ.Ε.Τ,** προκύπτει ότι ο παραπάνω αριθμός θα είναι τιμή της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{(\xi_1,\xi_2)}$,

δηλαδή θα υπάρχει $\mathbf{x_1\in(\xi_1,\xi_2)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_1)=\sqrt{f(1)f(2)}}\overset{(\xi_1,\xi_2)\subseteq[1,2]}{\Rightarrow}$
θα υπάρχει $\mathbf{x_1\in(1,2)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_1)=\sqrt{f(1)f(2)}}$
Ομοίως θα υπάρχει $\mathbf{x_2\in(3,4)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_2)=\sqrt{f(3)f(4)}}$
Κι επειδή $\mathbf{f(1)f(2)=f(3)f(4)\Rightarrow\sqrt{f(1)f(2)}=\sqrt{f(3)f(4)}\Rightarrow}$
$\mathbf{f(x_1)=f(x_2)}$ με $\mathbf{x_1\neq x_2}$ διότι $\mathbf{1\le x_1\le 2<3\le x_2\le 4}$.
άρα η $\mathbf{f}$ δεν είναι $\mathbf{1-1}$ και δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 63 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Ε1. Να δειχθεί η ισοδυναμία για $\mathbf{x_0\neq 0}$, $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 1}f(x_0h)=\ell}$

Ε2. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in R$. Να δείξετε ότι :

α. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

β. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=\alpha$, όπου $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $x_o=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{1}{\alpha}$, όπου $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Λύση:

Ε1. Θέτω $\frac{x}{xo}=h$ τότε $x=x_o h$. Όταν $x\to x_0$ έχουμε οτι $h\to 1$.
Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 1}f(x_o h)=\ell$.

Ε2. **α.** Αρχικά για $x=1\Leftrightarrow f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$.
Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$, διότι η f είναι συνεχής στο 1 και
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 1}f(x_0 h)=\lim\limits_{h\to 1}[f(x_o)+f(h)]=f(x_o)+\lim\limits_{h\to 1}f(h)=f(x_o)+f(1)=f(x_o)$
άρα είναι συνεχής στο τυχαίο $x_o>0$. Οπότε είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

β. Έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_o=\alpha$, όπου $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.
Επομένως $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$.
Σύμφωνα με το **(Ε2α)** ,αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=1$.
Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f\left((x\alpha)\frac{1}{\alpha}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)=\lim\limits_{u\to\alpha}\left(f(u)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$
$=f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=f\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right)=f(1)$.

γ. Η f συνεχής στο $x_o=\alpha\neq 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f\left(\alpha\frac{x}{\alpha}\right)-f(\alpha)}{\alpha\frac{x}{\alpha}-\alpha}=L$ και

για $h=\frac{x}{\alpha}$ όταν $x\to\alpha$ το $h\to 1$ οπότε έχουμε ότι

$$L=\lim_{h\to 1}\frac{f(\alpha h)-f(\alpha)}{\alpha h-\alpha}=\lim_{h\to 1}\frac{f(\alpha)+f(h)-f(\alpha)}{\alpha(h-1)}=\frac{1}{\alpha}.$$

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\mathbf{f(x+y)=f(x)+f(y)-\alpha}$, για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$, $\mathbf{\alpha\in R}$ (σταθερό).

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(0)=\alpha}$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x-y)=f(x)-f(y)+\alpha}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(\nu x)=\nu f(x)-(\nu-1)\alpha}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$, $\mathbf{\nu\in N^*}$.

Ε4. Αν η εξίσωση $\mathbf{f(x)=\alpha}$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ και ισχύει $\mathbf{f^{-1}(x+y-\alpha)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)}$ για κάθε $\mathbf{x,y\in f(R)}$.

Ε5. **α.** Αν για κάθε $\mathbf{x>0}$ είναι $\mathbf{f(x)>\alpha}$, να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

β. να λυθεί η ανίσωση $\mathbf{f^{-1}(2f(x^2))<f^{-1}(f(3x-1)+\alpha)}$.

Ε6. Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=0}$ να βρείτε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}$.

Πηγή: περιοδικό Απολλώνιος

Λύση:

Ε1. Για $\mathbf{x=y=0}$ η δοσμένη γίνεται $\mathbf{f(0)=2f(0)-\alpha\Rightarrow f(0)=\alpha}$.

Ε2. Για $\mathbf{x=-y}$ η δοσμένη γίνεται
$\mathbf{f(0)=f(-y)+f(y)-\alpha\Rightarrow f(-y)=2\alpha-f(y)\ \ (1)}$.
Βάζοντας όπου $\mathbf{y}$ το $\mathbf{-y}$ στη δοσμένη αρχική σχέση είναι
$\mathbf{f(x-y)=f(x)+f(-y)-\alpha\Rightarrow f(x-y)=f(x)+2\alpha-f(y)-\alpha\Rightarrow}$
$\mathbf{\Rightarrow f(x-y)=f(x)-f(y)+\alpha}$ (λόγω της **(1)**).

Ε3. Είναι για $\mathbf{\nu=1\ \Rightarrow f(x)=f(x)-0\Leftrightarrow 0=0}$, που ισχύει.
Έστω ότι η σχέση ισχύει για $\mathbf{\nu=\kappa\Rightarrow f(\kappa x)=\kappa f(x)-(\kappa-1)\alpha (2)}$,
θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $\mathbf{\nu=\kappa+1}$.
Είναι $\mathbf{f[(\kappa+1)x]=f(\kappa x+x)=f(\kappa x)+f(x)-\alpha=\kappa f(x)+f(x)-(\kappa-1)\alpha-\alpha=}$
$\mathbf{=(\kappa+1)f(\kappa)-\kappa\alpha}$ που είναι το ζητούμενο, άρα σύμφωνα με τη μαθηματική επαγωγή η σχέση θα ισχύει.

Ε4. Είναι $\mathbf{f(0)=\alpha}$, άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{f(x)=0}$ είναι η $\mathbf{x_0=0}$.
Έστω $\mathbf{x_1,x_2\in R}$ με $\mathbf{f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0}$
$\mathbf{\Rightarrow f(x_1-x_2)-\alpha=0\Rightarrow f(x_1-x_2)=\alpha}$ (λόγω του **Ε2**) , άρα θα πρέπει
$\mathbf{x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2}$, συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$, άρα και αντιστρέψιμη.
Έστω $\mathbf{f^{-1}(x+y-\alpha)=\kappa\Rightarrow(x+y-\alpha)=f(\kappa)}$, $\mathbf{f^{-1}(x)=\lambda\Rightarrow x=f(\lambda)}$
$\mathbf{f^{-1}(y)=\mu\Rightarrow y=f(\mu)}$
Από την αρχική σχέση είναι $\mathbf{f(\lambda+\mu)=f(\lambda)+f(\mu)-\alpha\Rightarrow f(\lambda+\mu)=x+y-\alpha}$
$\mathbf{\Rightarrow\lambda+\mu=f^{-1}(x+y-\alpha)\Rightarrow f^{-1}(x+y-\alpha)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)}$

Ε5. **α.** Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$
$\Rightarrow f(x_2 - x_1) > \alpha \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) + \alpha > \alpha \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Θα είναι και η f^{-1} γνησίως αύξουσα στο R.

Απόδειξη:

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$
και $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2))$
άρα και $x_1 \geq x_2$, **άτοπο**.

β. Έτσι $f^{-1}(2f(x^2) < f^{-1}(f(3x-1) + \alpha) \Rightarrow$
$2f(x^2) < f(3x-1) < \alpha \Rightarrow f(x^2) - f(3x-1) < f(0) - f(x^2) \Rightarrow$
$f(x^2 - 3x + 1) < f(-x^2) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 < 0$
άρα $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

Ε6. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \alpha$, αφού η f είναι συνεχής στο 0.
Έστω τυχόν $x_o \in R \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_o + h) = \lim\limits_{h\to 0}[f(x_o) + f(h) - \alpha] = f(x_0)$.
Έτσι η f είναι συνεχής στο R.

ΘΕΜΑ 65

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 5f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in R$.

Ε1. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f.

Ε2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Ε3. Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το R και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Ε4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Ε5. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Ε6. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-19) = x + 1$.

Ε7. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$.

Λύση:

Ε1. Ισχύει ότι $f(x)(f^2(x) + 5) = -x, x \in R$ άρα επειδή $f^2(x) + 5 > 0$ θα είναι και $f(x) = -\frac{x}{f^2(x) + 5}$ (1). Από όπου για $x < 0$ έχουμε $f(x) > 0$ και για $x > 0$ έχουμε $f(x) < 0$.

Ε2. Αν για $x_1,x_2 \in R$ ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$ τότε θα ισχύουν και $f^3(x_1)=f^3(x_2)$, $5f(x_1)=5f(x_2)$ και με πρόσθεση ότι

$f^3(x_1)+5f(x_1)=f^3(x_2)+5f(x_2)$ άρα και $-x_1=-x_2$ άρα η f είναι '$1-1$'.

Ε3. Αν $g(x)=x^3+5x, x\in R$ ισχύουν ότι είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα αφού για $x_1<x_2$ ισχύουν ότι $x_1^3<x_2^3$ άρα και $x_1^3+5x_1<x_2^3+5x_2$ άρα και $g(x_1)<g(x_2)$.

Έχουμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+5x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+5x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

άρα η g έχει σύνολο τιμών $g(R)=R$ και αφού ισχύει $g(f(x))=-x, x\in R$ και g αντιστρέψιμη με $g^{-1}:R\to R$ θα ισχύει $f(x)=g^{-1}(-x), x\in R$.

Επομένως η f θα έχει σύνολο τιμών το R οπότε θα είναι $f^{-1}:R\to R$ και για x το $f^{-1}(x)$ από την αρχική θα ισχύει $f^3(f^{-1}(x))+5f(f^{-1}(x))+f^{-1}(x)=0$

Άρα $f^{-1}(x)=-x^3-5x,\ x\in R$.

Ε4. Από $g(f(x))=-x,\quad x\in R$ για $x_1<x_2$ ισχύει, $-x_1>-x_2$ άρα και $g(f(x_1))>g(f(x_2))$ και επειδή η g γνήσια αύξουσα, θα ισχύει ότι, $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο R.

Ε5. Για $x=x_0$ στην αρχική προκύπτει ότι $f^3(x_0)+5f(x_0)=-x_0$ οπότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ότι $f^3(x)-f^3(x_0)+5(f(x)-f(x_0))=-x+x_0$ ή ακόμη

$(f(x)-f(x_0))\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+5\right)=-(x-x_0)$

οπότε και $f(x)-f(x_0)=-\dfrac{x-x_0}{\left(f(x)+\dfrac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\dfrac{3}{4}f^2(x_0)+5}$ και επειδή

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|-\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\dfrac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\dfrac{3}{4}f^2(x_0)+5}\right|\le\frac{|x-x_0|}{5}$$

άρα θα ισχύει $-\dfrac{|x-x_0|}{5}\le f(x)-f(x_0)\le\dfrac{|x-x_0|}{5}$.Όμως

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{5}=0$, συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=f(x_0)$ άρα η f είναι συνεχής στο R.

Ε6. Είναι $f(x-19)=x+1 \Leftrightarrow x-19=f^{-1}(x+1)$ ισοδύναμα λόγω (**Ε3**) $x-19=-(x+1)^3-5(x+1) \Leftrightarrow (x+1)^3+6(x+1)-20=0$ και με Horner προκύπτει ισοδύναμα ότι $x+1=2 \Leftrightarrow x=1$ ή $(x+1)^2+2(x+1)+10=0$ που είναι αδύνατο.

Ε7. Είναι $h(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}=\dfrac{-x^3-5x}{\eta\mu x}\overset{x\neq 0}{=}\dfrac{-x^2-5}{\frac{\eta\mu x}{x}}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=-5.$

ΘΕΜΑ 66

Προτείνει ghan

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $x^2<f(x)<x^2+1$.

Ε1. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=2x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

Ε2. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι:

α. η $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{e^x}-1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα

β. η εξίσωση $e^x+f(x)=e^xf(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$.

Ε3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x\right]$.

Λύση:

Ε1. Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-2x$ με $x\in\mathbb{R}$, που είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών, και είναι $h(0)=f(0)>0$, $h(1)=f(1)-2<0$ λόγω της αρχικής σχέσης άρα από **Bolzano** και λόγω συνέχειας υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε $f(x_o)=2x_o$.

Ε2. **α.** Αφού f γνήσια αύξουσα για κάθε x_1, x_2 με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)} \quad , \quad e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}}$$

άρα με πρόσθεση κατά μέλη και πρόσθεση και του -1 και στα δύο μέλη προκύπτει ότι $g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα.

β. Έχουμε

$$e^x+f(x)=e^xf(x) \overset{e^xf(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(x)}+\frac{1}{e^x}-1=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

όμως η g είναι συνεχής και ισχύει:

$$g(0)g(2)=\frac{1}{f(0)}\cdot\left(\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{e^2}-1\right)\overset{(f(2)>4)}{<}\frac{1}{f(0)}\left(\frac{1}{e^2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{4-3e^2}{4e^2f(0)}<0\,.$$

Τότε από θεώρημα **Bolzano** η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία λύση στο $(0,2)$ και μοναδική λόγω της μονοτονίας της g.

Ε3. Είναι $\frac{1}{x^2}<f\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x^2}+1\Rightarrow 1<x^2f\left(\frac{1}{x}\right)<1+x^2\Rightarrow$

$\ln x+1<\ln x+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)<1+x^2+\ln x$

και επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2+\ln x)=-\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\infty$.

ΘΕΜΑ 67

Προτείνει ο Μίλτος Παπαγρηγοράκης

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=3$ και $2\eta\mu(x-1)\le(x-1)f(x)\le x^2-1$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Ε1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=f(x)-\ln x-3$, $x\in(0,1)$.

Ε2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη $x_o\in(0,1)$.

Ε3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\alpha+3}=e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0,1)$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση:

Ε1. Θέτουμε $k(x)=\frac{f(x)-5}{x}, x\neq0$, οπότε $f(x)=xk(x)+5$.

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=\lim\limits_{x\to0}k(x)=3$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(xk(x)+5)=0\cdot3+5=5$.

Ακόμα έχουμε $2\eta\mu(x-1)\le(x-1)f(x)\le x^2-1$, οπότε για $x\in(0,1)$ έχουμε

$\frac{2\eta\mu(x-1)}{x-1}\ge f(x)\ge\frac{x^2-1}{x-1}$,

Άρα $u=x-1,\ x\to1^-,\ u\to0^-$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{u\to0^-}\frac{2\eta\mu u}{u}=2$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$.

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ έχει σύνολο τιμών το $A=(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x))=(2,5)$.

Για $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$ έχουμε $f(x_1)>f(x_2)$ (1) (διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Για $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $-\ln x_1 - 3 > -\ln x_2 - 3$ (2).
Από (1), (2) έχουμε $g(x_1) > g(x_2)$. Οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$
$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(f(x) - \ln x - 3) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(f(x) - \ln x - 3) = 2 - 3 = -1$.
Άρα η g έχει σύνολο τιμών το $B = (\lim\limits_{x\to1^-} g(x), \lim\limits_{x\to0^+} g(x)) = (-1, +\infty)$.

Ε2. Θεωρούμε $\varphi(x) = e^{f(x)-3} - x, x \in (0,1)$.
Για $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε $f(x_1) - 3 > f(x_2) - 3$.
Άρα $e^{f(x_1)-3} > e^{f(x_2)-3}$, οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.
Τώρα θέτοντας $u = f(x) - 3,\ x \to 0^+,\ u \to 2^+$ θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}(e^{f(x)-3}) = \lim\limits_{u\to2^+} e^u = e^2$
$\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(e^{f(x)-3} - x) = e^2 > 0$ και θέτοντας $u = f(x) - 3,\ x \to 1^-,\ u \to -1^-$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to1^-}(e^{f(x)-3}) = \lim\limits_{u\to-1^-}(e^u) = \frac{1}{e}$,οπότε $\lim\limits_{x\to1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(e^{f(x)-3} - x) = \frac{1}{e} - 1 < 0$.

Άρα η φ έχει σύνολο τιμών το $\Gamma = (\lim\limits_{x\to1^-} \varphi(x), \lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)) = (\frac{1}{e} - 1, e^2)$.
Επειδή το $0 \in \Gamma$, η φ έχει μια τουλάχιστον λύση. Και επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ η λύση είναι μοναδική. Συνεπώς, η $h(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Ε3. $xe^{\alpha+3} = e^{f(x)} \Leftrightarrow xe^{\alpha} = e^{f(x)-3} \Leftrightarrow h(x) - xe^{\alpha} = 0$
Θεωρούμε $s(x) = h(x) - xe^{\alpha}, x \in (0,1)$.
Από προηγούμενο ερώτημα έχουμε πως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.
Για $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $h(x_1) > h(x_2)$ και $-x_1e^{\alpha} > -x_2e^{\alpha}$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι η s είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.
Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} s(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(h(x) - xe^{\alpha}) = e^2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^-} s(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(h(x) - xe^{\alpha}) = \frac{1}{e} - e^{\alpha}$
Άρα η s έχει σύνολο τιμών το $\Delta = (\lim\limits_{x\to1^-} s(x), \lim\limits_{x\to0^+} s(x)) = (\frac{1}{e} - e^{\alpha}, e^2)$.
Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- ☑ **1η περίπτωση**: Αν $\frac{1}{e} - e^{\alpha} < 0$, δηλαδή
  $\frac{1}{e} - e^{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha+1} > 1 \Leftrightarrow e^{\alpha+1} > e^0 \Leftrightarrow \alpha > -1$. Τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, αφού το $0 \in \Delta$.
- ☑ **2η περίπτωση**: Αν $\frac{1}{e} - e^{\alpha} \geq 0$ δηλαδή
  $\frac{1}{e} - e^{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \geq e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha+1} \leq 1 \Leftrightarrow e^{\alpha+1} \leq e^0 \Leftrightarrow \alpha \leq -1$, τότε $0 \notin \Delta$, η εξίσωση δεν έχει καμία λύση.

ΘΕΜΑ 68

Προτείνει ο χρήστης ghan

Έστω $\mathbf{f:R\to R}$ με $\mathbf{f(R)=R}$ και επιπλέον για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$ ισχύει

$\left|\mathbf{f(x)-f(y)}\right|\ge\frac{1}{\theta}\left|\mathbf{x-y}\right|$, όπου $\theta\in(0,1)$. Να δειχθεί ότι:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ αντιστρέφεται.

Ε2. $\left|\mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(y)}\right|\le\theta\left|\mathbf{x-y}\right|$ για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$.

Ε3. Η $\mathbf{f^{-1}(x)}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ε4. Η εξίσωση $\mathbf{f^{-1}(x)=x}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbf{R}$.

Λύση:

Λύση:

Ε1. Θέτουμε στην αρχική σχέση $\mathbf{x=x_1,y=x_2}$ και έχουμε:

$|\mathbf{f(x_1)-f(x_2)}|\ge\frac{1}{\theta}|\mathbf{x_1-x_2}|\,\mathbf{(1)}$.

Έστω ότι $\mathbf{f(x_1)=f(x_2)}$, οπότε η $\mathbf{(1)}$ γίνεται:

$0\ge\frac{1}{\theta}|\mathbf{x_1-x_2}|\Leftrightarrow|\mathbf{x_1-x_2}|\le 0\Leftrightarrow \mathbf{x_1=x_2}$,οπότε η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ άρα αντιστρέφεται.

Ε2. Θέτουμε στην αρχική σχέση όπου $\mathbf{x}$ το $\mathbf{f^{-1}(x)}$ και όπου $\mathbf{y}$ το $\mathbf{f^{-1}(y)}$ και έχουμε: $|\mathbf{x-y}|\ge\frac{1}{\theta}|\mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(y)}|\Leftrightarrow|\mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(y)}|\le\theta|\mathbf{x-y}|\,\mathbf{(2)}$.

Ε3. Θέτουμε στην $\mathbf{(1)}$ $\mathbf{y=x_0}$ και έχουμε:

$|\mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}|\le\theta|\mathbf{x-x_0}|\Leftrightarrow-\theta|\mathbf{x-x_0}|\le \mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}\le\theta|\mathbf{x-x_0}|\,\mathbf{(3)}$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\theta|\mathbf{x-x_0}|\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\theta|\mathbf{x-x_0}|\right)=0$,

οπότε λόγω της $\mathbf{(3)}$ και του κριτηρίου παρεμβολής ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\mathbf{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left(\mathbf{f^{-1}(x)}\right)=\mathbf{f^{-1}(x_0)}$,

δηλαδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο τυχαίο $\mathbf{x_0}$, άρα είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ε4. Η συνάρτηση $\mathbf{f^{-1}}$ είναι $\mathbf{1-1}$ και συνεχής, οπότε είναι γνησίως μονότονη, ενώ η συνάρτηση $\mathbf{x}$ είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση έχει το πολύ μία λύση.

ΘΕΜΑ 69

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$f^2(x)+g^2(x)+1=2xf(x)+2g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να δείξετε ότι $(f(x)-x)^2+(g(x)-1)^2=x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε2. Να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο $x_o=0$.

Ε3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

Ε4. Αν η g συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=-2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε ,

$$f^2(x)+g^2(x)+1=2xf(x)+2g(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+g^2(x)-2g(x)+1=0\Leftrightarrow$$
$$(f^2(x)-2xf(x)+x^2)+(g^2(x)-2g(x)+1)=x^2\Leftrightarrow(f(x)-x)^2+(g(x)-1)^2=x^2$$

Ε2. Για $x=0$ έχουμε $(f(0)-0)^2+(g(0)-1)^2=0^2\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ \text{και}\\ g(0)=1\end{cases}$

$$(f(x)-x)^2+(g(x)-1)^2=x^2\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=x^2-(g(x)-1)^2\le x^2\Leftrightarrow$$
$$(f(x)-x)^2\le x^2\Leftrightarrow|f(x)-x|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le f(x)-x\le|x|\Leftrightarrow$$
$$-|x|+x\le f(x)\le|x|+x$$

Όμως $\lim\limits_{x\to0}(-|x|+x)=0=\lim\limits_{x\to0}(|x|+x)$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. Δουλεύουμε όμοια και έχουμε

$$(f(x)-x)^2+(g(x)-1)^2=x^2\Leftrightarrow(g(x)-1)^2=x^2-(f(x)-x)^2\le x^2\Leftrightarrow$$
$$(g(x)-1)^2\le x^2\Leftrightarrow|g(x)-1|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le g(x)-1\le|x|\Leftrightarrow$$
$$-|x|+1\le g(x)\le|x|+1$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}(-|x|+1)=1=\lim\limits_{x\to0}(|x|+1)$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1=g(0)$ και $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, έχουμε ότι οι f,g συνεχείς στο $x_0=0$.

Ε3. Έχουμε $x-|x|\le f(x)\le x+|x|$, οπότε για $x>0$, έχουμε ότι

$0\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}0.$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+2x, x\in\mathbb{R}$

Γνωρίζουμε πως $1-|x|\le g(x)\le1+|x|$

Για $\mathbf{x=-2}$ έχουμε $\mathbf{-1\le g(-2)\le 3}$ άρα

$\mathbf{-1-4\le g(-2)-4\le 3-4 \Leftrightarrow -5\le h(-2)\le -1}$.

Η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[-2,1]}$

$\mathbf{h(1)=g(1)+2=1+2=3>0}$ και $\mathbf{h(-2)=g(-2)-4<0}$

Επομένως από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_0\in(2,1)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{h(x_0)=0 \Leftrightarrow g(x_0)=-2x_0}$, δηλαδή η εξίσωση $\mathbf{g(x)=-2x}$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

ΘΕΜΑ 70

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ με τύπους $\mathbf{f(x)=\ln(x^2-x)}$ και $\mathbf{g(x)=\ln(x-1)}$.

Ε1. Να εξετάσετε αν το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $\mathbf{h}$ της διαφοράς των $\mathbf{f,g}$.

Ε2. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $\mathbf{h^{-1}}$.

Ε3. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{h^{-1}(x-1)+h(x)=\ln(h^{-1}(\ln 2))+eh(e)}$.

Λύση:

Ε1. Το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{A_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)}$ και της $\mathbf{g}$ το $\mathbf{A_g=(1,+\infty)}$. Άρα $\mathbf{A_h=(1,+\infty)}$.

Με $\mathbf{x>1}$ έχουμε τώρα $\mathbf{f(x)=\ln x+\ln(x-1)=\ln x+g(x)}$ και άρα $\mathbf{h(x)=\ln x}$.

Έχουμε $\mathbf{h(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1}$. Όμως η τιμή αυτή απορρίπτεται , αφού έχουμε $\mathbf{x>1}$ και άρα το $\mathbf{0}$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της $\mathbf{h}$.

Ε2. Έστω $\mathbf{y=h(x) \Leftrightarrow y=\ln x, x>1 \Leftrightarrow x=e^y, x>1 \Leftrightarrow h^{-1}(x)=e^x, x>0}$.

Ε3. Έχουμε: $\mathbf{e^{x-1}+\ln x=\ln(e^{\ln 2})+e\ln e \Leftrightarrow e^{x-1}+\ln x=\ln 2+e}$.

Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $\mathbf{x=2}$ και επειδή για $\mathbf{0<x_1<x_2}$ ισχύουν ότι $\mathbf{x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}}$ και $\mathbf{\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1-\ln 2-e<\ln x_2-\ln 2-e}$ θα ισχύει, προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες ότι

$\mathbf{e^{x_1-1}+\ln x_1-\ln 2-e<e^{x_2-1}+\ln x_2-\ln 2-e}$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\mathbf{P(x)=e^{x-1}+\ln x-\ln 2-e}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{(0,\ +\infty)}$,άρα η λύση είναι μοναδική.

Διαφορικός Λογισμός

Συλλογή 50 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 17/02/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Διαφορικός Λογισμός:- Μια συλλογή 50 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=22305

Έλυσαν οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Κουτσούκος
Γιάννης Σταματογιάννης
Δημήτρης Ιωάννου
Δημήτρης Κατσίποδας
Διονύσης Βουτσάς
Κώστας Ρεκούμης
Κώστας Τηλέγραφος
Μυρτώ Λιάπη
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Περικλής Παντούλας
Ροδόλφος Μπόρης
Στάθης Κούτρας
Χρήστος Στραγάλης
Χρήστος Τσιφάκης
parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 71 — **Προτείνει ο Περικλής Παντούλας**

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$, συνεχής στο σημείο $\mathbf{x_0}$ και ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)}{h}=m\in R$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x_0)=-\dfrac{m}{2}$.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{m}{2}$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα όριο που τείνει στο $\mathbf{0}$ $(h\to 0)$) και ζητάμε όριο που τείνει στο $\mathbf{x_0}$ $(x\to x_0)$. Οπότε κάνουμε αλλαγή μεταβλητής.

Θέτουμε $x_0-2h=t\Leftrightarrow h=\dfrac{x_0-t}{2}$ το $h\to 0$, άρα $t\to x_0$ οπότε η $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)}{h}=m$ γίνεται $\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{f(t)}{\frac{x_0-t}{2}}=m\Leftrightarrow 2\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{f(t)}{x_0-t}=m\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{f(t)}{t-x_0}=-\dfrac{m}{2}(1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t)=\dfrac{f(t)}{t-x_0}$ για $t\neq x_0$ με $\lim\limits_{t\to x_0}g(x)=-\dfrac{m}{2}$.

Έχουμε $g(t)=\dfrac{f(t)}{t-x_0}\Leftrightarrow f(t)=g(t)(t-x_0)$ οπότε ,

$$\lim_{t\to x_0}f(t)=\lim_{t\to x_0}g(t)(t-x_0)=-\frac{m}{2}(x_0-x_0)=0.$$

Όμως η f συνεχής στο R, άρα $\lim\limits_{t\to x_0}f(t)=0=f(x_0)$ οπότε η (1) γίνεται

$$\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)}{t-x_0}=-\frac{m}{2}\Leftrightarrow \lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=-\frac{m}{2}\Leftrightarrow f'(x_0)=-\frac{m}{2}.$$

Β΄ τρόπος

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=x_0-2h}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{\cancel{x_0}-2h-\cancel{x_0}}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}$$

Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0}$ άρα

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)\overset{x=x_0-2h}{=}\lim_{h\to 0}f(x_0-2h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0-2h)}{h}h\right)$$

$$f(x_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0-2h)}{h}h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=m\cdot 0=0$$

οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\overset{f(x_0)=0}{=}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)}{h}=-\frac{m}{2}$

συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0)=-\frac{m}{2}$

ΘΕΜΑ 72

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις :

$\bullet f(2)=2$ $\qquad \bullet \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3$ $\qquad \bullet f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$

Ε1. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=9$.

Ε3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

Ε4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$.

Ε6. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

Πηγή: Ι.Γαρατζιώτης - Π. Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)

Λύση

Ε1. Στη σχέση $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3$ θέτω $\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=g(x)$ με $\lim_{x\to 0}g(x)=3$, για x κοντά στο 0.

Τότε $f(x)=\eta\mu(3x)g(x)$ και $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\eta\mu(3x)g(x))=0\cdot 3=0$.

Αφού η f συνεχής στο $x_0=0$ (ως παραγωγίσιμη) έχουμε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

Ε2. Αφού η f παραγωγίσιμη, είναι

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\underset{\text{Απο Ε1}}{\overset{f(x)=\eta\mu(3x)g(x)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)g(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{x}g(x)=3\cdot 3=9.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\right)\overset{(*)}{=}3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3.$

(*) Θέτω $u=3x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{x\to 0}3x=0$.

Β΄ τρόπος

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 3x}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}=3$ (1).

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\right)=3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=3$ (όπου $u=3x$).

Τότε στη(1) θέτω $\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}=h(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=3$ και

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}h(x).$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}h(x)\right)=3\cdot 3=9\in\Re.$ Οπότε $f'(0)=9.$

Ε3. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=9x.$

Ε4. Έστω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1,ρ_2 ’με $\rho_1<\rho_2$ στο διάστημα $(0,2)$. Τότε $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)=0$ και επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]\subset(0,2)$ ως παραγωγίσιμη (αφού η f δύο φορές παραγωγίσιμη) και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα. Από θεώρημα **Rolle** λοιπόν, θα υπάρχει $h\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f''(h)=0.$ **Άτοπο.** αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$. Συνεπώς η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο $(0,2)$.

Ε5. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2+x, x\in[0,2].$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών αφού η f συνεχής και επιπλέον

$$h(0)=f(0)-2=-2<0 \text{ και } h(2)=f(2)-2+2=2>0.$$

Από θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-2+\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)=2-\xi.$$

Ε6. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,2]$, όπου ξ, το ξ του ερωτήματος (**Ε5**) και συνεπώς υπάρχουν $x_1\in(0,\xi)$ και $x_2\in(\xi,2)$ τέτοια ώστε :

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{2-\xi}{\xi} \text{ και } f'(x_2)=\frac{f(2)-f(\xi)}{2-\xi}=\frac{2-(2-\xi)}{2-\xi}=\frac{\xi}{2-\xi}.$$

Οπότε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\dfrac{2-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{2-\xi}=1.$

ΘΕΜΑ 73

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$

Ε1. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Ε2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε3. Να δείξετε ότι $e^x\ge\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1,\ x\in\mathbb{R}.$

Ε4. Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{g(x)}-g(x)-\dfrac{g^3(x)}{6}\right)=1.$

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0.$

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)-e^{-x}\left(\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)=-\dfrac{x^3}{6}e^{-x}.$

Από το διπλανό πίνακα, η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x^3$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	Τ.μ	↘

Ακόμη η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x)=\frac{-1}{6}(3x^2e^{-x}-x^3e^{-x})=\frac{x^2e^{-x}}{6}(x-3).$$

Από το διπλανό πίνακα, η $\mathbf{f}$ είναι κοίλη στο

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
x^2e^{-x}	$+$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩		∩	Σ.κ	∪

$(-\infty,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(3,13e^{-3})$.

Ε2. Είναι $\Delta_1=(-\infty,0]\Rightarrow f(\Delta_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(0)]=(-\infty,1]$ γιατί η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής

και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x^3}{6})=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

και $\Delta_2=[0,+\infty)\Rightarrow f(\Delta_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(0)]=(0,1]$

γιατί η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+x+1}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Άρα $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]$.

Ε3. Η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(0)=1$ άρα και

$$f(x)\le1\Rightarrow(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1)e^{-x}\le1\Rightarrow e^x\ge\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1.$$

Ε4. Ισχύει λόγω του **(Ε3)** ότι : $e^{g(x)}-\frac{g^3(x)}{6}-g(x)\ge\frac{g^2(x)}{2}+1\ge1$

και επειδή είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{g(x)}-g(x)-\frac{g^3(x)}{6}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0}1=1$ σύμφωνα με το

κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{g^2(x)}{2}+1\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to0}\frac{g^2(x)}{2}+1=1\Leftrightarrow\lim_{x\to0}\frac{g^2(x)}{2}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to0}g^2(x)=0\quad(1).$$

Αν $\varphi(x)=g^2(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=1$ θα είναι $|g(x)|=\sqrt{(\varphi(x)}$, οπότε και $\lim\limits_{x\to 0}|g(x)|=0$ και αφού $-|g(x)|\le g(x)\le |g(x)|$, από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

ΘΕΜΑ 74

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε x πραγματικό.

Ε1. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

Ε2. Να δείξετε ότι $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

Ε3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

Πηγή: Ε.Τσακουμάγκος – Α.Μπαλωμένου (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση

Ε1. Έχουμε $f(x)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$ (1).

Ενώ για $x=\beta$ έχουμε $f(\beta)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow f(\beta)\le f(\alpha)$ (2).

Από (1), (2) έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$.

•f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

•f παραγωγίσιμη στο (α,β), διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

•$f(\alpha)=f(\beta)$

Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

Ε2. Έχουμε $f(x)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f(\alpha)=f(\beta)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (3).

Από την (3) έχουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστο στις θέσεις $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Οπότε από θεώρημα **Fermat** έχουμε $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

Ε3. •f' συνεχής στο $[\alpha,x_1]$ διότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

•f' παραγωγίσιμη στο (α,x_1) διότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

•$f'(\alpha)=f'(x_1)=0$.

Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=0$.

•f' συνεχής στο $[x_1,\beta]$ διότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

•f' παραγωγίσιμη στο (x_1,β) διότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο **R,**
•$f'(\beta)=f'(x_1)=0$.
Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x_1,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2)=0$.

Ισχύει πως $\alpha<\xi_1<x_1<\xi_2<\beta\Rightarrow\xi_1<\xi_2$.
•f'' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ διότι η f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο **R,**
•f'' παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) διότι η f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο **R,**
•$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$.
Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 75

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με
$f^3(x)+3f(x)=x$ για κάθε $x\in R$.

Ε1. Να μελετηθεί η μονοτονία της f.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

Ε3. Να βρεθεί το πρόσημο της f.

Ε4. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο και να προσδιορίσετε.

Ε5. Αν $0<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}>\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Ε6. **α.** Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)=f(x)-x$.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2-x)+x<x^2$.

Πηγή: Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

Λύση

Ε1. Και τα δυο μέλη της $f^3(x)+3f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις

ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίζοντας θα ισχύει

$$3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+3}\overset{f^2(x)+3>0}{\Rightarrow} f'(x)>0$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R.**

Ε2. Η f είναι $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη, αφού είναι γνησίως αύξουσα.
Πρώτα βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

☑ **Α΄ τρόπος**

Είναι $f^3(x)+3f(x)=x$ για κάθε $x\in R$.

Θεωρώ την $\mathbf{A(x)=x^3+3x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$ είναι $\mathbf{A'(x)=3x^2+3>0}$ άρα η $\mathbf{A(x)}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{R}$ οπότε $\mathbf{1-1}$ άρα αντιστρέφεται δηλαδή υπάρχει η $\mathbf{A^{-1}(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} A(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x\right)=+\infty.$

Η $\mathbf{A}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και γνησίως αύξουσα σε αυτό άρα

$$A(R)=A\big((-\infty,+\infty)\big)\overset{A\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}A(x),\lim_{x\to+\infty}A(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R.$$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της $\mathbf{A^{-1}(x)}$ είναι το $\mathbf{R}$.

Είναι $\mathbf{f^3(x)+3f(x)=x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

$\mathbf{A\big(f(x)\big)=x\Leftrightarrow f(x)=A^{-1}(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Οπότε το πεδίο τιμών της $\mathbf{f}$ είναι το πεδίο τιμών της $\mathbf{A^{-1}(x)}$ δηλαδή το πεδίο ορισμού της $\mathbf{A(x)}$ που είναι το $\mathbf{R}$

Οπότε θέτουμε $\mathbf{f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y)}$ στην δοσμένη, άρα $\mathbf{f^{-1}(x)=x^3+3x, x\in R}$.

☑ **Β΄ τρόπος**

Αν $\mathbf{y_o\in R}$ τότε για $\mathbf{x_o=y_o{}^3+3y_o}$ θα ισχύει

$$f^3(x_0)+3f(x_0)=x_0=y_0^3+3y_0\Leftrightarrow f^3(x_0)-y_0^3+3f(x_0)-3y_0=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\big(f(x_0)-y_0\big)\big(f^2(x_0)+f(x_0)y_0+y_0{}^2\big)+3\big(f(x_0)-y_0\big)=0\Leftrightarrow$$

$$\big(f(x_0)-y_0\big)\big(f^2(x_0)+f(x_0)y_0+y_0{}^2+3\big)=0.$$

Άρα ή $\mathbf{f(x_0)=y_0}$ ή $\mathbf{f^2(x_0)+f(x_0)y_0+y_0{}^2+3=0}$ η οποία είναι αδύνατη γιατί $\mathbf{\Delta=-3y_0{}^2-12<0}$. Άρα $\mathbf{f(x_0)=y_0}$ οπότε το πεδίο τιμών της $\mathbf{f}$ είναι το $\mathbf{R}$.

Οπότε θέτουμε $\mathbf{f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y)}$ στη δοσμένη, άρα $\mathbf{f^{-1}(x)=x^3+3x, x\in R}$.

☑ **Γ΄ τρόπος**

Έστω $\mathbf{y_o\in R}$. Θα αποδείξουμε ότι αν θέσουμε $\mathbf{x_0=y_o{}^3+3y_o}$, τότε $\mathbf{f(x_o)=y_o}$.

Πραγματικά , επειδή $\mathbf{A\big(f(x)\big)=x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$, έχουμε :

$$x_0=y_o{}^3+3\Leftrightarrow A(f(x_0))=A(y_o)\Leftrightarrow f(x_0)=y_o$$

διότι η συνάρτηση $\mathbf{A}$ είναι $\mathbf{1-1}$..

Να σημειώσουμε ότι η επιλογή $\mathbf{x_0 = y_o{}^3 + 3y_o}$ είναι απολύτως δικαιολογημένη, αφού οι συναρτήσεις $\mathbf{f, A}$ αναμένουμε να είναι αντίστροφες .Άρα το σύνολο τιμών της $\mathbf{f}$ είναι το $\mathbf{R}$.

Έτσι ,για κάθε $\mathbf{y \in R}$, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x \in R}$, ώστε $\mathbf{f(x) = y.}$

Η δοσμένη λοιπόν σχέση δίνει ότι :

$\mathbf{f^3(x) + 3f(x) = x \Leftrightarrow y^3 + 3y = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + 3y}$ για κάθε $\mathbf{y \in R,}$

δηλαδή $\mathbf{f^{-1}(x) = x^3 + 3x, x \in R.}$

Ε3. Για $\mathbf{x = 0}$ στη δοθείσα ισότητα προκύπτει ότι
$\mathbf{f(0)(f^2(0) + 3) = 0 \Rightarrow f(0) = 0,}$ αφού $\mathbf{f^2(0) + 3 \neq 0.}$
Οπότε για $\mathbf{x > 0}$ αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει $\mathbf{f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0}$ και για $\mathbf{x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0}$ και η $\mathbf{f}$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Ε4. Παραγωγίζοντας την αρχική ισότητα προκύπτει ότι $\mathbf{3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 1}$ και επειδή η $\mathbf{f}$ δύο φορές παραγωγίσιμη παραγωγίζοντας την ισότητα πάλι έχουμε ότι $\mathbf{6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) + 3f''(x) = 0}$ απ΄ όπου λύνοντας ως προς $\mathbf{f''(x)}$ έχουμε ότι $\mathbf{3(f^2(x) + 1)f''(x) = -6f(x)(f'(x))^2}$. Επειδή $\mathbf{3(f^2(x) + 1) > 0}$ έχουμε ότι $\mathbf{f''(x) = -\dfrac{6f(x)(f'(x))^2}{3(f^2(x) + 1)}}$ (1) που για $\mathbf{x = 0}$ είναι $\mathbf{f''(0) = -\dfrac{6f(0)(f'(0))^2}{3(f^2(0) + 1)} = 0}$ αφού $\mathbf{f(0) = 0}$ από **(Ε3)** και ακόμη επειδή λόγω **(Ε3)** για $\mathbf{x > 0}$ ισχύει $\mathbf{f(x) > 0}$ και για $\mathbf{x < 0}$ ισχύει $\mathbf{f(x) < 0}$ θα ισχύουν $\mathbf{f''(x) < 0,\ \ x \in (-\infty,\ 0)}$ που σημαίνει ότι $\mathbf{f}$ είναι κοίλη στο $\mathbf{(-\infty,\ 0]}$ και $\mathbf{f''(x) > 0,\ \ x \in (0,\ +\infty)}$ που σημαίνει ότι η $\mathbf{f}$ είναι κυρτή στο $\mathbf{[0,\ +\infty)}$, άρα το σημείο $\mathbf{O(0,\ 0)}$ είναι σημείο καμπής της $\mathbf{f}$ και μάλιστα μοναδικό.

Ε5. Αρκεί να δείξω ότι $\mathbf{\dfrac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} > \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}}$ **(3).**

Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[0, \alpha]}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0, \alpha)}$ και από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\mathbf{\xi_1 \in (0, \alpha),\ \ f'(\xi_1) = \dfrac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0}}$ και από **Θ.Μ.Τ.** στο $\mathbf{[\alpha, \beta]}$ θα υπάρχει

$\mathbf{\xi_2 \in (\alpha, \beta),\ \ f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}}$.

Είναι $\mathbf{\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} > \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}}$ που είναι το ζητούμενο.

Ε6. **α).** Είναι $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{1}{3f^2(x)+3}-1=\dfrac{1-3f^2(x)-3}{3f^2(x)+3}=\dfrac{-3f^2(x)-2}{3f^2(x)+3}<0.$

Άρα ισχύει $g'(x)<0,\ x\in\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β). Έχουμε ισοδύναμα ότι $f(x^2-x)+x<x^2 \Leftrightarrow f(x^2-x)-(x^2-x)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x^2-x)<g(0) \Leftrightarrow x^2-x>0$ (αφού η g είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$)

απ' όπου τελικά έχουμε ότι $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 76

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$e^y f'(x)-2xe^y=f'\left(\dfrac{x}{e^y}\right)-\dfrac{2x}{e^y}$ για κάθε $x>0$ και y πραγματικό ,καθώς και

$f'(1)=-6, f(1)=3.$

Ε1. Να βρείτε την $f'(x)$ για $x>0$.

Ε2. Να βρείτε την $f(x)$ στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Να βρείτε το ελάχιστο της f.

Ε4. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$.

Ε5. Αν για τους θετικούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha\beta\gamma=1$ και $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{10}{3}$, να δείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>1$.

Πηγή: <u>Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)</u>

Λύση

Ε1. Η δοθείσα για $x=1, y=-\ln x$ για θετικά x δίνει:

$$-6e^{-\ln x}-2e^{-\ln x}=f'\left(\frac{1}{e^{-\ln x}}\right)-\frac{2}{e^{-\ln x}} \overset{e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}}{\Rightarrow} f'(x)=2x-\frac{8}{x}, x>0.$$

Ε2. Είναι $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=\left(x^2-8\ln x\right)' \Leftrightarrow f(x)=x^2-8\ln x+c, x>0$

και αφού $f(1)=3$ είναι τελικά $c=2$ και $f(x)=x^2-8\ln x+2, x>0.$

Ε3. .Είναι

$$f'(x)=\frac{2(x^2-4)}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}, x>0$$

και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της f' για $x\in[2,+\infty)$ η f είναι γνήσια αύξουσα και για $x\in(0,2]$ η f είναι γνήσια φθίνουσα και άρα έχει ολικό ελάχιστο στο $x=2$ το $f(2)=6-8\ln 2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x-2		-		-	‖	-	0	+	
x+2		-	0	+	‖	+		+	
$f'(x)$		+		-	‖	-	0	+	
$f(x)$					‖	↘	Τ.ε	↗	

Ε4. Παραγωγίζοντας την $f'(x)=2x-\frac{8}{x}$, $x>0$ έχουμε ότι $f''(x)=2+\frac{8}{x^2}>0$, άρα η f κυρτή και η εφαπτομένη στο $A(1,f(1))$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλαδή $y=-6x+9$.

Ε5. Επειδή η f είναι κυρτή τα σημεία του γραφήματος της είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής άρα εδώ θα ισχύει

$y_{f(x)}\geq y_{\varepsilon\phi}\Rightarrow f(x)\geq -6x+9$, $x\in R$ και εφαρμόζοντας την για $x=\alpha,\beta,\gamma$

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)\geq -6\alpha+27 \\ f(\beta)\geq -6\beta+27 \\ f(\gamma)\geq -6\gamma+27 \end{array}\right| \oplus$$

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq -6(\alpha+\beta+\gamma)+27\Rightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 8\left(\ln\alpha+\ln\beta+\ln\gamma\right)+1=8\ln(\alpha\beta\gamma)+1=1.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής άρα θα πρέπει: $\alpha=\beta=\gamma=1$ που είναι αδύνατο λόγω του αθροίσματος των τριών άρα: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>1$.

ΘΕΜΑ 77

Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς

Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ που είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα, για την οποία ισχύει ότι $f(x)+f(f(x))=2x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Ε1. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για $x\in[0,+\infty)$ και ότι $f(0)=0$.

Ε2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{f(x)}}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(x)-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$..

Ε3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$..

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Επειδή $\mathbf{f}$ έχει πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ για να ορίζεται η $\mathbf{f(f(x))}$ στο $[0,+\infty)$ πρέπει αναγκαία και $\mathbf{f(x)\geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,+\infty)}$.

Τώρα από $\mathbf{f(0)+f(f(0))=0}$ επειδή $\mathbf{f(0)\geq 0}$ και $\mathbf{f(f(0))\geq 0}$ αναγκαία θα ισχύει $\mathbf{f(0)=0}$ και $\mathbf{f(f(0))=0}$ άρα $\mathbf{f(0)=0}$.

Ε2. Αρκεί να δείξουμε ισοδύναμα ότι η εξίσωση $\mathbf{e^x(f(x)-1)+f^2(x)=0}$ έχει ρίζα στο $\mathbf{(0,1)}$.

Έτσι θεωρώντας την $\mathbf{g(x)=e^x(f(x)-1)+f^2(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,1]}$ είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών και ισχύει
$\mathbf{g(0)=f(0)-1+f^2(0)=-1<0}$ και $\mathbf{g(1)=e(f(1)-1)+f^2(1)}$.
Τώρα αν $\mathbf{f(1)\neq 1}$ θα είναι $\mathbf{f(1)<1}$ ή $\mathbf{f(1)>1}$ και αν ισχύει $\mathbf{f(1)<1}$ τότε επειδή $\mathbf{f}$ γνήσια αύξουσα θα ισχύει $\mathbf{f(f(1))<f(1)}$ και επειδή από υπόθεση
$\mathbf{f(1)+f(f(1))=2\Leftrightarrow f(f(1))=2-f(1)}$ θα ισχύει
$\mathbf{2-f(1)<f(1)\Leftrightarrow 2<2f(1)\Leftrightarrow 1<f(1)}$ που είναι ***άτοπο***. .
Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν $\mathbf{f(1)>1}$ επομένως αναγκαία $\mathbf{f(1)=1}$ και τότε
$\mathbf{g(1)=f^2(1)>0}$.. Άρα $\mathbf{g(0)g(1)<0}$ και σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano**
η $\mathbf{g(x)=0}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbf{(0,1)}$.

Ε3. Επειδή η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{1}$ και $\mathbf{f(1)=1}$ άρα η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη και στο $\mathbf{f(1)}$ η $\mathbf{h(x)=f(x)+f(f(x))}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{1}$ με

$\mathbf{h'(1)=f'(1)+f'(f(1))f'(1)=f'(1)+f'(1)f'(1)=f'(1)+(f'(1))^2}$ και αφού
$\mathbf{h(x)=2x}$ και $\mathbf{h'(x)=2}$ θα είναι $\mathbf{h'(1)=2}$. Επομένως
$\mathbf{f'(1)+(f'(1))^2=2\Leftrightarrow(f'(1))^2+f'(1)-2=0}$ απ' όπου έχουμε ότι
$\mathbf{f'(1)=1, f'(1)=-2}$ και επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα, η παράγωγος θα είναι μη αρνητική σε κάθε σημείο, θα είναι $\mathbf{f'(1)=1}$ έτσι η εφαπτόμενη στο $\mathbf{(1,f(1))}$ θα είναι η $\mathbf{y=x}$.

ΘΕΜΑ 78

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g:(0,+\infty)\to R}$, όπου η f είναι παραγωγίσιμη, με $\mathbf{f(1)=-1}$ και $\mathbf{f(e)=0}$, ώστε να ισχύει $\mathbf{e^{f'(x)}=x+ce^{g(x)}}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$ όπου ,$\mathbf{c\in R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{\Phi(x)=f(x)+x-x\ln x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο διάστημα $\mathbf{[1,e]}$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ, ώστε $f'(\xi)=\ln\xi$.

Ε3. Να βρείτε τη σταθερά c.

Ε4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση

Ε1.

- Η Φ συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών και
- Η Φ παραγωγίσιμη $[1,e]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

  $$\Phi'(x)=f'(x)+1-\ln x-x\frac{1}{x}=f'(x)-\ln x.$$

- $\Phi(1)=-1+1-0=0$

  $\Phi(e)=0+e-e=0$

άρα η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του **Rolle** οπότε υπάρχει $\xi\in(1,e):\Phi'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\ln\xi=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\ln\xi.$

Ε2. Άμεση συνέπεια του ερωτήματος **(Ε1).**

Ε3. . Για κάθε $x>0$ ισχύει $e^{f'(x)}=x+ce^{g(x)}$, όπου $c\in\mathbb{R}$, οπότε και για το ξ του ερωτήματος **(Ε2)** θα ισχύει

$e^{f'(\xi)}=\xi+ce^{g(\xi)}\Leftrightarrow e^{\ln\xi}=\xi+ce^{g(\xi)}\Leftrightarrow \xi=\xi+ce^{g(\xi)}\Rightarrow c=0$ αφού $e^{g(\xi)}>0.$

Ε4. .Από το **(Ε3)** έχουμε $e^{f'(x)}=x$ ή $f'(x)=\ln x=(x\ln x-x)',x>0$ όποτε $f(x)=x\ln x-x+c,x>0$ και επειδή $f(1)=-1$ παίρνουμε $c=0$ άρα $f(x)=x\ln x-x,x>0.$

ΘΕΜΑ 79

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}},x\in\mathbb{R}^*$.

Ε1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Ε3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{1}{x}}=\frac{\alpha}{x}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ε5. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

Πηγή: Α.Μπάρλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση

Ε1. Ή συνάρτηση $e^{\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ ως σύνθεση των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x και $\frac{1}{x}$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=(xe^{1/x})'=e^{1/x}\frac{x-1}{x}, x\neq 0.$$

Επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ενώ για $x=0$ δεν ορίζεται η f', οπότε έχουμε τον παραπάνω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f απ' όπου

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e Ο.ε	$\nearrow$	$+\infty$

- ☑ για $x\in(-\infty,0)$, η f γνησίως αύξουσα ,
- ☑ για $x\in(0,1]$, η f γνησίως φθίνουσα ,
- ☑ για $x\in[1,+\infty)$, η f γνησίως αύξουσα.

Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1)=1\cdot e^{\frac{1}{1}}=e$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{u\to 0} e^u=1$ άρα η συνάρτηση παίρνει και τιμές μικρότερες του $f(1)=1\cdot e^{\frac{1}{1}}=e$ επομένως το ακρότατο της συνάρτησης στο $x=1$ είναι τοπικό.

Ε2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=e^{1/x}\frac{1}{x^3},$$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$,

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
$e^{1/x}$		$+$	‖	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.κ	$\smile$	

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,0)$.

Ε3. Έχουμε $A=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1/x}}{1/x} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1/x}(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}=+\infty$

$B=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\cdot 0=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και $\lim\limits_{u\to -\infty} e^u=0$

$C=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{u\to 0} e^u=1$

$D=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{u\to 0} e^u=1$

☑ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta 1=(-\infty,0)$ άρα $f(\Delta_1)=(D,B)=(-\infty,0)$.

☑ Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta 2=(0,1]$ άρα $f(\Delta_2)=[e,A)=[e,+\infty)$.

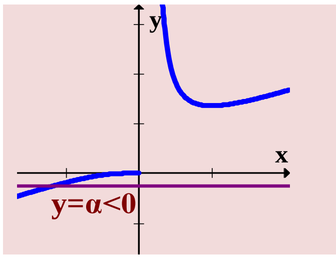
☑ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta 3=[1,+\infty,0)$ άρα $f(\Delta_3)=[e,C)=[e,+\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$.

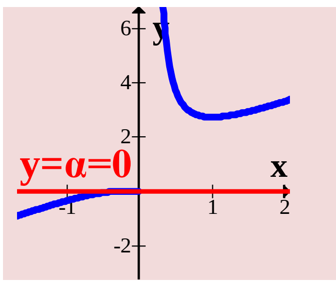
Ε4. Η εξίσωση $e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\alpha}{x}$ ορίζεται για $x\neq 0$ και ισοδύναμα γράφεται $f(x)=\alpha$.

Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$. Όταν το α μεταβάλλεται η ευθεία μετατοπίζεται παράλληλα του xx' άξονα. Έτσι το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την $y=\alpha$ είναι όσο και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ έτσι

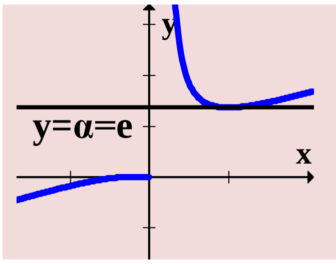
☑ όταν $\alpha<0$ τότε η εξίσωση έχει 1 λύση.



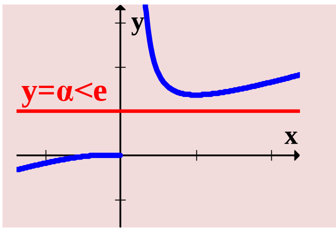
☑ όταν $\alpha=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.



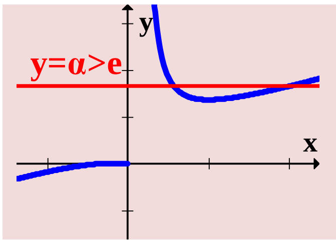
☑ όταν $\alpha = e$ η εξίσωση έχει μία λύση.



☑ όταν $0<\alpha<e$ η εξίσωση είναι αδύνατη.



☑ όταν $\alpha > e$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις.



Ε5. Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\frac{1}{x}\cdot e^x-\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\frac{xe^x-\ln(x+1)}{x^2}$.

Οπότε

$$\lim_{x\to 0}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x-\ln(x+1)}{x^2}\right)\overset{(0/0)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\frac{1}{x+1}}{2x}\overset{(0/0)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x+\frac{1}{(x+1)^2}}{2}=3/2.$$

ΘΕΜΑ 80

Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ και ικανοποιεί τη συνθήκη $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=-10x_0e^{f(x_0)}$ για κάθε $x_0\in R$ τότε

Ε1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

Ε3. Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής .

Πηγή: Γ. Κομπότης (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

Λύση

Ε1. Έχουμε $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in R$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}\overset{(*)}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{\frac{u}{3}}=3\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=3f'(x_0)$$

και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\overset{(**)}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{\frac{-u}{2}}=-2\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=-2f'(x_0).$$

(*) Θέτω $3h=u$, τότε $\lim\limits_{h\to 0}u=\lim\limits_{h\to 0}3h=0$.

(**) Θέτω $-2h=u$, τότε $\lim\limits_{h\to 0}u=\lim\limits_{h\to 0}(-2h)=0$

Οπότε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\right)=$$

$$=3f'(x_0)-(-2f'(x_0))=5f'(x_0).$$

Επομένως $5f'(x_0)=-10x_0e^{f(x_0)}\Leftrightarrow f'(x_0)=-2x_0e^{f(x_0)}$.

Άρα η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2xe^{f(x)}$.

Οπότε,

$$f'(x)=-2xe^{f(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{e^{-f(x)}}\Rightarrow f'(x)e^{-f(x)}=-2x\Rightarrow\left(e^{-f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow e^{-f(x)}=x^2+c.$$

Για $x=0$ έχουμε $e^{-f(0)}=c\Rightarrow e^0=c\Rightarrow c=1.$

Συνεπώς

$$e^{-f(x)}=x^2+1\Leftrightarrow\ln e^{-f(x)}=\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow -f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow f(x)=-\ln(x^2+1)$$

που επαληθεύει την αρχική δοθείσα ισότητα.

Ε2. .Είναι $f(x)=-\ln(x^2+1), x\in R.$

Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}, x\in R.$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	+	0	-
x^2+1	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	Ο.μ	↘

Άρα από το διπλανό πίνακα f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

και έχει ολικό μέγιστο το $f(0)=0.$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Επομένως η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$.

Ενώ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[-1,1]$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	
$(x^2+1)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		⤻	Σ.κ	⋂	Σ.κ	⤻	

Ε3. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής στα $A(-1,-\ln 2)$ και $B(1,-\ln 2)$.

ΘΕΜΑ 81 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2, x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρεθούν f' και f''.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Ε4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε το πρόσημο της f.

Ε6. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Πηγή: Σημειώσεις Μπ.Στεργίου με τίτλο Γενικά Θέματα στην Κατεύθυνση της Γ΄(21/5/2008)

Λύση

Ε1. Έχουμε $f(x)=(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2, x\in\mathbb{R}$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=e^{-x}-(x-2)e^{-x}+4x-3=e^{-x}(3-x)+4x-3, x\in\mathbb{R}$.

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=-e^{-x}(3-x)-e^{-x}+4=-e^{-x}(4-x)+4=-\frac{4-x}{e^x}+4=\frac{x-4+4e^x}{e^x}.$$

Ε2. Είναι $f''(x)=\dfrac{x-4+4e^x}{e^x}=\dfrac{A(x)}{e^x}$.

Θεωρούμε $A(x)=x-4+4e^x, x\in\mathbb{R}$ με προφανή ρίζα την $x=0$.

Είναι $A'(x)=1+4e^{x}>0, x\in R$ οπότε η $A(x)$ γνησίως αύξουσα .

Άρα η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική οπότε η συνεχής συνάρτηση $A(x)$ διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Επομένως , αφού για $x=-1, A(-1)=-1-4+4e^{-1}<0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$ θα ισχύει $f''(x)<0$. Ενώ αφού για $x=4, A(4)=4-4+4e^{4}=4e^{4}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ θα ισχύει $f''(x)>0$.

Συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και τα κοίλα άνω στο $[0,+\infty)$.
Και παρουσιάζει σημείο καμπής το $O(0,f(0))=(0,0)$.

Ε3. Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $f''(x)>0$, επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0$ δηλαδή
$f'(x)>0,\ \ x\in(-\infty,\ 0)$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$.
Ενώ επειδή για κάθε $x\in(-\infty,0)$ έχουμε $f''(x)<0$, θα είναι η f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, οπότε για $x<0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0$ δηλαδή $f'(x)>0,\ \ x\in(0,\ +\infty)$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο R.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R δεν έχει ακρότατα.

Ε4. Επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο R και συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το $f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι τώρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)e^{-x}+2x^{2}-3x+2\right)=+\infty,$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{e^{x}}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x}}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^{2}-3x+2\right)=+\infty.$

Ενώ

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-2)e^{-x}+2x^{2}-3x+2\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^{-x}\left(1+\frac{2x^{2}-3x+2}{(x-2)e^{-x}}\right)=-\infty.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-2)e^{-x}\right)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+2}{(x-2)e^{-x}}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{e^{-x}+(x-2)e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{(x-1)e^{-x}}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{e^{-x}+(x-1)e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{xe^{-x}}=0.$$

Συνεπώς η f έχει σύνολο τιμών το $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)),\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))\right)=(-\infty,+\infty).$

Ε5. Έχουμε $f(0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0.$

Έχουμε για $x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0$ άρα $f(x)>0,\quad x\in(0,\ +\infty).$

Ενώ για $x<0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(0)=0$ άρα $f(x)<0,\quad x\in(-\infty,\ 0).$

Ε6. Επειδή η f είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=+\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\frac{2}{e^x x}+2x-3+\frac{2}{x}\right)=+\infty.$$

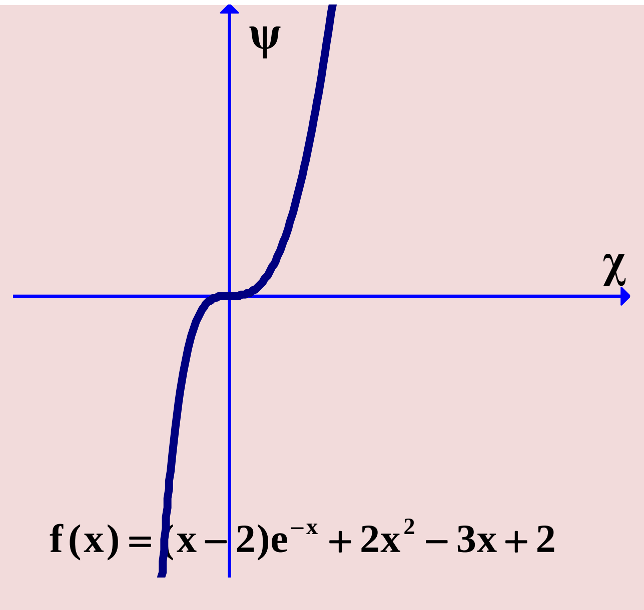
Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-2)e^{-x}+2x^2-3x+2}{x}\right)\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left((3-x)e^{-x}+4x-3\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left[(3-x)+\frac{4x}{e^{-x}}-\frac{3}{e^{-x}}\right]\right]=+\infty,$$



διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x}{e^{-x}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{-e^{-x}}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{e^{-x}}\right)=0.$

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 82

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x-1$.

Ε1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Ε2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της

Ε3. εξίσωσης $e^x(x-1)=e^x\alpha-1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Ε4. Να δείξετε ότι $e^{-x}<1-x+\dfrac{x^2}{2}, x>0$.

Ε5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(x^2)+\ln x$.

Λύση

Ε1. Είναι $f(x)=e^{-x}+x-1, x\in\mathbb{R}$. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -e^{-x}+1=0\Leftrightarrow -e^{-x}=-1\Leftrightarrow e^{-x}=e^0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow -e^{-x}+1>0\Leftrightarrow -e^{-x}>-1\Leftrightarrow e^{-x}<e^0\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow x>0.$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$.

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε $f(x)>0$ και η f έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Ε2. Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right)\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-e^{-x}}{1}\right)=-\infty.$

Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}+1\right)\right]=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)=+\infty.$

Έτσι για το $A_1=(-\infty,0]$, επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής, θα ισχύει ότι $f(A_1)=[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[0,+\infty)$.

Και για το $A_2=[0,+\infty)$, επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής, θα ισχύει ότι $f(A_2)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[0,+\infty)$.

Οπότε η $\mathbf{f}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{f(R)=f(A_1)\cup f(A_2)=[0,+\infty)}$

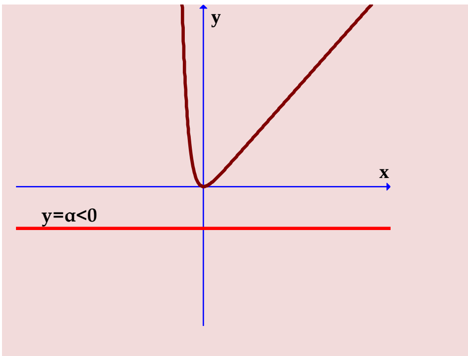
Τώρα, η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$\mathbf{e^x(x-1)=\alpha e^x-1\Leftrightarrow x-1=\alpha-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow x-1=\alpha-e^{-x}\Leftrightarrow}$$

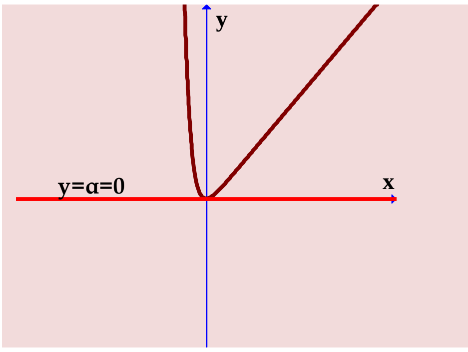
$$\mathbf{\Leftrightarrow e^{-x}+x-1=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha\quad (1).}$$

Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις σύμφωνα με το σύνολο τιμών

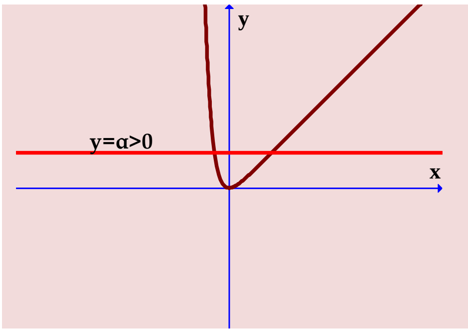
- 1η περίπτωση: Για $\mathbf{\alpha<0}$, η $\mathbf{(1)}$ είναι αδύνατη.



- 2η περίπτωση: Για $\mathbf{\alpha=0}$, η $\mathbf{(1)}$ έχει λύση την $\mathbf{x=0}$.



- 3η περίπτωση: Για $\mathbf{\alpha>0}$, η $\mathbf{(1)}$ έχει δύο λύσεις.



Ε3. Θεωρούμε την $\mathbf{h(x)=e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2},x\in R.}$

Η $\mathbf{h}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{h'(x)=-e^{-x}+1-x=-f(x)}$.

Από το πρώτο ερώτημα, γνωρίζουμε ότι για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε $\mathbf{f(x)>0.}$

Επομένως για κάθε $\mathbf{x>0}$ ισχύει $\mathbf{h'(x)<0}$, επειδή η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[0,\ +\infty)}$, θα ισχύει οτι η $\mathbf{h}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[0,+\infty)}$. Οπότε για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε

$$\mathbf{h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}<0\Leftrightarrow e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}.}$$

Ε4. Η εξίσωση $f(x)=f(x^2)+\ln x$ (2), ορίζεται για $x>0$ έχει προφανή λύση την $x=1$.

- Για $0<x<1$ έχουμε $0<x^2<x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x^2)<f(x)$. Ακόμα για $0<x<1$ έχουμε $\ln x<0$, οπότε για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε $f(x^2)+\ln x<f(x)$.
- Για $x>1$, έχουμε $1<x<x^2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x^2)$. Επίσης για $x>1$ έχουμε $\ln x>0$, οπότε για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)<f(x^2)+\ln x$.

Συνεπώς η (2) έχει μοναδική λύση, την προφανή $x=1$.

Β΄ τρόπος

$$f(x)=f(x^2)+\ln x \Leftrightarrow f(x)+\ln x=f(x^2)+2\ln x$$
$$\Leftrightarrow f(x)+\ln x=f(x^2)+\ln x^2 \Leftrightarrow g(x)=g(x^2)$$

όπου $g(x)=f(x)+\ln x$ με $x\in(0,+\infty)$

Έστω $0<x_1<x_2 \underset{\ln x\nearrow(0,+\infty)}{\overset{f\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}} \begin{matrix} f(x_1)<f(x_2) \\ \ln x_1<\ln x_2 \end{matrix} \overset{\oplus}{\Rightarrow} f(x_1)+\ln x_1<f(x_2)+\ln x_2$

$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε και $1-1$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $g(x)=g(x^2) \overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow} x=x^2 \overset{x\in(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x=1$.

ΘΕΜΑ 83

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$.

Ε1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $A(0,1)$ εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της $g(x)$.

Ε2. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha\in(-1,0)$, τέτοιο ώστε $e^\alpha+2\alpha+1=0$.

Ε3. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$, να δείξετε ότι :

α. $h(x)\ge\alpha^2-\alpha-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\in(-1,0)$.

β. Η εξίσωση $h(x)=2012$ έχει ακριβώς δυο λύσεις .

Λύση

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A είναι της μορφής

$(\varepsilon_1): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1$.

Έστω τώρα σημείο της g $B(x_0,g(x_0))$ που είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-2x-1$.

Για να εφάπτεται η ε_1 στο **B** πρέπει και αρκεί $\mathbf{g(x_0)=x_0+1}$ και $\mathbf{g'(x_0)=1}$. Δηλαδή $\mathbf{-x_0^2-x_0=x_0+1}(1)$ και $\mathbf{-2x_0-1=1\Leftrightarrow x_0=-1}$ που επαληθεύει και την (1) άρα $\mathbf{B(-1,0)}$.

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{A(x)=e^x+2x+1}$.

Η $\mathbf{A(x)}$ συνεχής στο $\mathbf{[-1,0]}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων ακόμη

$$\mathbf{A(0)=2>0}$$

$$\mathbf{A(-1)=e^{-1}-1<0.}$$

Άρα η **A** ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος **Bolzano** στο διάστημα $\mathbf{[-1,0]}$.

Επομένως, υπάρχει $\mathbf{\alpha\in(-1,0)}$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{A(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{\alpha}+2\alpha+1=0\ (2)}$. Επειδή τώρα η $\mathbf{A(x)=e^x+2x+1}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{A'(x)=e^x+2>0}$ είναι γνησίως αύξουσα και το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι μοναδική ρίζα της.

Ε3.

α) Η $\mathbf{h(x)=e^x+x^2+x}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{h'(x)=e^x+2x+1}$ και

$$\mathbf{h''(x)=e^x+2>0.}$$

Από **(2)** είναι $\mathbf{h'(\alpha)=0}$.

x	-∞	α	+∞
$h''(x)$	+		+
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	τ.ε	↗

Η $\mathbf{h'}$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε προκύπτει ότι η **h** παρουσιάζει στο $\boldsymbol{\alpha}$ ολικό ελάχιστο.Δηλαδή

$$\mathbf{h(x)\ge h(\alpha)\Leftrightarrow h(x)\ge e^{\alpha}+\alpha^2+\alpha \overset{e^{\alpha}+2\alpha+1=0}{\Leftrightarrow} h(x)\ge -1-2\alpha+\alpha^2+\alpha\Leftrightarrow h(x)\ge\alpha^2-\alpha-1.}$$

Επομένως, $\mathbf{h(x)\ge\alpha^2-\alpha-1,\ x\in R.}$

β) Είναι $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2+x\right)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x^2+x\right)=+\infty}$ αφού $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty}$. Ακόμη

$$\mathbf{h(\alpha)=e^{\alpha}+\alpha^2+\alpha \overset{e^{\alpha}+2\alpha+1=0}{=} -1-2\alpha+\alpha^2+\alpha=\alpha^2-\alpha-1.}$$

Θέτω $\mathbf{\kappa(\alpha)=\alpha^2-\alpha-1}$ με $\mathbf{\alpha\in[-1,0]}$

Η συνάρτηση $\boldsymbol{\kappa}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[-1,0]}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{\kappa'(\alpha)=2\alpha-1<0}$ όταν $\mathbf{\alpha\in[-1,0]}$.

Η συνάρτηση $\mathbf{k}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$

συνεπώς για $-1<\alpha<0 \Rightarrow k(-1)>k(\alpha)>k(0) \Rightarrow 1>\alpha^2-\alpha-1>-1$.

- $h((-\infty,\alpha]) \overset{h\searrow}{=} \left[\lim\limits_{x\to\alpha} h(x), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right) = \left[\alpha^2-\alpha-1,+\infty\right)$ το $2012 \in \left[\alpha^2-\alpha-1,+\infty\right)$, άρα για τη συνεχή συνάρτηση $\mathbf{h}$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty,\alpha]$ (αφού η $h\searrow$) τέτοιο ώστε $h(x_1)=2012$.
- $h((\alpha,+\infty]) \overset{h\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to\alpha} h(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right) = \left(\alpha^2-\alpha-1,+\infty\right)$ το $2012 \in \left(\alpha^2-\alpha-1,+\infty\right)$, άρα για τη συνεχή συνάρτηση $\mathbf{h}$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (\alpha,+\infty)$ (αφού η $h\nearrow$) τέτοιο ώστε $h(x_2)=2012$.

ΘΕΜΑ 84

Προτείνει ο Νίκος Αλεξανδρόπουλος

Έστω συνάρτηση f με $f(x)=2e^x+\eta\mu 2x+ex$.

Ε1. Να προσδιορισθεί το σύνολο τιμών της f.

Ε2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=-2$ έχει μοναδική λύση.

Λύση

Ε1. Α΄ τρόπος

Ισχύει ότι $-1 \le \eta\mu(2x) \le 1 \Leftrightarrow 2e^x+ex-1 \le f(x) \le 2e^x+ex+1$.

Αν $g(x)=2e^x+ex-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x+ex-1)=+\infty$, οπότε από το ότι

$$0<g(x)\le f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)} \ge \frac{1}{f(x)},$$ δηλαδή $0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{g(x)}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=0$,

από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ αφού η $f(x)>0$ στο $+\infty$.

Επίσης αν $h(x)=2e^x+ex+1$, θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x+ex+1)=-\infty$ και επειδή ισχύει ότι $f(x)\le h(x)<0$ στο $-\infty$ με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και αφού η f συνεχής στο $\mathbf{R}$ σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα είναι $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

Β΄ τρόπος

Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ και είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbf{R}$ με $f'(x)=2e^x+2\sigma\upsilon\nu 2x+e$.

Ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, αφού $e^x>0$ και $-1\le\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow -2\le 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 0<e-2\le e+2\sigma\upsilon\nu x$.

Δηλαδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R και επιπλέον συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

Συνεπώς $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x+\eta\mu 2x+ex\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(2\frac{1}{x}e^x+\frac{1}{x}\eta\mu 2x+e\right)\right)=-\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}e^x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu 2x\right)=0$ από κριτήριο παρεμβολής αφού

$-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Τέλος $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x+\eta\mu 2x+ex\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(2\frac{1}{x}e^x+\frac{1}{x}\eta\mu 2x+e\right)\right)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ με **Hospital** και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu 2x\right)=0$ από κριτήριο παρεμβολής αφού $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Ε2. Επειδή $-2\in f(R)=R$ και f συνεχής στο R θα υπάρχει $x_0\in R$ ώστε $f(x_0)=-2.$ Επειδή τώρα η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=2e^x+2\sigma\upsilon\nu 2x+e$ και ισχύει ότι $-2\le 2\sigma\upsilon\nu 2x\le 2\Leftrightarrow e-2\le e+2\sigma\upsilon\nu 2x\le e+2$ και αφού $2e^x>0, x\in R$ θα είναι $f'(x)>0, x\in R.$ Άρα το x_0 είναι μοναδικό , αφού η $f(x)$ γνησίως μονότονη.

ΘΕΜΑ 85 — Προτείνει ο Χάρης Γ. Λάλας

Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha\in R_+^*$, να δειχθεί ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{2\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Λύση

Είναι

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{\alpha}f(\alpha)+\sqrt{\alpha}f(\alpha)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}\left(f(x)-f(\alpha)\right)-f(\alpha)\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)}{x-\alpha}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\sqrt{\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-f(\alpha)\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}{(x-\alpha)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\sqrt{\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-f(\alpha)\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right)=\sqrt{\alpha}f'(\alpha)-f(\alpha)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Β΄τρόπος

Θέτω $g(x)=\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{x}f(\alpha)$, προφανώς $g(\alpha)=0$

η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη **μόνο** στο $x_0=\alpha$ ως πράξεις των παραγωγίσιμων στο $x_0=\alpha$ συναρτήσεων με παράγωγο **μόνο** για $x_0=\alpha$

$$g'(x_0)=\sqrt{\alpha}f'(x_0)-\frac{f(\alpha)}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow g'(\alpha)=\sqrt{\alpha}f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}=2\sqrt{\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}f'(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}-\frac{f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{2\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{x-\alpha}\overset{g(\alpha)=0}{=}\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha)=\dfrac{2\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$

Γ΄τρόπος

Έχουμε πως $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$

Θέτω $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=g(x),x\neq\alpha$

άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=f'(\alpha)$ και $f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)g(x)\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)g(x)+f(\alpha)$

οπότε $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{\alpha}f(x)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{\alpha}\left((x-\alpha)g(x)+f(\alpha)\right)-\sqrt{x}f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\sqrt{\alpha}(x-\alpha)g(x)}{x-\alpha}+\frac{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}\right)f(\alpha)}{x-\alpha}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\sqrt{\alpha}g(x)-\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)f(\alpha)}{\sqrt{x}^2-\sqrt{\alpha}^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\sqrt{\alpha}g(x)-\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)f(\alpha)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\sqrt{\alpha}g(x)-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$=\sqrt{\alpha}f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}=2\sqrt{\alpha}\frac{\sqrt{\alpha}f'(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}-\frac{f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{2\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}.$$

ΘΕΜΑ 86

Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα ώστε να ισχύει $\ln(f(x))=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ε2. Να δείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f(1))^x+(f(2))^x+(f(3))^x}{(f(4))^x-(f(2))^x+(f(3))^x}=0,$

β. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(1))^x+(f(2))^x+(f(3))^x}{(f(4))^x-(f(2))^x+(f(3))^x}=-\infty.$

Ε3. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(f(1))^x-f(1)}{x-1}=2g(1)$ με $f(1)\neq1,$ να δείξετε ότι $g(1)=\ln2.$

Ε4. Αν $f(1)=2$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2012.$

Λύση

Ε1. .Αρχικά, για να ορίζεται η g, πρέπει $f(x)>0,\ \ x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow\ln(f(x_1)<\ln(f(x_2))\overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2).$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ε2. **α.** Έχουμε οτι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(1)<f(2)<f(3)<f(4).$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(1))^x+(f(2))^x+(f(3))^x}{(f(4))^x-(f(2))^x+(f(3))^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(3))^x\left[\left(\dfrac{f(1)}{f(3)}\right)^x+\left(\dfrac{f(2)}{f(3)}\right)^x+1\right]}{(f(4))^x\left[1-\left(\dfrac{f(2)}{f(4)}\right)^x+\left(\dfrac{f(3)}{f(4)}\right)^x\right]}=0,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(3)}{f(4)}\right)^x=0$,αφού $\dfrac{f(3)}{f(4)}<1,$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(1)}{f(3)}\right)^x+\left(\frac{f(2)}{f(3)}\right)^x+1\right]=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[1-\left(\frac{f(2)}{f(4)}\right)^x+\left(\frac{f(3)}{f(4)}\right)^x\right]=1.$$

β. Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(1))^x+(f(2))^x+(f(3))^x}{(f(4))^x-(f(2))^x+(f(3))^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(1))^x\left[1+\left(\frac{f(2)}{f(1)}\right)^x+\left(\frac{f(3)}{f(1)}\right)^x\right]}{(f(2))^x\left[\left(\frac{f(4)}{f(2)}\right)^x-1+\left(\frac{f(3)}{f(2)}\right)^x\right]}=-\infty.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(1)}{f(2)}\right)^x=+\infty$, διότι $\frac{f(1)}{f(2)}<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{f(4)}{f(2)}\right)^x-1+\left(\frac{f(3)}{f(2)}\right)^x\right]=-1$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1+\left(\frac{f(2)}{f(1)}\right)^x+\left(\frac{f(3)}{f(1)}\right)^x\right]=1.$$

Ε3. Είναι $2g(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(f(1))^x-f(1)}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1}\left[(f(1))^x\ln(f(1))\right]=f(1)\ln(f(1))$

και επειδή $2g(1)=2\ln(f(1))$ έχουμε ότι

$$2\ln(f(1))=f(1)\ln(f(1))\Leftrightarrow\ln(f(1))(f(1)-2)=0\overset{f(1)\neq1}{\Leftrightarrow}f(1)=2.$$

Οπότε $g(1)=\ln(f(1))=\ln 2.$

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-\ln 2012, x\in\mathbb{R}.$
Η $g(x)=\ln f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των συνεχών $\ln x$ και $f(x)$,

άρα η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $h(1)=g(1)-\ln 2012=\ln 2-\ln 2012=\ln\frac{1}{1006}=-\ln 1006<0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\ln 2012\right)=+\infty.$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$, υπάρχει $\alpha>1$ τέτοιο ώστε $h(\alpha)>0.$

Η h είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$ και $h(1)h(\alpha)<0$, οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,\alpha)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)-\ln 2012=0\Leftrightarrow\ln(f(x_0))=\ln 2012\Leftrightarrow f(x_0)=2012.$$

ΘΕΜΑ 87

Προτείνει ο Νίκος Αλεξανδρόπουλος

Έστω συνάρτηση f με $f(x)=\frac{5^x-5^{-x}}{\ln^2 5}+2\eta\mu x.$

Ε1. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=0$.

Ε2. Να βρεθεί η εφαπτομένη στο $x_0=0$.

Λύση

Ε1. Έχουμε

$f'(x)=\frac{5^x}{\ln5}+\frac{5^{-x}}{\ln5}+2\sigma\upsilon\nu x$, και $f''(x)=5^x-5^{-x}-2\eta\mu x$ με προφανή ρίζα τη $x=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=5^x-5^{-x}-2\eta\mu x$ προφανώς είναι $h(0)=0$, έχουμε

$h'(x)=\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2\sigma\upsilon\nu x$, είναι

$$-2\le-2\sigma\upsilon\nu x\le2,$$

$$\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2\le\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2\sigma\upsilon\nu x\le2+\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x}),$$

$$\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2\le h'(x)\le2+\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x}).$$

Άρα $h'(x)\ge\ln5\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2\overset{\ln5>1}{>}1\cdot(5^x+\frac{1}{5^x})-2=\frac{(5^x)^2-2\cdot5^x+1}{5^x}=\frac{(5^x-1)^2}{5^x}\ge0.$

Δηλαδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα της.

- Επομένως $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0.$
- $x>0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(0)=0\Rightarrow f''(x)>0$ συνεπώς η f έχει τα κοίλα άνω.
- $x<0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)<h(0)=0\Rightarrow f''(x)<0$ συνεπώς η f έχει τα κοίλα κάτω.

Άρα η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής στο $x_0=0$.

Ε2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$, και επειδή $f(0)=0, f'(0)=\frac{2}{\ln5}+2=2\frac{\ln5+1}{\ln5}$, είναι

$$y=2\frac{\ln5+1}{\ln5}x.$$

ΘΕΜΑ 88

Προτείνει ο Νίκος Αλεξανδρόπουλος

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-6}{x-3}=0 \text{ και } \lim_{x\to5}\frac{\eta\mu(6x-30)}{x-5}=f(5).$$

Ε1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x+2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(3,5)$.

Ε2. Αν η f είναι κυρτή, να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f'(x)=0$ στο $(3,5)$.

Λύση

Ε1. Θεωρούμε για $x \neq 3$ την $g(x)=\dfrac{f(x)-6}{x-3}$ με $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=0.$

Τότε $f(x)=(x-3)g(x)+6.$

Οπότε έχουμε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)g(x)+6\right)=0\cdot 0+6=6.$

Επειδή η f συνεχής στο $x_o=3$ ως παραγωγίσιμη, έχουμε $f(3)=6$.

Ακόμη στο όριο $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\eta\mu(6x-30)}{x-5}=f(5)$ θέτουμε $6x-30=u$, οπότε

$$\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{6}}=f(5)\Leftrightarrow 6\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=f(5)\Leftrightarrow f(5)=6.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x-2, x\in[3,5].$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[3,5]$, αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον $h(3)=f(3)-3-2=6-5=1>0$ και

$h(5)=f(5)-5-2=6-7=-1<0.$

Συνεπώς από θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $h(x_o)=0\Leftrightarrow f(x_o)-x_o-2=0\Leftrightarrow f(x_o)=x_o+2.$

Ε2.

Η f συνεχής στο $[3,5]$, η f παραγωγίσιμη στο $(3,5)$, $f(3)=6=f(5).$

Άρα από θεώρημα **Rolle** υπάρχει $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0.$

Η f κυρτή και συνεπώς η f' γνησίως αύξουσα στο $(3,5)$.

Άρα η ρίζα ξ της f' είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 89

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+3^x+\ln(x^3+1), x\in(-1,+\infty)$ και $g(x)=-x+5^{-x}-x\ln 2, x\in\mathbb{R}.$

Ε1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

Ε2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο.
Ε3. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των δύο συναρτήσεων, και να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία μόνο ρίζα της f στο $(-1,0)$ και μία μόνο ρίζα της g στο $(0,1)$.

Λύση

Ε1. Η συνάρτηση $\ln(x^3+1)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών και παραγωγίσιμων $\ln x$ και x^3+1.
Οι συναρτήσεις f,g,h είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους $(-1,+\infty),R,(-1,+\infty)$ αντίστοιχα ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.''

Παίρνουμε $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+3^x+\ln(x^3+1)+x-5^{-x}+x\ln 2$

προφανής ρίζα $x=0$ και επειδή $h'(x)=3x^2+(3^x)\ln 3+\dfrac{3x^2}{x^3+1}+1+5^{-x}\ln 5+\ln 2>0$ ως άθροισμα θετικών, άρα η προφανής ρίζα $x=0$ είναι μοναδική .
Άρα το $A(0,f(0))=A(0,g(0))=A(0,1)$ είναι το μοναδικό τους κοινό σημείο.

Ε2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=\ln 3x+1$ και εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $A(0,1)$ είναι η $y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow y=(-1-\ln 10)x+1.$

Ε3.

- Είναι $f'(x)=3x^2+3^x\ln 3+\dfrac{3x^2}{x^3+1}>0$, άρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to -1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με $A=(-1,\ +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty,$ γιατί $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+3^x)=-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ και $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+1)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x^3+1)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3^x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1)=+\infty,$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^3+1)=+\infty$ επομένως $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to -1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,\ +\infty)=R.$

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty<0$ άρα κοντά στο -1 υπάρχει $\alpha<0,$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0.$ Ακόμη $f(0)=1>0,$ άρα από θεώρημα **Bolzano** για τη συνεχή συνάρτηση $f(x)$ στο $[\alpha,0]\subset[-1,0]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_1\in(\alpha,0)\subset[-1,0]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ που είναι και μοναδικό λόγω μονοτονίας της f.

■ Για τη $\mathbf{g(x)}$ έχουμε $\mathbf{g'(x)=-(1+5^{-x}\ln5+\ln2)<0,}$ άρα η συνάρτηση $\mathbf{g(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή είναι συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το

$$\mathbf{g(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),\ \lim_{x\to+\infty}g(x)\right).}$$

Είναι τώρα

$$\mathbf{\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+5^{-x}-x\ln2\right)=+\infty,}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+5^{-x}-x\ln2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(5^{-x}-x(1+\ln2)\right)=-\infty.}$$

Άρα το σύνολο τιμών της $\mathbf{g(x)}$ είναι $\mathbf{g(R)=\left(\lim_{x\to+\infty}g(x),\lim_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R.}$

Η $\mathbf{g(x)}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[0,1]}$ και επιπλέον $\mathbf{g(0)=1>0}$ και $\mathbf{g(1)=-(\frac{4}{5}+\ln2)<0}$

άρα από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει $\mathbf{x_2\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{g(x_2)=0}$ που είναι και μοναδικό λόγω μονοτονίας της $\mathbf{g}$.

ΘΕΜΑ 90

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Ε1. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\mathbf{r>0,}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{\ln r+r-3=0.}$

Ε2. Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f:(0,+\infty)\to R}$ με $\mathbf{f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2).}$

α. Μελετήστε την $\mathbf{f(x)}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Για τον αριθμό $\mathbf{r}$ του ερωτήματος **(Ε1)** να δείξετε ότι:

i. $\mathbf{f(x)+\frac{(r-1)^2}{r}\geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x>0,}$

ii. Υπάρχει $\mathbf{x_0>r}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_0)+f'(x_0)=0.}$

Λύση

Ε1. Έστω $\mathbf{g(x)=\ln x+x-3}$, $\mathbf{x>0.}$

Για την $\mathbf{g}$ ισχύουν: συνεχής στο $\mathbf{[1,e]}$ ως πράξεις συνέχων συναρτήσεων και $\mathbf{g(1)g(e)=-2(e-2)<0,}$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{r\in(1,e)\subseteq(0,+\infty)}$ ώστε $\mathbf{g(r)=\ln r+r-3=0.}$ Επίσης επειδή η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\mathbf{g'(x)=\frac{1}{x}+1>0}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{(0,+\infty)}$, επομένως θα έχει μοναδική ρίζα την $\mathbf{r}$.

Ε2. **α.** Είναι $$\mathbf{f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\left(\ln x+x-3\right)=\frac{g(x)}{x^2}.}$$

Άρα $\mathbf{f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=r}$ (μοναδική λύση λόγω του **(Ε1)** και

- για κάθε $\mathbf{0<x<r}$ λόγω της μονοτονίας της $\mathbf{g}$ ισχύει $\mathbf{g(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0}$, άρα η συνεχής $\mathbf{f}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbf{(0,r]}$,
- για κάθε $\mathbf{x>r}$ λόγω της μονοτονίας της $\mathbf{g}$ ισχύει $\mathbf{g(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0}$, άρα η συνεχής $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{[r,+\infty)}$,

επομένως στο $\mathbf{x=r}$ η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) το

$\mathbf{f(r)=\left(1-\frac{1}{r}\right)(\ln r-2)=\frac{r-1}{r}(1-r)=-\frac{(r-1)^2}{r}}$ αφού από **(Ε1)** είναι

$\mathbf{\ln r+r-3=0 \Leftrightarrow \ln r=3-r}$.

β. i. Για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε: $\mathbf{f(x)\ge f(r) \Leftrightarrow f(x)\ge -\frac{(r-1)^2}{r} \Leftrightarrow f(x)+\frac{(r-1)^2}{r}\ge 0}$.

ii. Έστω $\mathbf{h(x)=f(x)+f'(x)}$.

Η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $\mathbf{[r,e^2]}$ και

$\mathbf{h(r)=f(r)=-\frac{(r-1)^2}{r}<0}$, αφού $\mathbf{1<r<e}$ και $\mathbf{h(e^2)=f'(e^2)=\frac{e^2-1}{e^4}>0}$

οπότε $\mathbf{h(r)h(e^2)<0}$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\mathbf{x_0\in(r,e^2)\subseteq(r,+\infty)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)+f'(x_0)=0}$.

ΘΕΜΑ 91

Προτείνει ο Κώστας Ρεκούμης

Η συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $\mathbf{f(x)\neq 0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$
- $\mathbf{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x)+\eta\mu(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}=-2}$

Ε1. **α.** Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(2)=-5}$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{x_0\in(1,2)}$, τέτοιο ώστε

$$\mathbf{\frac{1}{x_0-1}+\frac{1}{x_0-2}=\frac{2012}{f(x_0)}}.$$

Ε2. Αν επιπλέον ισχύει $\mathbf{f^2(x)+f(x^2)=2x^2}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(1)=-2}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $\mathbf{(1,f(1))}$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{\xi\in(1,2)}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1}$.

Λύση

Ε1. **α)** Αν $g(x)=\dfrac{(x-2)f(x)+\etaμ(x^2-4)}{\sqrt{x-1}-1}, x\neq 2$ τότε διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το $x-2$ προκύπτει ότι

$$g(x)=\dfrac{f(x)+\dfrac{\etaμ(x^2-4)}{x-2}}{\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}}$$ και επειδή είναι

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$ και

$$\lim_{x\to 2}\frac{\etaμ(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\etaμ(x^2-4)}{x^2-4}(x+2)=4,$$ αφού με $u=x^2-4$ του $x\to 2$ το $u\to 0$

και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\etaμ(x^2-4)}{x^2-4}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\etaμu}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2),$

αφού η f είναι και συνεχής σαν παραγωγίσιμη θα ισχύει

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\frac{f(2)+4}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow -2=2f(2)+8\Leftrightarrow f(2)=-5.$$

β) Αρκεί η εξίσωση $(x-2)f(x)+(x-1)f(x)-2012(x-2)(x-1)=0$ να έχει λύση στο $(1,2)$.

Γι αυτό θεωρώντας την $h(x)=(x-2)f(x)+(x-1)f(x)-2012(x-2)(x-1)$ στο $[1,2]$ είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών

και ισχύει ότι $h(1)=-f(1)$ και $h(2)=f(2)=-5$ και αφού $f(x)\neq 0$ και συνεχής θα έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{R}$.

Και επειδή $f(2)=-5<0$ θα είναι $f(1)<0,$ οπότε $h(1)=-f(1)>0$ και έτσι $h(1)h(2)<0$ και από θεώρημα **Bolzano** η $h(x)=0$ έχει ρίζα στο $(1,2)$.

Ε2. **α)** Αφού για $x=1$ θα ισχύει $f^2(1)+f(1)=2\Leftrightarrow f^2(1)+f(1)-2=0$ έχουμε ότι $f(1)=1$ ή $f(1)=-2$ με δεκτή την $f(1)=-2$ για το λόγο που αναφέραμε στο **Ε1(β)**.

β) Η συνάρτηση $f(x^2)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και x^2. Και τα δυο μέλη της $f^2(x)+f(x^2)=2$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίζοντας θα ισχύει ότι

$2f(x)f'(x)+2xf'(x^2)=0 \Leftrightarrow f(x)f'(x)+xf'(x^2)=0$ που για $x=1$ δίνει ότι $f(1)f'(1)+f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0,$ οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(1,f(1))$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-2.$

γ) Θεωρώντας τη συνάρτηση $F(x)=(x-3)f(x)-x, x\in[1,2]$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $F'(x)=(x-3)f'(x)+f(x)-1$ και $F(1)=-2f(1)-1=3$ και $F(2)=-f(2)-2=3,$ άρα $F(2)=F(1)$ σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle** θα υπάρχει $\xi\in(1,2),$ ώστε $F'(\xi)=(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)-1=0,$ άρα θα ισχύει $(\xi-3)f'(\xi)+f(\xi)=1.$

ΘΕΜΑ 92

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Ε1. Δίνεται $f(x)=\ln(e^x-x)-x.$ Ποιά είναι η μονοτονία της, τα ακρότατα της και οι ρίζες της;

Ε2. Αν $g(x)=\ln(e^x-x),$ να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των $f(x), g(x)$, εκεί που τέμνονται από την ευθεία $x=x_0>0$, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

Ε3. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει δυο σημεία καμπής στα r_1, r_2 για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: **α.** $f'(r_1)\, e^{f(r_1)}=(r_1-2)(1-r_1)$, **β.** $e^{r_1-r_2}=\dfrac{2-r_2}{2-r_1}$

Λύση

Ε1. Η $f(x)=\ln(e^x-x)-x$ ορίζεται αν $e^x-x>0.$ Θεωρούμε την $A(x)=e^x-x, x\in R$ η $A(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $A'(x)=e^x-1.$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$A'(x)=e^x-1$	- 0 +
A(x)	↘ Ο. ε ↗

Αφού $x>0 \Rightarrow e^x>1$

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η $A(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $A(0)=1,$ οπότε για κάθε $x\in R$ $A(x)\geq A(0) \Leftrightarrow e^x-x\geq 1>0.$

Η συνάρτηση $\ln(e^x-x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των $\ln x$ και e^x-x, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}-1=\frac{e^x-1-e^x+x}{e^x-x}=\frac{x-1}{e^x-x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	0	+
e^x-x	+		+
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘	Ο. ε	↗

απ όπου ισχύει ότι $f'(1)=0.$ Από το διπλανό πίνακα έχουμε για $x>1$ ότι $f'(x)>0,$

άρα η $\mathbf{f}$ γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και για $x<1$ ότι

$f'(x)<0,$ άρα η f γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.
Οπότε στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=\ln(e-1)-1<0,$
γιατί $1<e-1<2$ οπότε $0<\ln(e-1)<\ln 2 \Leftrightarrow -1<\ln(e-1)-1<\ln 2-1<0.$
Επίσης επειδή $f(0)=0$ και το $0\in(-\infty,1)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,1)$ το 0

και αφού $f(x)=\ln(e^x-x)-\ln e^x=\ln\left(\dfrac{e^x-x}{e^x}\right)=\ln\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ και f γνήσια αύξουσα στο $A=[1,+\infty)$ θα είναι $f(A)=[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[\ln(e-1)-1,0).$

Και αφού το $0\notin[\ln(e-1)-1,0)$ τελικά έχει μοναδική ρίζα το 0.

Ε2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
Οι εφαπτόμενες στα $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ εχουν εξισώσεις
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\,(1)$ και $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\,(2)$.
Η (1) τέμνει το $y'y$ για $x=0$ στο $y_1=f(x_0)-f'(x_0)x_0$ και η
(2) στο $y_2=g(x_0)-g'(x_0)x_0$ και αφού $f(x)=g(x)-x$ είναι $f(x_0)=g(x_0)-x_0$
και $f'(x_0)=g'(x_0)-1,$ άρα από $y_1=f(x_0)-f'(x_0)x_0$ προκύπτει ότι
$y_1=g(x_0)-x_0-(g'(x_0)-1)x_0=g(x_0)-g'(x_0)x_0=y_2,$ άρα οι εφαπτόμενες τέμνονται στο ίδιο σημείο του $y'y$.

Ε3. Από $f'(x)=\dfrac{x-1}{e^x-x}$ έχουμε ότι

$$f''(x)=\frac{e^x-x-(x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}\,(3).$$

Τώρα η συνάρτηση $h(x)=2e^x-xe^x-1$ είναι παραγωγίσιμη με
$h'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x-xe^x=(1-x)e^x$ και
επειδή $h'(1)=0$ και $h'(x)>0\Leftrightarrow x<1$ και
$h'(x)<0\Leftrightarrow x>1$ η h είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα στο $x_0=1$ παίρνει μέγιστη τιμή το
$h(1)=2e-e-1=e-1>0$

x	-∞ 1 +∞
1-x	+ 0 -
e^x	+ +
A΄(x)	+ 0 -
A(x)	↗ Ο.μ ↘

και επειδή $h(-2)=\dfrac{2}{e^2}+\dfrac{2}{e^2}-1=\dfrac{4}{e^2}-1<0$

και $h(2)=2e^2-2e^2-1=-1<0$ ισχύουν $h(-2)h(1)<0,\ \ h(1)h(2)<0.$ Άρα από θεώρημα **Bolzano** υπάρχουν

$r_1\in(-2,1), r_2\in(1,2)$ ώστε $h(r_1)=h(r_2)=0,$ δηλαδή η

$h(x)=2e^x-xe^x-1$ έχει δύο ρίζες και μοναδικές μία $r_1\in(-\infty,1]$ και μία

$r_2\in[1,+\infty)$ λόγω της μονοτονίας σε κάθε διάστημα που ανήκουν και για το λόγο αυτό θα αλλάζει και το πρόσημο των τιμών της $h(x)$ εκατέρωθεν τους και αυτό

αφού $f''(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$ σημαίνει ότι η f έχει δύο σημεία καμπής τα

$A(r_1,f(r_1)), B(r_2,f(r_2)).$

α. Τώρα επειδή για το $r_1\in(-\infty,1]$ ή $r_2\in[1,+\infty)$ ισχύει σαν ρίζα της

$h(x)=2e^x-xe^x-1$ ότι $2e^{r_1}-r_1e^{r_1}-1=0\Leftrightarrow(2-r_1)e^{r_1}=1\Leftrightarrow 2-r_1=\dfrac{1}{e^{r_1}}$ και επίσης

$(1-r_1)e^{r_1}=1-e^{r_1}\Leftrightarrow\dfrac{1-r_1}{1-e^{r_1}}=\dfrac{1}{e^{r_1}}\Leftrightarrow\dfrac{r_1-1}{e^{r_1}-r_1}=\dfrac{1}{e^{r_1}}$ δηλαδή άρα $f'(r_1)=2-r_1$.

και $e^{f(r_1)}=e^{\ln(e^{r_1}-r_1)-r_1}=\dfrac{e^{r_1}-r_1}{e^{r_1}}=r_1-1$ οπότε $f'(r_1)e^{f(r_1)}=(r_1-2)(1-r_1).$

β. Και επίσης ισχύουν $(2-r_1)e^{r_1}=1$ και $(2-r_2)e^{r_2}=1$

και με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει $\dfrac{(2-r_1)e^{r_1}}{(2-r_2)e^{r_2}}=1\Leftrightarrow e^{r_1-r_2}=\dfrac{2-r_2}{2-r_1}.$

ΘΕΜΑ 93

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$,που ορίζεται στο $[0,1]$ και είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: $2f'(x)\ge f^2(0)+f^2(1)+2$ για κάθε $x\in[0,1].$

Ε1. **α.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(c)=f(1)-f(0).$

β. Να αποδείξετε ότι $f(0)=-1$ και $f(1)=1.$

γ. Να βρείτε τη μονοτονία της $f(x)$ και να αποδείξετε ότι $f'(x)\ge 2$ για κάθε $x\in[0,1].$

δ. Να αποδείξετε ότι $-1\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1].$

Αν $t\in(0,1)$ τυχαίος, να δείξετε ότι:

Ε2. **α.** Υπάρχει $r_1\in(0,t)$ τέτοιο ώστε $tf'(r_1)=f(t)+1.$

β. Υπάρχει $r_2\in(t,1)$ τέτοιο ώστε $(t-1)f'(r_2)=f(t)-1.$

γ. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ για κάθε $x\in[0,1].$

Λύση

Ε1. **α)** Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, οπότε από το **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[0,1]$ θα υπάρχει $c\in(0,1)$ ώστε να ισχύει $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$

β) Επειδή λόγω υπόθεσης θα ισχύει $2f'(c)\geq f^2(0)+f^2(1)+2$ ισοδύναμα θα έχουμε από **(Ε1α)** ότι, $2(f(1)-f(0))\geq f^2(0)+f^2(1)+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(0)-2f(1)+1+f^2(1)+2f(0)+1\leq 0$

$\Leftrightarrow (f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\leq 0$ και επειδή $(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\geq 0$ ισχύει μόνο όταν $(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2=0$ άρα όταν $f(0)=-1,f(1)=1.$

γ) Λόγω του $2f'(x)\geq f^2(0)+f^2(1)+2$ αφού $f(0)=-1,f(1)=1$ θα ισχύει ότι $2f'(x)\geq 4\Leftrightarrow f'(x)\geq 2>0,$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,1].$

Β΄ τρόπος

Αφού $2f'(x)\geq f^2(0)+f^2(1)+2\geq 2$ διότι $f^2(0),f^2(1)\geq 0$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

δ) Αφού f γνήσια αύξουσα στο $A=[0,1]$ και συνεχής θα ισχύει ότι $f(A)=[f(0),\ f(1)]=[-1,\ 1],$ άρα θα ισχύει $-1\leq f(x)\leq 1, x\in[0,1].$

Ε2. **α)** Στο διάστημα $[0,t],t\in(0,1)$ σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** για την f θα υπάρχει $r_1\in(0,t),$ ώστε να ισχύει $f'(r_1)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}\Leftrightarrow tf'(r_1)=f(t)+1.$

Ε3.

β) Τώρα στο διάστημα $[t,1]$ σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** για την f θα υπάρχει $r_2\in(t,1)$ ώστε να ισχύει $f'(r_2)=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\Leftrightarrow (t-1)f'(r_2)=f(t)-1.$

γ) Λόγω **(Ε1γ)** θα ισχύουν ότι $f'(r_1)\geq 2,f'(r_2)\geq 2$ οπότε σύμφωνα με τα **(Ε2α)**, **(Ε2β)** θα ισχύουν , $\dfrac{f(t)+1}{t}\geq 2\Leftrightarrow f(t)\geq 2t-1$ και $\dfrac{f(t)-1}{t-1}\geq 2\Leftrightarrow f(t)\leq 2t-1$ για κάθε $t\in(0,1),$ άρα τελικά $f(t)=2t-1,t\in(0,1)$ και αφού $f(0)=-1,f(1)=1$ θα είναι $f(x)=2x-1,x\in[0,1].$

ΘΕΜΑ 94

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[\alpha,\beta]$.

Αν γνωρίζετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)=0$ τότε:

Ε1. Να δείξετε ότι: $f'(\alpha)f'(\beta)<0$.

Ε2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Ε3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\le f'(x_0)$.

Λύση

Ε1. Αφού η f είναι κοίλη είναι και η f' γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$.

Συνεπώς από θεώρημα **Rolle** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Ακόμη $\alpha<\xi<\beta$ και αφού η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και

$f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta)\Rightarrow f'(\alpha)>0>f'(\beta)\Rightarrow f'(\alpha)f'(\beta)<0$.

Ε2. Είναι για $\alpha<x<\xi\Rightarrow f'(\alpha)>f'(x)>f'(\xi)\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\xi]$ (αφού είναι και συνεχής στο ξ) .

Έτσι για $x>\alpha\Rightarrow f(x)>f(\alpha)\Rightarrow f(x)>0$.

Ακόμη για $\xi<x<\beta\Rightarrow f'(\xi)>f'(x)>f'(\beta)\Rightarrow 0>f'(x)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,\beta)$.

Έτσι για $x<\beta\Rightarrow f(x)>f(\beta)\Rightarrow f(x)>0$.

Οποτε $f(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, και $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$.

Ε3. Έστω ότι ισχύει $f(x)>f'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε και

$f'(x)-f(x)<0\Rightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)<0\Rightarrow (e^{-x}f(x))'<0$,

δηλαδή η $g(x)=e^{-x}f(x)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

Έτσι για $\alpha<\beta\Rightarrow g(\alpha)>g(\beta)\Rightarrow e^{-\alpha}f(\alpha)>e^{-\beta}f(\beta)\Rightarrow 0>0$, άτοπο.

Συνεπώς θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\le f'(x_0)$.

ΘΕΜΑ 95

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ και να δείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα σ' αυτό.

Ε2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $\mathbf{C_f}$ είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

Ε3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}$.

Ε4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2x+f\left(3x\right)$.

Λύση

Ε1. Έχουμε $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$. Οπότε $x+\sqrt{x^2+1}>0$ **(1).**

Για να ορίζεται η $\mathbf{f}$, πρέπει $x+\sqrt{x^2+1}>0$ που από την **(1)** που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x^2+1\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η $\mathbf{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση $\sqrt{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\sqrt{x}$ και x^2+1. Η συνάρτηση $x+\sqrt{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμων των συνεχών $\ln x$ και $x+\sqrt{x^2+1}$.

Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άρα $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$, έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ε2. Η $\mathbf{f'}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x)=-\dfrac{x}{(x^2+1)}$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{x}{(x^2+1)}=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow -\frac{x}{(x^2+1)}>0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow x<0.$$

Επομένως η $\mathbf{f}$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0]$ και τα κοίλα κάτω στο $[0,+\infty)$.
Παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x=0$, το $f(0)=0$

Ε3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

Ε4. Η εξίσωση $f(3x)+2x=f(x)$ έχει προφανή λύση την $x=0$.

Για $x<0$ έχουμε $3x<x<0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(3x)<f(x)\overset{x<0}{\Rightarrow}f(3x)+2x<f(x).$

Για $x>0$ έχουμε $0<x<3x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(3x)\overset{x>0}{\Rightarrow}f(x)<2x+f(3x).$

Οπότε η προφανής λύση $x=0$ είναι και μοναδική.

Β΄ τρόπος

$$f(x)=2x+f(3x)\Leftrightarrow f(x)+x=3x+f(3x)\Leftrightarrow g(x)=g(3x)$$

όπου $g(x)=f(x)+x$ με $x\in R$

Έστω $0<x_1<x_2 \begin{matrix}\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} \\ \underset{x\nearrow}{}\end{matrix} \begin{matrix} f(x_1)<f(x_2) \\ x_1<x_2\end{matrix} \overset{\oplus}{\Rightarrow} f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$

$$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε και $1-1$.

Άρα η εξίσωση γίνεται $g(x)=g(3x)\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}x=3x\Leftrightarrow 3x-x=0\Leftrightarrow x=0.$

ΘΕΜΑ 96

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1\right).$

Ε1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο τομής με τον $x'x$.

Ε2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Ε3. Να δείξετε ότι $\dfrac{f(x)}{4\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\geq x+1$ για κάθε $x<0$.

Λύση

Ε1. Για να ορίζεται η $\mathbf{f}$ πρέπει

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1>0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+1>0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2^x}-1\right)^{2}>0$$ που ισχύει όταν

$$\frac{1}{2^x}-1\neq 0\Leftrightarrow 2^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$, οπότε

$$f(x)=\ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{2^x}-1\right)^{2}=2\ln\left|\frac{1}{2^x}-1\right|,x\neq 0.$$

Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2\ln\left|\frac{1}{2^x}-1\right|=0\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2^x}-1\right|=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{1}{2^x}-1=1\ \text{ή}\ \frac{1}{2^x}-1=-1\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{1}{2^x}=2\ \text{ή}\ \frac{1}{2^x}=0\right\}\Leftrightarrow\boxed{x=-1}.$$

Άρα το σημείο $\mathbf{A(-1,0)}$ είναι μοναδικό σημείο τομής με τον $\mathbf{x'x}$.

Ε2. Η συνάρτηση $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\right)^{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η συνάρτηση $\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\right)^{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R^*}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\ln x$ και $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\right)^{2}$.

$$f'(x)=\left(2\ln\left|\frac{1}{2^x}-1\right|\right)'=2\frac{1}{\frac{1}{2^x}-1}\left(-2^{-x}\right)=-2\frac{2^x}{1-2^x}2^{-x}=\frac{2}{2^x-1}\neq 0$$, άρα η

συνάρτηση $\mathbf{f}$ δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Ε3. Είναι

$$f(x)=2\ln\left|\frac{1}{2^x}-1\right|=2\ln\left|\frac{1-2^x}{2^x}\right|=2\ln\left|1-2^x\right|-2\ln 2^x=2\left(\ln\left|1-2^x\right|-x\ln 2\right)$$

Έστω για $\mathbf{x<0}$

$$\frac{f(x)}{4\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{2\left(\ln\left|1-2^x\right|-x\ln 2\right)}{-4\ln 2} \geq x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|1-2^x\right|-x\ln 2 \leq -2x\ln 2-2\ln 2 \overset{x<0 \Leftrightarrow 2^x<1}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \ln\left(1-2^x\right) \leq -x\ln 2-2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1-2^x\right) \leq \ln 2^{-x}+\ln 2^{-2} \Leftrightarrow \ln\left(1-2^x\right) \leq \ln 2^{-x-2} \Leftrightarrow 1-2^x \leq \frac{1}{4\cdot 2^x}$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 2^x-4\cdot\left(2^x\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 4\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(2\cdot 2^x-1\right)^2 \geq 0$$

Που ισχύει.

ΘΕΜΑ 97 — Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Ε1. Για τις συναρτήσεις h,g ισχύει πως $h(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, όπου $x_0 \in R \cup \{\pm\infty\}$.

Να δείξετε ότι:

α. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -\infty$,

β. $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

Ε2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x) = 2012 - \frac{x^2}{x^2+e^x} \text{ για κάθε } x \in R.$$

α. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι η $g(x) = f(x) - 2011x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+2)-f(x)\right]$.

Λύση

Ε1. **α.** Αρχικά $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty < 0$. Άρα κοντά στο x_0 ισχύει $h(x) \leq g(x) \leq 0$, οπότε

$0 \geq \frac{1}{h(x)} \geq \frac{1}{g(x)}$ και με κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{h(x)} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -\infty$ αφού $h(x) \leq g(x) \leq 0$.

β. Όμοια για το $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = +\infty > 0$. Άρα κοντά στο x_0 ισχύει $0 \leq h(x) \leq g(x)$ οπότε

$0 \leq \frac{1}{h(x)} \leq \frac{1}{g(x)}$ και με κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = 0$, άρα

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ αφού $0\le h(x)\le g(x).$

Ε2. **α.** Η παράγωγος γράφεται $f'(x)=2012-\dfrac{x^2+e^x-e^x}{x^2+e^x}=2011+\dfrac{e^x}{x^2+e^x}>0,$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού είναι και συνεχής.

Τώρα $f''(x)=\dfrac{e^x x(x-2)}{[x^2+e^x]^2}$ είναι $f''(x)=0\Leftrightarrow\{x=0,x=2\},$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$x-2$	-		-	0	+
x	-	0	+		+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	Σ.κ	∩	Σ.κ	∪

αρα $f(x)$ κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,0],[2,+\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[0,2]$ με σημεία καμπής στο $x=0,x=2.$

β. Είναι $g'(x)=f'(x)-2011>0$ **(λόγω (α))** άρα η g γνησίως αύξουσα .

γ. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

Για

$$x>2\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)>g(2)\Rightarrow f(x)-2011x>f(2)-4022\Rightarrow f(x)>2011x+f(2)-4022\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)>\lim_{x\to+\infty}\left(2011x+f(2)-4022\right)\overset{E1}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Για

$$x<0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)<g(2)\Rightarrow f(x)-2011x<f(0)-0\Rightarrow f(x)<2011x+f(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)<\lim_{x\to-\infty}\left(2011x+f(0)\right)\overset{E1}{\Rightarrow}\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

Άρα $f((-\infty,+\infty))=(-\infty,+\infty).$

δ.

Από **Θ.Μ.Τ.** για την f στο $[x,x+2]$ υπάρχει

$\xi\in\left(x,x+2\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+2)-f(x)}{(x+2)-x}=f(x+2)-f(x).$

Είναι $x<\xi<x+2\overset{f'(x)\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(x+2)\Rightarrow f'(x)<\dfrac{f(x+2)-f(x)}{2}<f'(x+2)$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2011+\frac{e^x}{x^2+e^x}\right) \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} 2011+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+e^x} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$$

$$= 2011+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x+e^x} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} 2011+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} 2011+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 2011+1=2012$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x+2)=+\infty.$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+2)-f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+2)-f(x)}{(x+2)-x}2 = (2012)2 = 4024.$$

ΘΕΜΑ 98

Προτείνει ο χρήστηςparmenides51

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$ Να δείξετε ότι :

Ε1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε2. Ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Πηγή: Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)>0$, η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω και συνεπώς η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της είναι κάτω από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Δηλαδή ισχύει $f(x)\ge y_{\varepsilon\varphi}$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Έστω τώρα ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f'(x_0)>0.$

Η εξίσωση εφαπτόμενης στο x_0 είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0).$$

Άρα η **(1)** γίνεται $f(x)\ge f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (2)

και επειδή είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x_0)x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ λόγω **(2)**

προκύπτει **άτοπο**. Αρα για όλα τα x ισχύει $f'(x)\le 0$ (3).

Επειδή όμως η f' είναι γνησίως μονότονη, αυτή έχει το πολύ μία ρίζα και αφού η f' δεν αλλάζει πρόσημο (λόγω της **(3)**) εκατέρωθεν της ρίζας αυτής (αν έχει), η συνάρτηση f θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Β΄ τρόπος.

Αν υποθέσουμε πως η f' έχει τουλάχιστον δυο ρίζες α,β με $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$,

τότε με θεώρημα **Rolle** για την f' στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)=0$ άτοπο διότι $f''(x)>0$ από υπόθεση.

Άρα η $f'(x)=0$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα , οπότε και λόγω της **(3)**

προκύπτει πως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ε2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1)\le 0$.

Για κάθε $x>x_1+1>x_1 \overset{f\searrow \mathbb{R}}{\Longrightarrow} f(x)<f(x_1+1)<f(x_1)\le 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)\le \lim_{x\to+\infty} f(x_1+1)\le \lim_{x\to+\infty} f(x_1)\le \lim_{x\to+\infty} 0 \overset{\text{υποθ.}}{\Longrightarrow}$$

$$0\le f(x_1+1)\le f(x_1)\le 0 \quad \overset{f\searrow \mathbb{R}}{\Rightarrow} 0\le f(x_1+1)<f(x_1)\le 0\Rightarrow 0<0 \text{ , άτοπο.}$$

Έτσι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 99

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η μη μηδενική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+y)=4^{xy}f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

Ε2. Αν ισχύει $f'(0)=0$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2^{-x^2}f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Ε1. Θέτοντας στη συναρτησιακή $x=y=0$ και με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι μη μηδενική προκύπτει το ζητούμενο $f(0)=4^0f(0)f(0)\Leftrightarrow 1=f(0)$.

Ε2. **α.** Για τυχαίο x_0 είναι

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4^{x_0h}f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to0}\frac{4^{x_0h}f(h)-1}{h}=$$

$$=f(x_0)\lim_{h\to 0}\left[4^{x_0h}\frac{f(h)-1}{h}+\frac{4^{x_0h}-1}{h}\right]=2x_0f(x_0)\ln 2.$$

Αφού $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=0,$ και

$$\lim_{h\to 0}\frac{4^{x_0h}-1}{h}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{x_0 4^{x_0h}\ln 4}{1}=x_0\ln 4.$$

Άρα, η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=2xf(x)\ln 2.$

β. Εύκολα προκύπτει ότι

$$g'(x)=\left(2^{-x^2}f(x)\right)'=-2x2^{-x^2}\ln 2f(x)+2^{-x^2}f'(x)=2^{-x^2}\left(-2x\ln 2f(x)+f'(x)\right)=0,$$

οπότε $g(x)=c$ όμως $g(0)=1$ άρα $g(x)=1.$

γ. Από **(β)** $g(x)=1\Leftrightarrow 2^{-x^2}f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=2^{x^2}.$

ΘΕΜΑ 100

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\ln\alpha-\alpha\ln x,\alpha>0.$

Ε1. Να βρείτε το $\alpha>0,$ αν ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0.$

Για $\alpha=e$:

Ε2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $e^x\geq x^e$ για κάθε $x>0.$

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση $e^x=x^e$, $x>0.$

Ε4. Να προσδιορίσετε τους θετικούς β,γ αν ισχύει $\beta^x+\gamma^x\geq x^\beta+x^\gamma$ για κάθε $x>0.$

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

Λύση

Ε1. Αφού $f(x)\geq 0,\ \ x\in(0,+\infty)$ και $f(\alpha)=0$ θα ισχύει $f(x)\geq f(\alpha),\ \ x\in(0,+\infty)$ οπότε το $f(\alpha)$ είναι ολικό ελάχιστο της f και επειδή f παραγωγίσιμη (πράξεις με παραγωγίσιμες συναρτήσεις) στο $\alpha\in(0,+\infty)$ (εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της) από το θεώρημα του **Fermat** προκύπτει ότι: $f'(\alpha)=0:(1).$

Όμως

$$f'(x)=\ln\alpha-\frac{\alpha}{x}\Rightarrow f'(\alpha)=\ln\alpha-\frac{\alpha}{\alpha}=\ln\alpha-1\overset{(1)}{\Rightarrow}\ln\alpha-1=0\Leftrightarrow\ln\alpha=1\Leftrightarrow\ \alpha=e.$$

Ε2. Για $\alpha = e \Rightarrow f(x) = x - e\ln x$

με $f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x-e}{x}$ και

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-e}{x} = 0 \Leftrightarrow x = e.$

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$x-e$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	0 ‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0 ‖	$+$		$+$	
$f(x)$			‖	↘	Ο. ε	↗	

Από τον πίνακα μονοτονίας ή όπως παρακάτω έχουμε

- Για $0 < x < e \Rightarrow x - e < 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{x-e}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \overset{f \text{ συνεχης στο } (0,e]}{\Rightarrow} f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και

- για $x > e \Rightarrow x - e > 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{x-e}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \overset{f \text{ συνεχης στο } [e,+\infty)}{\Rightarrow} f$ γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(e) = 0$ δηλαδή

$x \in (0,+\infty) \Rightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - e\ln x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq e\ln x \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln x^e \overset{\ln \nearrow}{\Leftrightarrow} e^x \geq x^e,\ \ x \in (0,+\infty).$

Ε3. Είναι $e^x = x^e \Leftrightarrow \ln e^x = \ln x^e \Leftrightarrow x\ln e = e\ln x \Leftrightarrow \ldots f(x) = 0 \Leftrightarrow\ x = e$ αφού $f(e) = 0$ και

$0 < x < e \overset{f\downarrow \text{στο} (0,e]}{\Rightarrow} f(x) > f(e) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0,\ \ x \in (0,e)$ και

$x > e \overset{f\uparrow \text{στο} [e,+\infty)}{\Rightarrow} f(x) > f(e) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0,\ \ x \in (e,+\infty).$

Ε4. Από το ερώτημα **(Ε2)** έχουμε: $e^x \geq x^e : (1),\ \ x \in (0,+\infty).$

Η σχέση $\beta^x + \gamma^x \geq x^\beta + x^\gamma : (2)$ ισχύει για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε για $x = e$ θα ισχύει ότι $\beta^e + \gamma^e \geq e^\beta + e^\gamma (3)$ και από την (1) πάλι θα έχουμε ότι $e^\beta \geq \beta^e$ και $e^\gamma \geq \gamma^e$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\beta^e + \gamma^e \leq e^\beta + e^\gamma (4).$

Άρα από **(3)** και **(4)** έχουμε $\beta^e + \gamma^e = e^\beta + e^\gamma \Leftrightarrow \left(\beta^e - e^\beta\right) + \left(\gamma^e - e^\gamma\right) = 0.$ Όμως $e^\beta - \beta^e \geq 0$ και $e^\gamma - \gamma^e \geq 0$, άρα αναγκαία $e^\beta - \beta^e = 0$ και $e^\gamma - \gamma^e = 0$ οπότε

$e^\beta - \beta^e = 0 \Leftrightarrow e^\beta = \beta^e \overset{E3}{\Leftrightarrow} \boxed{\beta = e}$ και $e^\gamma - \gamma^e = 0 \Leftrightarrow e^\gamma = \gamma^e \overset{E3}{\Leftrightarrow} \boxed{\gamma = e}.$

ΘΕΜΑ 101

Προτείνει ο Στάθης Κούτρας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$2f(x) + \sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Ε1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Ε2. Να αποδείξετε ότι : $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$, για κάθε $x\in R$.

Ε3. Να δείξετε ότι: $\frac{x-1}{2}\le f(x)\le\frac{x+1}{2},\forall x\in R$.

Ε4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη f^{-1} της f.

Λύση

Ε1. Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\sigma\upsilon\nu x$ και $f(x)$. Και τα δυο μέλη της $2f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)=x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη προκύπτει ότι

$$2f'(x)-\eta\mu f(x)f'(x)=1\Leftrightarrow(2-\eta\mu f(x))f'(x)=1$$

και επειδή $2-\eta\mu f(x)>0$ λόγω της ισότητας η $f'(x)>0,x\in R$, άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο R.

Ε2. Για $x=y$ προφανώς ισχύει σαν ισότητα .

Για $x\ne y$ έστω ότι $x<y,$ αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le1$ (1) .

Τώρα στο διάστημα $[x,y]$ επειδή f παραγωγίσιμη σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(x,y)$ ώστε να ισχύει

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ και επειδή $f'(\xi)=\frac{1}{2-\eta\mu f(\xi)}$ θα είναι

$\frac{1}{2-\eta\mu f(\xi)}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε από (1) ότι

$\left|\frac{1}{2-\eta\mu f(\xi)}\right|\le1\Leftrightarrow|2-\eta\mu f(\xi)|\ge1$ που ισχύει αφού $-1\le\eta\mu f(x)\le1$.

Ε3. Αρκεί να δείξουμε ότι $x-1\le2f(x)\le x+1\Leftrightarrow x-1\le x-\sigma\upsilon\nu f(x)\le x+1,$ δηλαδή αρκεί $-1\le-\sigma\upsilon\nu f(x)\le1,x\in R$ που ισχύει.

Ε4. **Α΄ τρόπος:**

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2}=+\infty$ λόγω της

$\frac{x-1}{2}\le f(x)\le\frac{x+1}{2},\forall x\in R$ από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2}=-\infty$ λόγω της $\frac{x-1}{2}\le f(x)\le\frac{x+1}{2}, \forall x\in R$ από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ άρα το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνήσιας αύξουσας συνάρτησης f στο R είναι το $f(R)\overset{f\nearrow}{=}(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty, +\infty)=R$ που είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} που ορίζεται επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα άρα και '$1-1$' και έτσι για όπου x το $f^{-1}(x)$ προκύπτει ότι $2f(f^{-1}(x))+\sigma\upsilon\nu(f(f^{-1}(x)))=f^{-1}(x)\Leftrightarrow 2x+\sigma\upsilon\nu x=f^{-1}(x)$.

Β΄ τρόπος :

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2}=+\infty$ θα ισχύει ότι $\frac{x-1}{2}>0$ στο $+\infty$ και από $f(x)\ge\frac{x-1}{2}>0$ θα ισχύει ότι $0<\frac{1}{f(x)}<\frac{2}{x-1}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$ από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ άρα αφού $f(x)>0$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και ανάλογα επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2}=-\infty$ και $f(x)<\frac{x+1}{2}$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ άρα το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνήσιας αύξουσας f στο R είναι $f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty, +\infty)=R$ που είναι πεδίο ορισμού της f^{-1} που ορίζεται επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα άρα και '$1-1$' και έτσι για όπου x το $f^{-1}(x)$ προκύπτει ότι $2f(f^{-1}(x))+\sigma\upsilon\nu(f(f^{-1}(x)))=f^{-1}(x)\Leftrightarrow 2x+\sigma\upsilon\nu x=f^{-1}(x)$.

ΘΕΜΑ 102

Προτείνει ο Στάθης Κούτρας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$x\cdot e^{f(x)}=f^2(x)+2$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε1. Να εκφράσετε την $f'(x)$ συναρτήσει μόνο του $f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

Ε4. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.

Λύση

Ε1. Έχουμε $x\cdot e^{f(x)}=f^2(x)+2\Leftrightarrow x\cdot e^{f(x)}\cdot e^{-f(x)}=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$ $\Leftrightarrow x=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων e^x και $f(x)$. Και τα δυο μέλη της

$x=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη προκύπτει ότι

$$1=2f(x)f'(x)e^{-f(x)}-f^2(x)e^{-f(x)}f'(x)-2e^{-f(x)}f'(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}=2f(x)f'(x)-f^2(x)f'(x)-2f'(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{-f^2(x)+2f(x)-2},$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(Το $-f^2(x)+2f(x)-2$ θεωρούμενο ως τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και ως εκ τούτου $-f^2(x)+2f(x)-2<0$ για κάθε $f(x)\in R$ με $x\in(0,+\infty)$.

Ε2. Από το **(Ε1)** έχουμε $f'(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{-f^2(x)+2f(x)-2}<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επιπλέον η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη και συνεπώς γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Η συνάρτηση $f'(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{-f^2(x)+2f(x)-2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων, με παράγωγο

$$f''(x)=\frac{\left(e^{f(x)}\right)'\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)-e^{f(x)}\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)'}{\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)^2}$$

$$=\frac{e^{f(x)}f'(x)\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)-e^{f(x)}\left(-2f(x)f'(x)+2f'(x)\right)}{\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)^2}$$

$$=e^{f(x)}f'(x)\frac{-f^2(x)+2f(x)-2+2f(x)-2}{\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)^2}=e^{f(x)}f'(x)\frac{-\left(f(x)-2\right)^2}{\left(-f^2(x)+2f(x)-2\right)^2}\geq 0$$ για

κάθε $x\in(0,+\infty)$, με το ίσον να ισχύει μόνο αν $x=\dfrac{6}{e^2}$.

Διότι αν υπάρχει $x_0\in(0,\ +\infty)$ ώστε $f(x_0)=2$ τότε από την $x\cdot e^{f(x)}=f^2(x)+2$ έχουμε $x_o\cdot e^2=2^2+2\Leftrightarrow x_o=\dfrac{6}{e^2}$.

.Αφού η f γνήσια μονότονη είναι και $'1-1'$ άρα αντιστρέφεται .

Πριν όμως βρούμε τον τύπο της πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της.(που είναι βέβαια το σύνολο τιμών της f).

Είναι $x=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Θεωρούμε την $T(x)=x^2e^{-x}+2e^{-x}$ με πεδίο ορισμού το R

Έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$T'(x)=\left(x^2e^{-x}+2e^{-x}\right)'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}-2e^{-x}=$$

$$=-e^{-x}\left(x^2-2x+2\right)=-e^{-x}\left(x^2-2x+1+1\right)=-e^{-x}\left((x-1)^2+1\right)<0.$$

Άρα η T είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $1-1$, συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη της T^{-1}.

Η $x=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ γίνεται

$x=T(f(x))\Leftrightarrow T^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών $f(A_f)$ της f ταυτίζεται με το σύνολο τιμών τη T^{-1},

Όμως το σύνολο τιμών της T^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της T που είναι το R.

Συνεπώς $f(A_f)=R$.

Οπότε για την f^{-1} έχουμε πεδίο ορισμού το $A_{f^{-1}}=R$ και σύνολο τιμών το $f(A_{f^{-1}})=(0,+\infty)$ και αν όπου x βάλουμε το $f^{-1}(x)$ στην $x=f^2(x)e^{-f(x)}+2e^{-f(x)}$ ή θα έχουμε και τον τύπος της

$$f^{-1}(x)e^{f(f^{-1}(x))}=(f(f^{-1}(x)))^2+2\Leftrightarrow f^{-1}(x)e^x=x^2+2\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2+2}{e^x},\ x\in R.$$

ΘΕΜΑ 103

Προτείνει ο Στάθης Κούτρας

Ε1. Να αποδείξετε ότι $e^x>x>\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε2. Μια κατακόρυφη ευθεία $x=t, t\in(0,+\infty)$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ στα σημεία A,B αντίστοιχα.

α. Να βρείτε την απόσταση (AB) συναρτήσει του $t\in(0,+\infty)$ και έστω ότι $(AB)=d(t)$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $d'(t)=0$ έχει ακριβώς μια λύση και μάλιστα αυτή ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για κάποιο $t_0\in(0,1)$.

Λύση

Ε1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^x-x, x\in R$ με $h'(x)=e^x-1$. Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμου της h' και μεταβολών της h έχουμε ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)=e^x-1$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	Ο. ε	$\nearrow$

$h(0)=0$ δηλαδή για κάθε $x\in R^*$ έχουμε ,

$h(x)\geq h(0)\Rightarrow e^x-x\geq 0\Rightarrow e^x\geq x.$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$,θέτουμε όπου x το $\ln x$ στην $e^x>x$ και έχουμε

$e^{\ln x}>\ln x\Rightarrow x>\ln x$ άρα ισχύει $e^x>x>\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε2. **α.** Είναι $A(t,f(t))=A(t,e^t)$ και $B(t,g(t))=B(t,\ln t)$.

Αν $d(t)=(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(t-t)^2+(e^t-\ln t)^2}=e^t-\ln t>0$ από ερώτημα **(Ε1)**.

β. Η $d(t)=e^t-\ln t>0$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο, με $d'(t)=e^t-\frac{1}{t}$, $d''(t)=e^t+\frac{1}{t^2}>0$

άρα η $d'(t)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,\ +\infty)$..

Η $d'(t)$ είναι συνεχής στο $(0,1]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

- $d'(1)=e-1>0,$
- $\lim\limits_{t\to 0^+} d'(t)=-\infty<0,$ άρα κοντά στο 0 υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $: d'(\alpha)<0$

οπότε από θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει $t_0\in(\alpha,1)\subset(0,1): d'(t_0)=0$ και αφού η $d'(t)$ γνησίως αύξουσα το t_0 μοναδικό.

γ. Έχουμε $d'(t)=e^t-\frac{1}{t}$, η οποία μηδενίζεται για μοναδικό $t_0\in(\alpha,1)\subset(0,1)$ σύμφωνα με το ερώτημα **(Ε2β)**.

x	0	t_0	1
$d''(t)=e^t+\frac{1}{t^2}>0$	+		+
$d'(t)=e^t-\frac{1}{t}$,	-	0	+
$d(t)$	$\searrow$	Ο. ε	$\nearrow$

- $x<t_0\overset{d'\nearrow}{\Rightarrow} d'(x)<d'(t_0)=0,$
- $x>t_0\overset{d'\nearrow}{\Rightarrow} d'(x)>d'(t_0)=0.$

Άρα η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για κάποιο $t_0\in(0,1)$.

ΘΕΜΑ 104

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με τύπο $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x.$

Ε1. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε2. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ε3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης και το σημείο τομής τους.

Ε4. Να προσδιοριστεί η θέση της C_f ως προς τις ασύμπτωτες.

Πηγή: Annales corrigées 2010 - Mathématiques - Bac, Vuibert

Λύση

Ε1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$.

Πρέπει $1+e^{-x}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $\mathbf{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση $1+e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η συνάρτηση $\ln(1+e^{-x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\ln x$ και $1+e^{-x}$. Άρα η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{3}=\frac{-3e^{-x}+1+e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-2e^{-x}+1}{1+e^{-x}},x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2e^{-x}+1}{1+e^{-x}}=0\Leftrightarrow-2e^{-x}+1=0\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow-x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln 2,$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-2e^{-x}+1}{1+e^{-x}}>0\overset{1+e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}-2e^{-x}+1>0\Leftrightarrow e^{-x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-x<\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\ln 2.$$

Οπότε έχουμε από τον διπλανό πίνακα η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$].Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\ln 2$ με τιμή

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$-2e^{-x}+1$		$-$	0	$+$	
$1+e^{-x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	Ο. ε	$\nearrow$	

$$f(\ln 2)=\ln(1+e^{-\ln 2})+\frac{\ln 2}{3}=\ln\frac{3}{2}+\frac{\ln 2}{3}=\ln 3-\ln 2+\frac{\ln 2}{3}=\ln 3-\frac{2\ln 2}{3}.$$

Ε2. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(1+e^{-x})+\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)+\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)-x+\frac{x}{3}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)-\frac{2x}{3}\right)=+\infty.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln(e^x+1)}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3e^x}{e^x+1}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x}{2e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x}{2e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\dfrac{3}{2}.$

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^{-x})+\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)+\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1)-x+\frac{x}{3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1)-\frac{2x}{3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{3}\left(\frac{3\ln(e^x+1)}{2x}-1\right)\right]=(+\infty)\left(\frac{3}{2}-1\right)=+\infty.$$

Ε3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες .
Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(e^x+1)-\frac{2x}{3}\right)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{2}{3}}{1}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1)-\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+1)-\ln e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right)=0.$$

Οπότε η $y=\frac{1}{3}x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\ln(e^x+1)-\frac{2x}{3}\right)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{2}{3}}{1}=0-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{2}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{2x}{3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln(e^x+1)\right)=0.$

Άρα η $y=-\frac{2}{3}x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Ε4. Για $x>0$ έχουμε :

$f(x) > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow \ln(e^x+1) - \frac{2x}{3} > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow$

$\ln(e^x+1) - x > 0 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) - \ln e^x > 0 \Leftrightarrow$

$\ln\frac{e^x+1}{e^x} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{e^x} > 1$

που ισχύει για κάθε $x > 0$.

Για $x < 0$ έχουμε

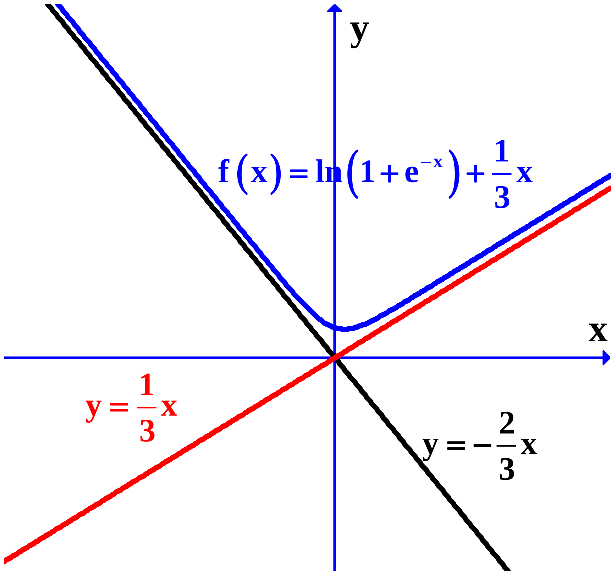
$f(x) > -\frac{2}{3}x \Leftrightarrow$

$\ln(e^x+1) - \frac{2x}{3} > -\frac{2}{3}x \Leftrightarrow$

$\ln(e^x+1) > 0$

που ισχύει για κάθε $x < 0$.

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τις ασύμπτωτες .



ΘΕΜΑ 105

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0.$

Ε1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Ε3. Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\kappa x}, x > 0.$

Ε4. Να λύσετε την εξίσωση $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2010.

Ε6. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq e$ ισχύει $f(x+1) < \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2 x}{2} < f(x)$.

Ε7. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty}\left(\ln^2(x+1) - \ln^2 x\right)$.

Πηγή: Β. Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας) και Γ. Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

Λύση

Ε1. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow x=e$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<e$, ενώ

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$. Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e$ το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		+	+	0	-	
x^2		+	0 +		+	
$f'(x)$		+	+	0	-	
$f(x)$			↗	Ο.μ	↘	

Ε2. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και συνεπώς

$$f((0,e])=(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(e)]=(-\infty,\tfrac{1}{e}] \text{ αφού } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)=-\infty.$$

Επιπλέον η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και συνεπώς

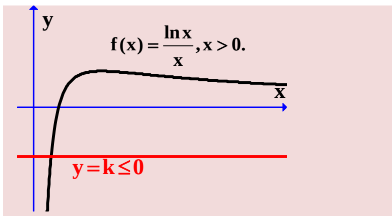
$$f\,([e,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right]=\left(0,\frac{1}{e}\right] \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

όπου στο τελευταίο όριο έγινε χρήση **DeL'Hospital.**

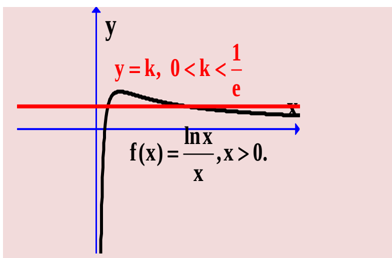
Άρα τελικά $f(D_f)=f((0,e])\cup f([e,+\infty))=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{e}\right]=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

Ε3. Η εξίσωση $x=e^{kx}, x>0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=k$.

Αφού για $x>0, x=e^{kx} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{kx} \Leftrightarrow \ln x=kx \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}=k \Leftrightarrow f(x)=k$ Οπότε :

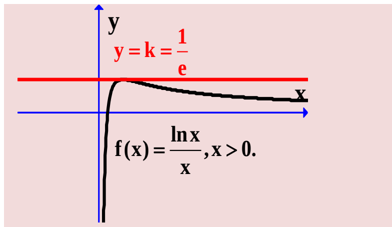


☑ για $k\le 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση,

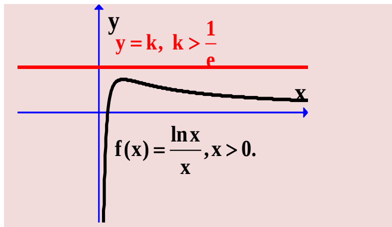


☑ για $0<k<\dfrac{1}{e}$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις,

☑ για $\mathbf{k}=\frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση,



☑ για $\mathbf{k}>\frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.



Ε4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}=(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\ln(\eta\mu x)=\eta\mu x\ln(\sigma\upsilon\nu x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f(\eta\mu x)=f(\sigma\upsilon\nu x).$$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι $1-1$.

Άρα $f(\eta\mu x)=f(\sigma\upsilon\nu x)\Rightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $x=\frac{\pi}{4}$.

Ε5. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$ είναι

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\frac{\ln\xi}{\xi}=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(x-\xi).$$

Αν αυτή διέρχεται από το σημείο $(0,-2010)$ τότε έχουμε:

$$-2010-\frac{\ln\xi}{\xi}=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(0-\xi)\Leftrightarrow -2010-\frac{\ln\xi}{\xi}=-\frac{1-\ln\xi}{\xi}\Leftrightarrow -2010\xi-\ln\xi=-1+\ln\xi$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\xi+2010\xi-1=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2\ln x+2010x-1, x>0.$

Η $h(x)$ συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με $h'(x)=\frac{2}{x}+2010>0$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς η $h(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι $h((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

Επειδή λοιπόν το $0\in h\left(\left(0,+\infty\right)\right)$, υπάρχει $\xi>0$, το οποίο είναι και μοναδικό λόγω μονοτονίας, τέτοιο ώστε $h\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow 2\ln\xi+2010\xi-1=0$ που είναι το ζητούμενο.

Ε6. Αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι $f\left(x+1\right)<\dfrac{\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x}{2}<f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow 2f\left(x+1\right)<\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x<2f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow 2f\left(x+1\right)<\dfrac{\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x}{x+1-x}<2f\left(x\right).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $s\left(x\right)=\ln^2 x, x\geq e$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$s'\left(x\right)=2\dfrac{\ln x}{x}=2f\left(x\right)$. Από **Θ.Μ.Τ.** για την $s\left(x\right)$ στο $\left[x,x+1\right]$, υπάρχει

$r\in\left(x,x+1\right)$, τέτοιο ώστε

$s'\left(r\right)=\dfrac{s\left(x+1\right)-s\left(x\right)}{x+1-x}=\dfrac{\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x}{x+1-x}=2f\left(r\right).$

Οπότε η ζητούμενη ανισότητα γίνεται :

$2f\left(x+1\right)<2f\left(r\right)<2f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x+1\right)<f\left(r\right)<f\left(x\right)$ που ισχύει , αφού

$e\leq x<r<x+1\Rightarrow f\left(x\right)>f\left(r\right)>f\left(x+1\right)$ γιατί η f γνησίως φθίνουσα για $x\geq e.$

Ε7. Από στην σχέση $2f\left(x+1\right)<\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x<2f\left(x\right)$ επειδή είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x+1}=0$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^2\left(x+1\right)-\ln^2 x\right)=0$.

ΘΕΜΑ 106

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω η f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x+1)=f(3-x)$ και $f''(x)\neq 0.$

Ε1. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0.$

Ε2. Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο $\left[0,3\right]$ και ισχύει $f(0)<f(1)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ολικών ακροτάτων στο $\left[0,3\right]$.

Πηγή: Α.Μπάρλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση

Ε1. Παραγωγίζοντας την ισότητα αφού $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη προκύπτει $\mathbf{f'(x+1)=-f'(3-x)\Leftrightarrow f'(x+1)+f'(3-x)=0}$ και για $\mathbf{x=1}$

ισχύει ότι $\mathbf{2f'(2)=0\Leftrightarrow f'(2)=0,}$ άρα ρίζα της $\mathbf{f'(x)=0}$ το $\mathbf{x=2.}$
Τώρα επειδή ισχύει $\mathbf{f''(x)\neq 0}$ η $\mathbf{f'}$ είναι $\mathbf{1-1,}$ γιατί διαφορετικά θα υπάρχουν $\mathbf{x_1\neq x_2}$ ώστε να ισχύει $\mathbf{f'(x_1)=f'(x_2)}$ και από Θεώρημα **Rolle** θα υπάρχει ρίζα της $\mathbf{f''(x)=0}$ στο διάστημα που ορίζουν οι $\mathbf{x_1,x_2}$ που είναι άτοπο λόγω υπόθεσης.
Άρα η $\mathbf{f'(x)=0}$ έχει μοναδική ρίζα την $\mathbf{x=2.}$

Ε2. Αφού επιπλέον η $\mathbf{f''}$ και συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{[0,3],}$ άρα θα είναι $\mathbf{f''(x)>0}$ ή $\mathbf{f''(x)<0}$ για $\mathbf{x\in[0,3].}$

Αν τώρα ισχύει $\mathbf{f''(x)>0,}$ η $\mathbf{f'}$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{[0,3]}$ και επειδή $\mathbf{f'(2)=0}$ για $\mathbf{x<2}$ θα ισχύει ότι $\mathbf{f'(x)<f'(2)=0.}$ Άρα η $\mathbf{f}$ γνήσια φθίνουσα στο $\mathbf{[0,2],}$ **άτοπο** αφού είναι $\mathbf{f(0)<f(1),}$ οπότε θα ισχύει ότι $\mathbf{f''(x)<0}$ για $\mathbf{x\in[0,3].}$
Έτσι η $\mathbf{f'}$ θα είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbf{[0,3],}$ οπότε για $\mathbf{x<2}$ θα ισχύει ότι $\mathbf{f'(x)>f'(2)=0}$ που σημαίνει ότι $\mathbf{f}$ γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{[0,2]}$ και για $\mathbf{x>2}$ θα ισχύει ότι $\mathbf{f'(x)<f'(2)=0}$ που σημαίνει ότι $\mathbf{f}$ γνήσια φθίνουσα στο $\mathbf{[2,3].}$
Επομένως η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\mathbf{x_1=2}$ το $\mathbf{f(2)}$ και τοπικά ελάχιστα στα $\mathbf{x_2=0,x_3=3}$ και αφού από υπόθεση ισχύει $\mathbf{f(1)=f(3)}$ και $\mathbf{f(0)<f(1)}$ το $\mathbf{f(0)}$ θα είναι το ολικό ελάχιστο στο $\mathbf{[0,3].}$

ΘΕΜΑ 107

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha,\alpha\in\mathbb{R}.}$ Αν $\mathbf{f(x)\geq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in(0,+\infty)}$ τότε:

Ε1. Να βρείτε τον $\mathbf{\alpha\in\mathbb{R}.}$

Για την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ που βρήκατε:

Ε2. Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε3. Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Ε4. Να υπολογίσετε τα όρια $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$ και $\mathbf{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x).}$

Ε5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $\mathbf{f}$ και να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{f(x)=0.}$

Ε6. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{\ln(2\lambda^2+2)-\frac{1}{\lambda^2+6}>\ln(\lambda^2+6)-\frac{1}{2\lambda^2+2}.}$

Πηγή: Χ.Γκουβιέρος – Θ. Διαμαντόπουλος (εκδόσεις Ξιφαράς)

Λύση

Ε1. Αφού $f(x)\geq 0$ και $f(1)=0$ θα ισχύει ότι $f(x)\geq f(1), x\in(0,+\infty)$ οπότε στο $1\in(0,+\infty)$ η f παρουσιάζει ακρότατο και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}$ σύμφωνα με το θεώρημα του **Fermat** θα ισχύει ότι

$f'(1)=0\Leftrightarrow 1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-1.$

Ε2. Είναι για $\alpha=-1$ η

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ έχουμε από τον διπλανό πίνακα ότι η f είναι :

- ☑ γνήσια φθίνουσα στο $(0,1]$ και
- ☑ γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα
- ☑ στο $x_0=1$ έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0.$

x	-∞	0		1	+∞
$x-1$	-	‖	-	0	+
x^2	+	0	+		+
$f'(x)$	-	‖	-	0	+
$f(x)$	↘	‖	↘	Ο.ε	↗

Ε3. Είναι

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{2-x}{x^3}$, οπότε από τον διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f :

- ☑ κυρτή στο $(0,2]$ και
- ☑ κοίλη στο $[2,+\infty)$ και
- ☑ το $(2,f(2))$ σημείο καμπής της f.

x	-∞	0		2	+∞
$2-x$	+	‖	+	0	-
x^3	-	0	+		+
$f''(x)$	-	‖	+	0	-
$f(x)$	∩	‖	∪	Σ.κ	∩

Ε4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$, άρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\infty-\infty$ και τότε η $f(x)=\frac{x\ln x+1}{x}+1$ και αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH\,x\to 0^+}{=}}\lim\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0 \text{ το } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}(x\ln x+1)\right)=+\infty, \text{ άρα}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+\frac{1}{x}-1)=+\infty.$

Ε5. Λόγω του ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνήσια αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής θα ισχύει $f(\Delta_1) = [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [0, +\infty)$ και $f(\Delta_2) = [f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [0, +\infty)$ σύμφωνα με τα **(Ε2)** και **(Ε4)** και θα έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Ε6. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$f(2\lambda^2 + 2) - 1 > f(\lambda^2 + 6) - 1 \Leftrightarrow f(2\lambda^2 + 2) > f(\lambda^2 + 6)$ και επειδή $2\lambda^2 + 2 > 1, \lambda^2 + 6 > 1, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{f}$ γνήσια αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ισοδύναμα θα έχουμε ότι $2\lambda^2 + 2 > \lambda^2 + 6 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \lambda < -2, \lambda > 2$.

ΘΕΜΑ 108

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επίσης ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{1 + if(1)}{2 + if(2)}$ είναι φανταστικός και έχει μέτρο **1**. Να δείξετε ότι:

Ε1. $f(1) = -2$ και $f(2) = 1$.

Ε2. Η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

Ε3. Η εξίσωση $f(x)f'(x) = -x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1, 2)$.

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Ο $\mathbf{z}$ είναι φανταστικός σύμφωνα με την υπόθεση, οπότε θα ισχύει,

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow \frac{1 - if(1)}{2 - if(2)} = -\frac{1 + if(1)}{2 + if(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \cancel{f(2)i} - \cancel{2f(1)i} + f(1)f(2) = -2 + \cancel{f(2)i} - \cancel{2f(1)i} + f(1)f(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1)f(2) = -2 \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$.

Άρα $f(1) < f(2)$.

Από την **(1)** προκύπτει ότι οι $f(1), f(2)$ είναι ετερόσημοι , οπότε $f(1) < 0 < f(2)$ **(2)**.

Επίσης $|z| = 1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f^2(1) = 3 + f^2(2)$ **(3)** .

Από τις **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι $f(1) = -2$ και $f(2) = 1$.

Ε2. Έστω $\mathbf{g(x)=x+f(x)}$,για κάθε $\mathbf{x\in[1,2]}$.

Η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ ως παραγωγίσιμη.

Επίσης $\mathbf{g(1)g(2)=-3<0}$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε η $\mathbf{g(\xi)=0\Leftrightarrow\xi+f(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=-\xi}$.

Επειδή $\mathbf{g'(x)=1+f'(x)>0}$ η $\mathbf{g}$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε και $\mathbf{1-1}$.

Άρα η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Ε3. Έστω $\mathbf{h(x)=x^2+f^2(x)}$ για κάθε $\mathbf{x\in[1,2]}$.

Η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[1,2\right]$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{h'(x)=2\left[x+f(x)f'(x)\right]}$.

ακόμη $\mathbf{h(1)=5=h(2)}$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα . **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε η $\mathbf{h'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi+f(\xi)f'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)f'(\xi)=-\xi}$.

ΘΕΜΑ 109

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:\left(0,+\infty\right)\to R}$ για την οποία ισχύει

$\mathbf{\left(x-1\right)^2 f\left(x\right)=\left(\ln x\right)\eta\mu\pi x}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$.

Ε1. Να βρείτε το $\mathbf{f(1)}$.

Ε2. Να εξετάσετε αν η $\mathbf{C_f}$ έχει ασύμπτωτες.

Ε3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$, ώστε για τη συνάρτηση $\mathbf{g}$ με

$$\mathbf{g(x)=\begin{cases}\alpha+f(x), \alpha\nu\ 0<x\le 1\\ \beta\ \ ,\alpha\nu\ \ x=0\end{cases}}$$

να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος **Rolle** στο $\mathbf{[0,1]}$.

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1.

☑ Για $\mathbf{x\neq1}$ έχουμε $\mathbf{f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}}$.

☑ Για $\mathbf{x=1}$ επειδή είναι $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{x=1}$, ισχύει ότι

$$\mathbf{f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}=1\cdot(-\pi)=-\pi},$$

αφού είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$ και

$$\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{(\eta\mu(\pi x))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{1}=-\pi.$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}, & x\neq1\\ -\pi, & x=1\end{cases}$

Ε2.

☑ Επειδή είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ δεν έχει κατακόρυφες στο διάστημα αυτό και εξετάζουμε στο 0, δηλαδή ψάχνουμε το $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln x\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)^2}\right)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to0}(x-1)^2=1$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln x\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\pi x\right)=\pi\lim\limits_{x\to0}\left(x\ln x\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\right)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}=1$ το $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,$ που σημαίνει ότι η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0.$

☑ Για την οριζόντια ψάχνουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)^2}\right).$

Τώρα επειδή το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και

$\left|\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\right|\le\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x-1}\le\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\le\dfrac{1}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0,$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x-1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\right)=0$$

το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}=0$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ που σημαίνει ότι , ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty.$

Ε3. .Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος **Rolle** για την g στο $[0,1]$ θα πρέπει η g να είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $g(0)=g(1)$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, η g γίνεται συνεχής στο $x=0$ όταν $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha+f(x))=\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ **(1)** και επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\pi$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(\alpha+f(x))=\alpha-\pi$ και για να είναι συνεχής και στο $x=1$ πρέπει $g(1)=\alpha-\pi$, άρα για να ισχύει και $g(0)=g(1)$ πρέπει και $\beta=\alpha-\pi$ **(2)** που είναι αδύνατο λόγω της **(1)**, άρα δεν υπάρχουν **α,β** ώστε να ισχύουν οι προυποθέσεις του **Rolle.**

ΘΕΜΑ 110

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με την f παραγωγίσιμη για τις οποίες ισχύει : $|f(x)g(x)+x^2|\le x\ln x$ για κάθε $x>1$.

Ε1. Αν οι συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα, να δείξετε οτι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι κάθετες.

Ε2. Αν ισχύει πως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\sigma\upsilon\nu(4h)}=\dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2}$ και $f(1)=\dfrac{1}{2}$, να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Ε3. Αν η πλάγια ασύμπτωτη της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, ποια είναι η εξίσωση της;

Λύση

Ε1. Από την ανισότητα έχουμε ισοδύναμα ότι ισχύει

$\left|f(x)g(x)+x^2\right|\le x\ln x \Leftrightarrow -x\ln x\le f(x)g(x)+x^2\le x\ln x$ ή

$-x\ln x-x^2\le f(x)g(x)\le x\ln x-x^2$ και με $x\ne 0$ διαιρώντας με x^2 προκύπτει

$$-\frac{\ln x}{x}-1\le \frac{f(x)}{x}\frac{g(x)}{x}\le \frac{\ln x}{x}-1 \quad (1).$$

Και αν οι ασύμπτωτες αντίστοιχα έχουν συντελεστές λ_1,λ_2 θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda_1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lambda_2 \text{ και αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

από την **(1)** με κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $-1\le \lambda_1\lambda_2\le -1$ άρα $\lambda_1\lambda_2=-1$, που σημαίνει ότι οι ασύμπτωτες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Ε2. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu(4h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+5h)-f(x)+f(x)-f(x-3h)}{\eta\mu(4h)}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}5-\frac{f(x-3h)-f(x)}{3h}3}{\frac{\eta\mu(4h)}{4h}4}=\frac{5f'(x)-[-3f'(x)]}{4}=2f'(x),$$

αφού είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}\underset{h\to 0\ \alpha\rho\alpha\ t\to 0}{\overset{t=5h}{=}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x)$

και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-3h)-f(x)}{3h}\underset{h\to 0\ \alpha\rho\alpha\ t\to 0}{\overset{t=-3h}{=}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{-t}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=-f'(x)$

Άρα από την $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+5h)-f(x-3h)}{\eta\mu(4h)}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$ έχουμε $2f'(x)=1+\frac{1-\ln x}{x^2}$

οπότε και $(2f(x))'=\left(x+\frac{\ln x}{x}\right)',x>0$ άρα $2f(x)=x+\frac{\ln x}{x}+c.$

Και αφού $f(1)=\frac{1}{2}$ θα είναι $2f(1)=1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$ άρα

$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\ln x}{2x},x>0.$

Ε3. Επειδή τώρα $f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\ln x}{2x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=0,$ (όπως στην **(Ε1)**) θα ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\frac{1}{2}x)=0$ που σημαίνει ότι η πλάγια ασύμπτωτη της

f στο $+\infty$ είναι η $y=\frac{1}{2}x,$ άρα $\lambda_1=\frac{1}{2}$ και λόγω του **(Ε1)** είναι

$\lambda_2=-2$ οπότε η ασύμπτωτη της g στο $+\infty$ θα είναι η $y=-2x+\beta$ και αφού περνά από το $A(1,2)$ θα ισχύει $2=-2+\beta\Leftrightarrow\beta=4.$ Επομένως θα είναι η $y=-2x+4.$

ΘΕΜΑ 111

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Η συνάρτηση $f:[1,e]\to[-1,4]$, όπου το $[-1,4]$ είναι το σύνολο τιμών της, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και $f(e)=e+1.$ Να δείξετε ότι:

Ε1. **α.** Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2,$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0.$

β. Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0.$

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_o)\left(f'(x_o)-3f^2(x_o)\right)=x_o.$$

Ε2. **α.** Η ευθεία $\mathbf{e: x+y=e+2}$ τέμνει την $\mathbf{C_f}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\mathbf{c_o \in (1,e)}$.

β. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (1,e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2 \in (1,e)$, τέτοια ώστε $\mathbf{f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1.}$

Πηγή: Χ.Γκουβιέρος – Θ. Διαμαντόπουλος (εκδόσεις Ξιφαράς)

Λύση

Ε1. **α.** Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[1,e]}$,από θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής έχουμε ότι υπάρχουν $\mathbf{x_1,x_2 \in [1,e]}$ τέτοια ώστε $\mathbf{f(x_1)=-1}$ και $\mathbf{f(x_2)=4}$, αφού $\mathbf{-1}$ και $\mathbf{4}$ η ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα σύμφωνα με την υπόθεση. Επειδή $\mathbf{f(1)=2}$, $\mathbf{f(e)=e+1}$ έχουμε ότι $\mathbf{f(x_1)<f(1)<f(e)<f(x_2)}$, επομένως τα $\mathbf{x_1,x_2}$ δεν είναι τα άκρα του διαστήματος $\mathbf{[1,e]}$.
Συνεπώς τα $\mathbf{x_1,x_2 \in (1,e).}$ Επειδή η $\mathbf{f}$ λαμβάνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή σε αυτά, στα οποία είναι παραγωγίσιμη ως παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[1,e]}$ από θεώρημα **Fermat** έχουμε ότι $\mathbf{f'(x_1)=f'(x_2)=0.}$
Ακόμα έχουμε ότι $\mathbf{f(x_1)=-1, f(x_2)=4.}$

β. Αν $\mathbf{x_1<x_2 \in (1,e),}$ τότε η $\mathbf{f'}$ συνεχής στο $\mathbf{[x_1,x_2]}$, η $\mathbf{f'}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(x_1,x_2)}$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[1,e]}$και $\mathbf{f'(x_1)=f'(x_2)=0.}$
Από θεώρημα **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{\xi \in (x_1,x_2) \subset (1,e),}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f''(\xi)=0.}$Όμοια αν $\mathbf{x_2<x_1 \in (1,e).}$

γ. Θεωρούμε την $\mathbf{h(x)=f(x)(f'(x)-3f^2(x))-x, x \in [x_1,x_2].}$
Η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[x_1,x_2]}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
$\mathbf{h(x_1)=f(x_1)(f'(x_1)-3f^2(x_1))-x_1=-1(0-3\cdot(-1)^2)-x_1=3-x_1>0,}$ διότι $\mathbf{1<x_1<e}$ και
$\mathbf{h(x_2)=f(x_2)(f'(x_2)-3f^2(x_2))-x_2=4(0-3\cdot 4^2)-x_2=-3\cdot 4^3-x_2<0,}$ διότι $\mathbf{1<x_2<e.}$
Επομένως από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x_0 \in (x_1,x_2) \subset (1,e)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)(f'(x_0)-3f^2(x_0))=x_0}$.

Ε2. **α .** Θεωρούμε την $\mathbf{g(x)=f(x)+x-e-2, x \in [1,e].}$
Η $\mathbf{g}$ συνεχής στο $\mathbf{[1,e],}$
$\mathbf{g(1)=f(1)+1-e-2=2-e-1=1-e<0,}$
$\mathbf{g(e)=f(e)+e-e-2=e+1-2=e-1>0.}$

Οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $c_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $g(c_0)=0.$

Συνεπώς η ευθεία $x+y=e+2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1,e).$

β. Η f συνεχής $[1,c_0]$, η f παραγωγίσιμη στο $(1,c_0).$

Από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi_1 \in (1,c_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c_0)-f(1)}{c_0-1}=\frac{-c_0+e+2-2}{c_0-1}=\frac{-(c_0-e)}{c_0-1}.$$

Η f συνεχής $[c_0,e]$,η f παραγωγίσιμη στο $(c_0,e).$

Από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi_2 \in (c_0,e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(e)-f(c_0)}{e-c_0}=\frac{e+1-(-c_0+e+2)}{e-c_0}=\frac{c_0-1}{e-c_0}.$$

Οπότε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-(c_0-e)}{c_0-1}\cdot\dfrac{c_0-1}{e-c_0}=\dfrac{e-c_0}{c_0-1}\cdot\dfrac{c_0-1}{e-c_0}=1.$

ΘΕΜΑ 112 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$, παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα $(-2,2)$, για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0)=3$ και $f(x)f'(x)=f'(x)-x$ για κάθε $x\in[-2,2].$

Έστω και οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z-i|=2.$

Να αποδείξετε ότι :

Ε1. Η f δεν έχει σημεία καμπής .

Ε2. $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0.$

Ε3. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2).$

Ε4. Η f είναι κοίλη.

Ε5. $f(x)=1+\sqrt{4-x^2},x\in[-2,2].$

Ε6. Η γραφική παράσταση της f είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου των μιγαδικών z και ότι η εφαπτομένη της στο σημείο που είναι η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ γίνεται μέγιστο , είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Πηγή: Θέμα 23 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

Λύση

Ε1. Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 τότε θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αφού και τα δυο μέλη της $f(x)f'(x)=f'(x)-x$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(-2,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων τότε παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη προκύπτει ότι $\mathbf{f'(x)f'(x)+f(x)f''(x)=f'(x)-1}$ και για $\mathbf{x=x_0}$ θα ισχύει ότι $\mathbf{(f'(x_0))^2=f'(x_0)-1\Leftrightarrow(f'(x_0))^2-f'(x_0)+1=0,}$

που είναι άτοπο αφού $\mathbf{x^2-x+1>0,x\in R}$, άρα δεν έχει σημεία καμπής.

Ε2. Από $\mathbf{f(x)f'(x)=f(x)-1}$ ισχύει ότι $\mathbf{2f(x)f'(x)=2f(x)-2}$ τότε και $\mathbf{(f^2(x))'=(2f(x)-x^2)',x\in[-2,2],}$ άρα θα είναι

$\mathbf{f^2(x)=2f(x)-x^2+c}$ και για $\mathbf{x=0}$ θα είναι $\mathbf{f^2(0)=2f(0)+c\Leftrightarrow c=3,}$ άρα

$\mathbf{f^2(x)=2f(x)-x^2+3\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0.}$

Αν υπάρχει $\mathbf{x_0\in(-2,2)}$ ώστε $\mathbf{g(x_0)=0}$ τότε θα είναι $\mathbf{f(x_0)=1}$ και λόγω **(Ε2)**

$\mathbf{f^2(x_0)-2f(x_0)+x_0^2-3=0\Leftrightarrow x_0^2=4}$ άτοπο αφού, $\mathbf{g(x)\neq0,x\in(-2,2)}$ και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbf{[-2,2]}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ε3. θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{(-2,2)}$ και αφού $\mathbf{g(0)=f(0)-1=2>0}$ θα είναι $\mathbf{g(x)>0,x\in(-2,2)}$ άρα και $\mathbf{f(x)>1,x\in(-2,2).}$

Ε4. Από $\mathbf{f'(x)f'(x)+f(x)f''(x)=f'(x)-1}$ έχουμε ότι

$\mathbf{f(x)f''(x)=-(f'(x))^2+f'(x)-1}$ και λόγω **(Ε3)** $\mathbf{f(x)>1>0}$ και

$\mathbf{-(f'(x))^2+f'(x)-1<0,\ x\in R}$ από την ισότητα προκύπτει ότι $\mathbf{f(x)f''(x)<0,}$ άρα

$\mathbf{f''(x)<0,x\in(-2,2)}$ άρα η $\mathbf{f}$ είναι κοίλη.

Ε5. Από **(Ε2)** ισχύει $\mathbf{f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2\Leftrightarrow(f(x)-1)^2=4-x^2}$ με

$\mathbf{4-x^2\geq0,x\in[-2,2]}$ οπότε και $\mathbf{|f(x)-1|=\sqrt{4-x^2}}$ και επειδή λόγω **(Ε3)**

$\mathbf{f(x)>1,x\in(-2,2)}$ προκύπτει ότι

$\mathbf{f(x)-1=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow f(x)=-1+\sqrt{4-x^2},x\in[-2,2].}$

Ε6. Από $\mathbf{|z-i|=2}$ η εικόνα του $\mathbf{z}$ ανήκει σε κύκλο κέντρου $\mathbf{K(0,1)}$ και ακτίνας **ρ=2**, που έχει αναλυτική εξίσωση $\mathbf{x^2+(y-1)^2=4\Leftrightarrow(y-1)^2=4-x^2,x\in[-2,2],}$

άρα $\mathbf{|y-1|=\sqrt{4-x^2}}$ επομένως προφανώς η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ είναι το ημικύκλιο του κύκλου πάνω από τον $\mathbf{x'x}$ και το μέτρο του $\mathbf{z}$ γίνεται μέγιστο τότε στο σημείο του $\mathbf{y'y}$ το $\mathbf{(0,2)}$ δηλαδή όταν $\mathbf{f(0)=2}$ και από την αρχική ισότητα ισχύει $\mathbf{3f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0}$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο $\mathbf{(0,2)}$ είναι παράλληλη στον άξονα $\mathbf{x'x.}$

ΘΕΜΑ 113

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ με $\mathbf{f(\alpha)=f(\beta)=0}$ και η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(\alpha,\beta)}$.

Ε1. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Ε2. **α.** Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

β. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f'(x_1) - f'(x_2) \geq \dfrac{4f(x_0)}{\beta - \alpha}$.

Ε3. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β), αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε

α. $f''(\xi) < 0$,

β. $f(x) \leq -f''(\xi)\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)^2$.

Πηγή: Θέματα ΕΜΕ (2002)

Λύση

Ε1. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, άρα από θ.Rolle θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

x	α	ξ	β
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	Ο. μ	↘

- Για $\alpha < x < \xi$ και αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \xi]$.
  Έτσι για $\alpha < x < \xi \Rightarrow f(x) > f(\alpha) \Rightarrow f(x) > 0$.
- Για $\xi < x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 0$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[\xi, \beta]$.

Έτσι για $\xi < x < \beta \Rightarrow f(x) > f(\beta) \Rightarrow f(x) > 0$. Έτσι $f(x) > 0$ για $x \in (\alpha, \beta)$.

Ε2. **α.** Από το **(Ε1)** η f θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \xi$ το $f(x_0)$.

β. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$, παραγωγίσιμη στο (α, x_0),

άρα από **ΘΜΤ** θα υπάρχει $x_1 \in (\alpha, x_0)$ $\quad f'(x_1) = \dfrac{f(x_0)}{x_0 - \alpha}$ **(1).**

Όμοια από **ΘΜΤ** θα υπάρχει $x_2 \in (x_0, \beta)$, $\quad f'(x_2) = -\dfrac{f(x_0)}{\beta - x_0}$ **(2).**

Αφαιρώντας κατά μέλη τις **(1), (2)** είναι

$$f'(x_1) - f'(x_2) = \frac{f(x_0)}{x_0 - \alpha} + \frac{f(x_0)}{\beta - x_0} = f(x_0)\left(\frac{1}{x_0 - \alpha} + \frac{1}{\beta - x_0}\right) \geq 4f(x_0)\frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Αφού ισχύει

$$\frac{1}{x_0-\alpha}+\frac{1}{\beta-x_0}\geq\frac{4}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\frac{\beta-x_0+x_0-\alpha}{(x_0-\alpha)(\beta-x_0)}\geq\frac{4}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\frac{\beta-\alpha}{(x_0-\alpha)(\beta-x_0)}\geq\frac{4}{\beta-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow(\beta-\alpha)^2\geq4(x_0-\alpha)(\beta-x_0)\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq4x_0\beta-4x_0^2-4\alpha\beta+\alpha x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq4x_0(\alpha+\beta)-4x_0^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2-4x_0(\alpha+\beta)+4x_0^2\geq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta-x_0)^2\geq0.$$

Ε3. **α.** Αφού είναι $f(x)>0$, ισχύει ότι και $f(x_0)>0$, όπου στο $x_0=\xi$ από ερώτημα **(Ε1)** η f θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(x_0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,x_0]$, παραγωγίσιμη στο (α,x_0) άρα από ΘΜΤ

θα υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,x_0)$, $\quad f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)}{x_0-\alpha}>0.$

Και όμοια θα υπάρχει $\xi_2\in(x_0,\beta)$, $\quad f'(\xi_2)=\dfrac{-f(x_0)}{\beta-x_0}<0.$

Αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), άρα από **ΘΜΤ** θα υπάρχει

$$\xi\in(\xi_1,\xi_2),\quad f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

β. Έχουμε ότι ισχύει από το **(α)**

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)=f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\geq\frac{4f(x_0)}{\beta-\alpha}\overset{(\text{Από Ε2β})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)\geq\frac{4f(x_0)}{\beta-\alpha}\overset{(\text{Από Ε1α})}{\geq}\frac{4f(x)}{\beta-\alpha}.$$

Δηλαδή $\dfrac{4f(x)}{\beta-\alpha}\leq f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)\leq-f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)\leq-f''(\xi)(\beta-\alpha)$

και άρα $f(x)\leq-f''(\xi)\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2.$

ΘΕΜΑ 114

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Ε1. Να δείξετε ότι $x^2>\ln2x$ για κάθε $x>0.$

Ε2. Να δείξετε ότι $e^{x^2}>2x$ για κάθε x πραγματικό.

Ε3. Να λύσετε την εξίσωση $x+e^{-x^2}=1.$

Ε4. Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$ για την οποία ισχύει $\mathbf{f(x)+e^{-f^2(x)}=x}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σημείο τομής της $\mathbf{C_f}$ με την ευθεία $\mathbf{x=1}$.

Πηγή: Α. Μπάρλας, (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση

Ε1. Θεωρώ συνάρτηση $\mathbf{g(x)=x^2-\ln 2x,\ x>0}$ που είναι παραγωγίσιμη με

$\mathbf{g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων οπότε

$\mathbf{g'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$, αφού $\mathbf{x>0}$ και

x	-∞		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		+∞
$2x^2-1$		+	0	-	‖	-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
g(x)					‖	↘	Τ.ε	↗	

από των πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$ η συνάρτηση στη θέση $\mathbf{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ έχει ολικό ελάχιστο το

$$\mathbf{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(1-\ln 2)=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)>0,}$$

όποτε για κάθε $\mathbf{x>0}$ είναι

$$\mathbf{g(x)\ge g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)>0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow x^2>\ln 2x.}$$

Ε2.

- Για $\mathbf{x>0}$, έχουμε $\mathbf{x^2>\ln 2x\Rightarrow e^{x^2}>e^{\ln 2x}\Rightarrow e^{x^2}>2x.}$
- Για $\mathbf{x=0}$, έχουμε $\mathbf{1>0}$ που ισχύει .
- Για $\mathbf{x<0\Rightarrow -x>0}$ έστω $\mathbf{e^{(-x)^2}>2(-x)\Leftrightarrow e^{x^2}>-2x>2x}$, που ισχύει.

Ε3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbf{\kappa(x)=x+e^{-x^2},\quad x\in R}$ Η συνάρτηση $\mathbf{e^{-x^2}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\mathbf{e^x}$ και $\mathbf{-x^2}$. Η $\mathbf{\kappa(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\mathbf{\kappa'(x)=1-2xe^{-x^2}=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}>0}$ (σύμφωνα με το Ε2) άρα $\mathbf{\kappa(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ οπότε και $\mathbf{1-1}$.

Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\mathbf{x+e^{-x^2}=1\Leftrightarrow \kappa(x)=1\Leftrightarrow \kappa(x)=\kappa(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0.}$

Ε4. Είναι $f(x)+e^{-f^2(x)}=x \Leftrightarrow \kappa(f(x))=x$. Τώρα για $x_1, x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει λόγω της ισότητας ότι $\kappa(f(x_1))<\kappa(f(x_2))$ και επειδή η κ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση **(Ε3)** θα ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση . Και αφού $\kappa(f(1))=1 \Leftrightarrow \kappa(f(1))=\kappa(0)$ επειδή η κ είναι $'1-1'$ θα είναι $f(1)=0.$

ΘΕΜΑ 115

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει :

$f(x)+e^{f(x)}=x+1$ για κάθε $x\in R.$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq (x+1)$ για κάθε $x\in R.$

Ε2. Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

Ε3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ για κάθε $x\geq 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

Ε4. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα κάτω.

Ε5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Ε6. Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x).$

Λύση

Ε1. Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1, A_g=R.$

Είναι $g'(x)>0 \Rightarrow e^x-1>0 \Rightarrow x>0,$ άρα από τον διπλανό πίνακα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0],$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=0.$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)=e^x-1$	- 0 +
$g(x)$	↘ Ο. ε ↗

Άρα και $g(x)\geq g(0) \Rightarrow e^x \geq x+1.$

Ε2. Από το **(Ε1)** βάζοντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει ότι

$$e^{f(x)}\geq f(x)+1 \Rightarrow e^{f(x)}+f(x)\geq 2f(x)+1 \Rightarrow x+1\geq 2f(x)+1 \Rightarrow f(x)\leq \frac{x}{2}.$$

Περιοριζόμαστε κοντά στο $-\infty$ άρα $x<0,$ οπότε $f(x)<0.$

Άρα από την $f(x)\leq \frac{x}{2}$ έχουμε $0>\frac{1}{f(x)}\geq \frac{2}{x}.$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0,$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$ αφού $f(x) < 0.$

Ε3. Εχουμε ισοδύναμα $f(x) \geq \ln(1+\frac{x}{2}) \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq 1+\frac{x}{2} \geq 1+f(x)$, από **(Ε2)** οπότε τελικά $e^{f(x)} \geq 1+f(x)$ που ισχύει από το **(Ε1)**

Β΄τρόπος

$$f(x) \geq \ln\left(1+\frac{x}{2}\right), x>0 \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq e^{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)} \overset{\text{υποθ}}{\Leftrightarrow} x+1-f(x) \geq 1+\frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x}{2}$$

που ισχύει λόγω **(Ε2).**

Επίσης επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{x}{2}) = +\infty$, θα έχουμε από

$$f(x) \geq \ln(1+\frac{x}{2}) \underset{f(x)>0}{\overset{\ln(1+\frac{x}{2})>0}{\Leftrightarrow}} 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\ln(1+\frac{x}{2})}$$

και από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

αφού και $f(x) > 0, x > 0.$

Ε4. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων e^x και $f(x)$. Και τα δυο μέλη της $f(x)+e^{f(x)} = x+1$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη προκύπτει ότι

$$f'(x)+f'(x)e^{f(x)} = 1 \Rightarrow f'(x)(1+e^{f(x)}) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{f(x)}} \quad (1).$$

Από (1) είναι $f'(x) > 0$ αφού και $1+e^{f(x)} > 0,$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

Το **2ο μέλος** της **(1)** είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (έχει αποδειχτεί πως η $\mathbf{e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Συνεπώς και η $\mathbf{f'}$ είναι παραγωγίσιμη με $\mathbf{f''(x) = -\dfrac{f'(x)e^{f(x)}}{(1+e^{f(x)})^2} < 0.}$

Έτσι η $\mathbf{f}$ είναι κοίλη στο $\mathbf{R}$.

Από τα **(Ε2)** και **(Ε3)** και αφού η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$, είναι $\mathbf{f(R) = R.}$

Ε5. Η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ και αντιστρέψιμη , αφού δείξαμε ότι είναι γνησίως αύξουσα με $\mathbf{A_{f^{-1}} = f(R) = R.}$

Θέτω $\mathbf{f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)}$ στην αρχική δοσμένη σχέση και έχουμε

$\mathbf{e^y + y = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x + x - 1, x \in R.}$

ΘΕΜΑ 116

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, για την οποία ισχύει :

$\mathbf{f(\alpha-1) > \alpha-1, f(\alpha) < \alpha}$ και $\mathbf{f(\alpha+1) > \alpha+1}$, για κάποιο $\mathbf{\alpha \in R.}$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ και η διχοτόμος του $\mathbf{1^{ου}}$ και $\mathbf{3^{ου}}$ τεταρτημορίου , έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{f'(x) - 1 = f(x) - x,}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\mathbf{(\alpha-1, \alpha+1).}$

Ε3. Αν επιπλέον η $\mathbf{f}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi \in (\alpha-1, \alpha+1),}$ ώστε $\mathbf{f''(\xi) > 0.}$

Πηγή: Θέμα 12 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

Λύση

Ε1. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.Στα διαστήματα $\mathbf{[\alpha-1, \alpha], [\alpha, \alpha+1]}$, ισχύει το θεώρημα **Bolzano** για την συνάρτηση $\mathbf{g(x) = f(x) - x,}$ αφού είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στα κλειστά διαστήματα $\mathbf{[\alpha-1, \alpha], [\alpha, \alpha+1]}$ και

$\mathbf{g(\alpha) = f(\alpha-1) - (\alpha-1) > 0, g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha < 0, g(\alpha+1) = f(\alpha+1) - (\alpha+1) > 0.}$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Bolzano** υπάρχουν $\mathbf{\rho_1, \rho_2}$ που ανήκουν αντίστοιχα στα $\mathbf{[\alpha-1, \alpha], [\alpha, \alpha+1],}$ τέτοια ώστε $\mathbf{g(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) = \rho_1, g(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_2) = \rho_2.}$

Ε2. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=(f(x)-x)e^{-x}$ στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με
$h'(x)=(f'(x)-1)e^{-x}-(f(x)-x)e^{-x}$ με $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$ λόγω **(Ε1)** οπότε σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle** άρα υπάρχει $t\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε να είναι $h'(t)=0$ οπότε $(f'(t)-1)e^{-t}-(f(t)-t)e^{-t}\Leftrightarrow f'(t)-1=f(t)-t.$

Ε3. Σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** διαστήματα $[\alpha-1,\alpha],[\alpha,\alpha+1]$ για την f θα υπάρχουν

$$\xi_1\in(\alpha-1,\alpha),\ f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(\alpha-1)}{\alpha-(\alpha-1)}=f(\alpha)-f(\alpha-1),$$
:
$$\xi_2\in(\alpha,\alpha+1),\ f'(\xi_2)=f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=f(\alpha+1)-f(\alpha),$$

και σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.**για την $[\xi_1,\xi_2]$ για την f': θα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\dfrac{f(\alpha+1)-2f(\alpha)+f(\alpha-1)}{\xi_2-\xi_1}>0$

γιατί είναι σύμφωνα με την υπόθεση :
$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha-1)>\alpha-1\\ -2f(\alpha)>-2\alpha\\ f(\alpha+1)>\alpha+1\end{array}\right|\oplus$$
$$f(\alpha+1)-2f(\alpha)+f(\alpha-1)>0$$

ΘΕΜΑ 117

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και $xf'(x)-2f(x)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in(0,+\infty)$.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ε3. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R διερχόμενη από το σημείο $(1,0)$ τέτοια ώστε, $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{\ln^2 x}$.

Πηγή: Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Η h παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\frac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\frac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}=\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}>0,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty).$$

Επειδή $h'(x)>0,$ για κάθε $x\in(0,+\infty),$ έχουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty).$

Ε2. Από την δοσμένη σχέση έχουμε ότι για $x>0$

$$xf'(x)-2f(x)=x\Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=x^2\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x}+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $0=-1+c\Leftrightarrow c=1.$

Επομένως $\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x}+1\Leftrightarrow f(x)=x^2-x,x>0.$

Συνεπώς $f(x)=x^2-x,x>0$, που επαληθεύει την $xf'(x)-2f(x)=x.$

Ε3. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)}{\ln^2x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{g'(x)}{\frac{2\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{xf(x)}{2\ln x}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x^2-x)}{2\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2}{2\ln x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x}{\frac{2}{x}}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 118 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}$ για κάθε $x>0.$

Ε1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2$ για κάθε $x>0.$

Ε2. Ένα σημείο M κινείται στη C_f και έστω A η προβολή του M στον άξονα $x'x.$ Το σημείο A απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0),$ με ρυθμό $\frac{2\mu o v}{sec}.$ Τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι $3,$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

α. των αποστάσεων AM και $OM,$

β. της γωνία $MOA,$

γ. της απόστασης OB, όπου B το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f

στο $\mathbf{M}$ με τον άξονα $\mathbf{x'x}$.

Πηγή: Β.Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση

Ε1. Για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε:

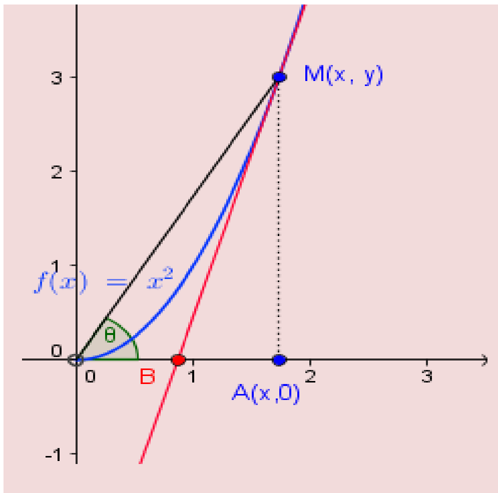
$$\mathbf{f'(x)=\frac{2f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x)-\left(x^2\right)'f(x)}{\left(x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}=c}$$

$\mathbf{\Leftrightarrow f(x)=cx^2}$, όπου $\mathbf{c\in R}$.

Έχουμε $\mathbf{f(1)=1 \Rightarrow c=1}$.

Άρα για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε: $\mathbf{f(x)=x^2}$.

Ε2. Επειδή το $\mathbf{x}$ είναι συνάρτηση του χρόνου $\mathbf{t}$, έχουμε $\mathbf{x=x(t)}$ με $\mathbf{x'(t)=2}$ μονάδες μήκους/sec .



Η απόσταση $\mathbf{AM}$ δίνεται από την απόλυτη τιμή της τεταγμένης του σημείου $\mathbf{M}$, δηλ. την $\mathbf{y(t)=x^2(t)}$.

Τότε $\mathbf{y'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=2\cdot3\cdot2=12}$ μονάδες μήκους/sec.

α) Η απόσταση $\mathbf{OM}$ δίνεται από την

$$\mathbf{d(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+x^4(t)}\overset{x(t)>0}{=}x(t)\sqrt{1+x^2(t)}}.$$

Οπότε $\mathbf{d'(t)=\frac{1+2x^2(t)}{\sqrt{1+x^2(t)}}\cdot x'(t)\Rightarrow d'(t_0)=\frac{19\sqrt{10}}{5}}$ **μονάδες μήκους/sec.**

β) Έστω $\mathbf{\theta=\theta(t)}$ η γωνία $\mathbf{MOA}$.

Τότε: $\mathbf{\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=x(t)\Rightarrow\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=x'(t)\Rightarrow\theta'(t)\left[1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right]=x'(t)}$

$$\mathbf{\Rightarrow\theta'(t)\left[1+x^2(t)\right]=x'(t)\Rightarrow\theta'(t_0)\left[1+x^2(t_0)\right]=2\Rightarrow\theta'(t_0)=\frac{1}{5}}\ \text{rad/sec}.$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στο τυχαίο σημείο της $\mathbf{(\alpha,f(\alpha))}$ είναι:

$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y=2\alpha x-\alpha^2$ και τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$.

Άρα το σημείο $\mathbf{B}$ έχει τετμημένη $\frac{1}{2}x(t)$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής του $\mathbf{OB}$ είναι $\frac{1}{2}x'(t_o)=1$ **μονάδες μήκους/sec.**

ΘΕΜΑ 119

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R,\ \alpha>0$

Αν το πολυώνυμο έχει τρείς πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 να αποδείξετε ότι :

Ε1. $\beta^2>3\alpha\gamma$.

Ε2. Το πολυώνυμο παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα.

Ε3. Αν x_1,x_2, οι θέσεις τοπικών ακροτάτων τότε: $P''(x_1)+P''(x_2)=0$.

Ε4. Δεν είναι δυνατόν το πολυώνυμο να έχει σημείο καμπής σε κάποιο από τα x_1,x_2.

Ε5. Ανάμεσα στα ακρότατα έχει ακριβώς ενα σημείο καμπής .

Ε6. Αν η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+\gamma x+\delta}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=2x+25$ και κατακόρυφες τις $x=-1, x=13$ να αποδείξετε ότι $P(x)=2x^3+x^2-12x-13$.

Λύση

Ε1. Έχουμε $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R,\ \alpha>0,\quad x\in R.$

Το πολυώνυμο $\mathbf{P}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ με
$P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma,\quad x\in R.$

Και το P' παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ με $P''(x)=6\alpha x+2\beta,\quad x\in R$

Γνωρίζουμε οτι το πολυώνυμο έχεις τρείς ρίζες, έστω (χωρίς βλάβη της γενικότητας) $\rho_1<\rho_2<\rho_3$

Τότε έχουμε $P(\rho_1)=P(\rho_2)=P(\rho_3)=0$ και από εφαρμογή του θεωρήματος **Rolle** στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ έχουμε ότι υπάρχουν $x_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $x_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $P'(x_1)=P'(x_2)=0$.

Όμως η P' πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, η οποία έχει δύο ρίζες, άρα
$\Delta>0\Leftrightarrow(2\beta)^2-4\cdot3\alpha\cdot\gamma>0\Leftrightarrow 4\beta^2>12\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta^2>3\alpha\gamma.$

Ε2. Σαν δευτέρου βαθμού που έχει δύο ρίζες, και μοναδικές τις $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ και επειδή εκατέρωθεν των ριζών το τριώνυμο αλλάζει πρόσημο τα x_1, x_2 είναι οι μοναδικές θέσεις τοπικών ακρότατων του $P(x)$.

Ε3. Από τύπους **Vietta** στο $P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{2\beta}{3\alpha}$

Έχουμε $P''(x_1) + P''(x_2) = 6\alpha x_1 + 2\beta + 6\alpha x_2 + 2\beta = 6\alpha(x_1 + x_2) + 4\beta =$

$$= 6\alpha \cdot \left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right) + 4\beta = -4\beta + 4\beta = 0$$

Ε4. Αν $P''(x_1) = 0$ τότε επειδή $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$ έχουμε πως και $P''(x_2) = 0$, δηλαδή η $P''(x) = 0$ έχει δύο ρίζες, που είναι άτοπο ,διότι το P'' πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Ε5. Επειδή $P'(x_1) = P'(x_2) = 0$, από εφαρμογή του θεωρήματος του **Rolle** για την P' στο $[x_1, x_2]$ έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $P''(x_0) = 0$.

Όμως η $P''(x) = 0$ σαν εξίσωση πρώτου βαθμού, έχει μόνο μια λύση

Συγκεκριμένα $P''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-\beta}{3\alpha}$ και επειδή εκατερωθεν της ρίζας το πολυώνυμο του πρώτου βαθμού αλλάζει πρόσημο το πολυώνυμο **P** παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = \dfrac{-\beta}{3\alpha}$

Ε6. Έχουμε $f(x) = \dfrac{P(x)}{x^2 + \gamma x + \delta} = \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{x^2 + \gamma x + \delta}$

Επειδή οι $x = -1$ και η $x = 13$ κατακόρυφες ασύμπτωτές της f, έχουμε ότι οι $x = -1$ και η $x = 13$ αναγκαία ρίζες του τριωνύμου $x^2 + \gamma x + \delta$.

Έτσι από τύπους **Vietta** έχουμε $\gamma = -12$ και $\delta = -13$

Γνωρίζουμε ότι η $y = 2x + 25$ ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, οπότε

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2x) = 25$$

Έχουμε $2 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{x^3 + \gamma x^2 + \delta x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\alpha x^3}{x^3} = \alpha$

Και $25 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{2x^3 + \beta x^2 - 12x - 13}{x^2 - 12x - 13} - 2x\right) =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+\beta x^2-12x-13-2x^3+24x^2+26x}{x^2-12x-13}\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(\beta+24)x^2+14x-13}{x^2-12x-13}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(\beta+24)x^2}{x^2}\right)=\beta+24$$

Οπότε $\beta=1$. Συνεπώς $P(x)=2x^3+x^2-12x-13$

ΘΕΜΑ 120

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e, f'(1)=0$.

Ε1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Ε2. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$.

Ε3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$.

Ε4. Να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)$ είναι στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι $y=\frac{1}{2}(\sqrt{e})x+(\sqrt{e})$.

β. $2xe^{\frac{1}{x}}\geq(x+2)(\sqrt{e})$ για κάθε $x>0$.

Λύση

Ε1. Έχουμε $g(x)=xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}, x>0$.

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=xf''(x)-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\overset{x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}}}{=}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x^3}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

Έχουμε $g'(x)=0\Rightarrow g(x)=c$.

Ε2. Οπότε για $x=1$ έχουμε $g(1)=c\Leftrightarrow f'(1)-f(1)+e=c\Leftrightarrow c=0.$

$$xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=-e^{\frac{1}{x}}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}+c_1.$$

Για $x=1$ έχουμε $f(1)=e+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$, συνεπώς $\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x)=xe^{\frac{1}{x}}, x>0,$ που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε3. Είναι $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})=\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ με τιμή $f(1)=e.$
Ορίζουμε $A_1=(0,1], A_2=(1,+\infty).$
Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη .

Έχουμε $f(A_1)=[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))=[e,+\infty)$ και $f(A_2)=(\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))=(e,+\infty)$, συνεπώς η f έχει σύνολο τιμών $f(A_1)\cup f(A_2)=[e,+\infty)$.

α. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ και $f'(x)=\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Οπότε $f(2)=2e^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{e}$ και $f'(2)=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{e}}{2}$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2,f(2))$ είναι η

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-2\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{2}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{e}}{2}x+\sqrt{e}.$$

β. $f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}, x>0.$

Έχουμε πως για κάθε $x>0$ ισχύει $f''(x)>0.$ Επομένως η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$. Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάντα πάνω από την γραφική παράσταση της εφαπτομένης, με εξαίρεση το σημείο επαφής.
Συνεπώς για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x)\ge \frac{\sqrt{e}}{2}x+\sqrt{e} \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} \ge \frac{\sqrt{e}}{2}x+\sqrt{e} \Leftrightarrow 2xe^{\frac{1}{x}} \ge \sqrt{e}x+2\sqrt{e} \Leftrightarrow 2xe^{\frac{1}{x}} \ge \sqrt{e}(x+2)$$

και η γραφική παράσταση.

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Συλλογή 60 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 29/01/2012 – 17/02/2012

Πηγή – Απαντήσεις

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=22769

Έλυσαν οι:

Απόστολος Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιάννης Κουτσούκος
Δημήτρης Κατσίποδας
Διονύσης Βουτσάς
Θάνος Μάγκος
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Νίκος Αλεξανδρόπουλος
Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης
Παναγίωτης Χρονόπουλος
Παύλος Σταυρόπουλος
Περικλής Παντούλας
Στάθης Κούτρας
Χάρης Γ. Λάλας
erxmer
parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 121

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$, με $\mathbf{f(x)\neq 0}$ για κάθε $\mathbf{x\in R}$, ώστε να ισχύει:

$\mathbf{f(x)=1+x^2\int_0^1 \frac{t}{f(xt)}dt}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Ε1. Να δείξετε ότι $\mathbf{f(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f}$.

Ε3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{f}$ όταν $\mathbf{x\to -\infty}$

Ε4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=\int_{-x}^{x}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt, x\in R}$, είναι σταθερή.

Ε5. Αν $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$, να δείξετε ότι ισχύει $\mathbf{|f(\beta)-f(\alpha)|\leq|\beta-\alpha|}$

Πηγή:Γ.Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Γνωρίζουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ καθώς και για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f(x)\neq 0}$. Έστω οτι η $\mathbf{f}$ δεν διατηρεί σταθέρο πρόσημο , τότε υπάρχουν $\mathbf{x_1,x_2\in R}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ τέτοια ώστε $\mathbf{f(x_1)f(x_2)<0}$.
Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, θα είναι συνεχής και στο $\mathbf{[x_1,x_2]}$.
Επίσης $\mathbf{f(x_1)f(x_2)<0}$. Επομένως , από θεώρημα **Bolzano**, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\mathbf{(x_1,x_2)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(\xi)=0}$, **άτοπο**, διότι για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f(x)\neq 0}$.
Συνεπώς η $\mathbf{f}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{R}$. Όμως, για $\mathbf{x=0}$ έχουμε $\mathbf{f(0)=1>0}$. Τελικά, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f(x)>0}$.

Ε2. Θέτουμε $\mathbf{xt=u}$ και τότε $\mathbf{xdt=du}$. Για $\mathbf{t=0}$ έχουμε $\mathbf{u=0}$ και για $\mathbf{t=1}$ έχουμε $\mathbf{u=x}$. Οπότε , $\mathbf{f(x)=1+x^2\int_0^1\frac{t}{f(xt)}dt=1+\int_0^1\frac{tx}{f(t)}xdt=1+\int_0^x\frac{u}{f(u)}du}$. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε και η $\mathbf{\frac{u}{f(u)}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Άρα η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\mathbf{\int_0^x\frac{u}{f(u)}du}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, συνεπώς η $\mathbf{1+\int_0^x\frac{u}{f(u)}du}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Έτσι έχουμε,ότι η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, με

$\mathbf{f'(x)=\frac{x}{f(x)}}$. Οπότε , $\mathbf{f'(x)=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x\Rightarrow}$

$\mathbf{(f^2(x))'=(x^2)'\Rightarrow f^2(x)=x^2+c, c\in R}$.

Για $\mathbf{x=0}$ έχουμε $\mathbf{c=1}$, οπότε $\mathbf{f^2(x)=x^2+1}$. Επειδή για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f(x)>0}$, έχουμε $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+1}}$, που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε3. Ψάχνουμε στο $-\infty$, ασύμπτωτη της μορφής $\mathbf{y=\lambda x+\beta}$ με $\mathbf{\lambda,\beta\in R}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-1.$$

Επομένως $\lambda=-1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}=0.$$

Άρα $\beta=0$, οπότε η ευθεία $y=-x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Ε4. $$g(x)=\int_{-x}^{x}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt=\int_{0}^{x}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}dt-\int_{0}^{-x}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Επειδή η $\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις των ολοκληρωμάτων

$\int_{0}^{x}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ και $\int_{0}^{-x}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Οπότε η g παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ στο, με $g'(x)=\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\eta\mu(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $g'(x)=0$, παίρνουμε ότι η g είναι σταθερή.

Β΄ τρόπος για το Ε4.

Έστω $h(t)=\frac{\eta\mu t}{f(t)}=\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t^2+1}}$. Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει $-t\in\mathbb{R}$ και $h(-t)=-h(t)$.

Άρα η h είναι περιττή, οπότε $\int_{-x}^{x}h(t)dt=0\Rightarrow g(x)=0$ (*)

(*) Είναι: $\int_{-x}^{x}h(t)dt=\int_{0}^{x}h(t)dt-\int_{0}^{-x}h(t)dt$

Θέτω $t=-u$, έχουμε $dt=-du$. Για $t=0$ έχω $u=0$, ενώ για $t=-x$ έχω $u=x$,

οπότε $\int_{0}^{-x}h(t)dt=-\int_{0}^{x}h(-u)du=\int_{0}^{x}h(u)du$. Επομένως,

$$\int_{-x}^{x}h(t)dt=\int_{0}^{x}h(t)dt-\int_{0}^{-x}h(t)dt=\int_{0}^{x}h(t)dt-\int_{0}^{x}h(t)dt=0.$$

Ε5. Για $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα στη σχέση $|f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$

Για $\alpha<\beta$ (όμοια αν $\alpha>\beta$), θέλουμε να δείξουμε $\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le 1$.

Έστω ότι $\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|>1$, τότε έχουμε:

Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), οπότε από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Οπότε $|f'(\xi)|=\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|>1$, δηλαδή $\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}>1\Leftrightarrow \xi>\sqrt{\xi^2+1}\Leftrightarrow \xi^2>\xi^2+1$,

άτοπο. Συνεπώς $\left|\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le 1\Leftrightarrow |f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$.

ΘΕΜΑ 122

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\displaystyle\int_2^x e^{\frac{1}{t-1}}dt$

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Ε2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ έχει σημεία καμπής

Ε3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$

Ε4. Να αποδείξετε οτι $f(x)\le ex-2e$ για κάθε $x>1$

Ε5. Αν $\mathbf{E}$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=2$ και $x=4$, να αποδείξετε οτι $E\le 2e$

Πηγή: Ι.Γαρατζιώτης - Π.Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)

Λύση:

Ε1. Έστω $g(t)=e^{\frac{1}{t-1}}$. Για να ορίζεται η $\mathbf{g}$ πρέπει $t\neq 1$.
Άρα, $A_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και αφού και $2\in(1,+\infty)$ θα είναι και $A_f=(1,+\infty)$

Ε2. Η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και η $\mathbf{f}$ θα είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ και αφού η $e^{\frac{1}{x-1}}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' θα είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}<0$, συνεπώς η $\mathbf{f}$ θα είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$ και δεν θα παρουσιάζει σημεία καμπής.

Ε3. Είναι $f(2)=0$ και $f'(2)=e$ άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία $y-0=e(x-2)\Rightarrow y=ex-2e$.

Ε4. Αφού η $\mathbf{f}$ είναι κοίλη, η C_f θα βρίσκεται πάντα κάτω από την εφαπτομένη της στο $A(2,f(2))$, με εξαίρεση το σημείο επάφής $\mathbf{A}$, άρα θα ισχύει και $f(x)\le ex-2e, x>1$.

Ε5. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που ψάχνουμε , θα είναι $E(\Omega)=\int_2^4 |f(x)|dx$ (1), όμως από το **(Ε2)** έχουμε $f'(x)=e^{\frac{1}{x-1}}>0$.

Άρα η f θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Έτσι για $x>2 \Rightarrow f(x)>f(2) \Rightarrow f(x)>0$ και $E(\Omega)=\int_2^4 f(x)dx$

Από το **(Ε4)** έχουμε

$$f(x)\le ex-2e \Rightarrow f(x)-(ex-2e)\le 0 \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx-\int_2^4 (ex-2e)dx\le 0 \Rightarrow$$

$$E(\Omega)\le \int_2^4 (ex-2e)dx=\left[\frac{ex^2}{2}-2ex\right]_2^4=e(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2})-2e(4-2)\Rightarrow E(\Omega)\le 2e.$$

ΘΕΜΑ 123

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt.$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$

Ε2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_0)=f(1)+\int_0^1 f(t)dt.$$

Ε3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\int_1^x f(t)dt+c$ με $c\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f(1)$

Ε4. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi\in(0,1)$, τότε να αποδείξετε ότι $f(\xi)=\dfrac{f(1)}{\xi^2+1}$.

Πηγή: Ι.Γαρατζιώτης - Π.Μάστακας (εκδόσεις Κέδρος)

Λύση:

Ε1. Επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[0,1]$ και $1\in[0,1]$, η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[0,1]$ (δηλαδή παραγωγίσιμη στο $[0,1]$) και με $x, f(x)$ παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ (ταυτοτική - δεδομένο) προκύπτει ότι η $f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ (πράξεις με παραγωγίσιμες) δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f''(x)=2f(x)+xf'(x)$.

Ε2. Για $x=0 \overset{f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt}{\Rightarrow} f'(0)=\int_1^0 f(t)dt \Rightarrow f'(0)=-\int_0^1 f(t)dt,(1).$

Και για $x=1 \overset{f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt}{\Rightarrow} f'(1)=f(1)+\int_1^1 f(t)dt \Rightarrow f'(1)=f(1),(2).$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, από **ΘΜΤ** για την f' στο $[0,1]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε:

$$f''(x_0)=\frac{f'(1)-f'(0)}{1-0} \overset{f'(1)=f(1),\, f'(0)=-\int_0^1 f(t)dt}{\Rightarrow} f''(x_0)=f(1)+\int_0^1 f(t)dt.$$

Ε3. Από

$$f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow f'(x)=x\left(\int_1^x f(t)dt\right)'+(x)'\int_1^x f(t)dt \Leftrightarrow$$

$f'(x)=\left(x\int_1^x f(t)dt\right)' \Rightarrow f(x)=x\int_1^x f(t)dt+c, c\in R:(3)$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=c$. Ενώ για $x=1$ έχουμε $f(1)=c$. Επομένως $f(0)=f(1)=c.$

Ε4. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο $\xi\in(0,1) \overset{Fermat}{\Rightarrow} f'(\xi)=0$ και από $f'(x)=xf(x)+\int_1^x f(t)dt$ για $x=\xi$ έχουμε

$$f'(\xi)=\xi f(\xi)+\int_1^\xi f(t)dt \overset{f'(\xi)=0}{\Rightarrow} \xi f(\xi)+\int_1^\xi f(t)dt=0.$$

Οπότε έχουμε $f(x)=x\int_1^x f(t)dt+c$ και για $x=\xi$ έχουμε $f(\xi)=\xi\int_1^\xi f(t)dt+c$.

Όμως $f(1)=c$ οπότε $f(\xi)=\xi\int_1^\xi f(t)dt+f(1)\Rightarrow \int_1^\xi f(t)dt=\frac{f(\xi)-f(1)}{\xi}$. Επομένως

$$-\xi f(\xi)=\frac{f(\xi)-f(1)}{\xi} \Leftrightarrow -\xi^2 f(\xi)=f(\xi)-f(1) \Leftrightarrow f(\xi)(\xi^2+1)=f(1) \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{f(1)}{\xi^2+1}.$$

ΘΕΜΑ 124 — Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

Ε1. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

Ε2. Να δείξετε ότι $0<\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$

Ε3. Να δείξετε ότι $\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt = x, x\in R$

Ε4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον xx' και τις ευθείες $x=0, x=1$.

Πηγή: Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση:

Ε1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt.$

Πρέπει $x+\sqrt{x^2+1}>0$,που ισχύει για κάθε $x\in R$, διότι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$

Η $\frac{1}{1+t^2}$ συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα η f παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{1}{1+x^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}>0\overset{1+x^2>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2+1}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>1\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$$

Επομένως για κάθε $x\in R$ έχουμε $f'(x)\geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ε2. Έχουμε $f(0)=0$ και

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt=\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ακόμα για κάθε $t\in R$ έχουμε $\frac{1}{t^2+1}>0\Rightarrow\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{t^2+1}dt>0$.

Έχουμε , $f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt.$ Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R ,

έχουμε $0<\frac{3}{4}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(0)<f\left(\frac{3}{4}\right)\Rightarrow 0=f(0)<f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt\Leftrightarrow$

$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt < \ln 2$. Επομένως, $0 < \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt < \ln 2$.

Ε3. Θεωρώ $h(x) = \int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}dt$, η $\frac{1}{1+t^2}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1.$

Συνεπώς $h'(x) = 1 \Rightarrow h(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$.

Όμως $h(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2}dt = 0$. Για $x = 0$ έχουμε $c = 0$, άρα $h(x) = x \Leftrightarrow \int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}dt = x$

Ε4. Για $x = \frac{\pi}{4}$ η σχέση $\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}dt = x$ μας δίνει $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Έχουμε ότι για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq 0$, οπότε

$$E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)' f(x)dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= f(1) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = f(1) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 =$$

$$f(1) - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 125

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\int_0^{f(x)} (e^t + 1)dt = x.$

Ε1. Να δείξετε ότι η $f(x)$, αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}(x)$

Ε2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x = 0, y = 0, x = e$

Ε3. Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Ε4. $\int_{2009}^{2010} f(t)dt < \int_{2010}^{2011} f(t)dt$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε,

$$\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x \Leftrightarrow [e^t+t]_0^{f(x)}=x \Leftrightarrow [e^{f(x)}+f(x)]-[e^0+0]=x \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)-1=x.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x-1, x\in R.$

Έχουμε $g'(x)=e^x+1$. Οπότε για κάθε $x\in R$ έχουμε $g'(x)>0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Επίσης έχουμε $g(f(x))=x$ οπότε $f(x)=g^{-1}(x)$.

Σημειώση: Επειδή δίνεται το σύνολο τιμών της f, δεν χρειάζεται να το βρούμε. Διαφορετικά αντιμετωπίζεται σαν τα θέματα **153** και **164**.

Για $x=0$ προκύπτει $\int_0^{f(0)}\left(e^t+1\right)dt=0$ (1) .Επειδή για κάθε $t\in R$ έχουμε $e^t+1>0$,από (1) προκύπτει ότι $f(0)=0$

Έχουμε $e^{f(x)}+f(x)=x+1$. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε ότι $f^{-1}(x)=e^x+x-1, x\in R$

Ε2. Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)\Rightarrow e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)}$.

Οπότε $e^{f(x_1)}+f(x_1)-1\geq e^{f(x_2)}+f(x_2)-1\Rightarrow x_1\geq x_2$ **άτοπο.**

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $\int_0^e f(x)dx$. Θέτοντας $f(x)=u$ ισοδύναμα προκύπτει $x=f^{-1}(u)\Leftrightarrow x=e^u+u-1$ και διαφορίζοντας $dx=(e^u+1)du$.

Όταν $x_1=0$,τότε $e^u+u-1=0$.

Από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει μοναδική λύση $u_1=0.$

Όταν $x_2=e,$ τότε $e^u+u-1=e.$

Από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει μοναδική λύση $u_2=1.$

Επομένως, $E=\int_0^e f(t)dt=\int_0^1 u(e^u+1)du=\int_0^1 ue^u du+\int_0^1 udu\Leftrightarrow$.

$$E=\left[ue^u\right]_0^1-\int_0^1 e^u du+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\left[ue^u\right]_0^1-\left[e^u\right]_0^1+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}\text{τ.μ.}$$

Ε3. Εργάζομαι με τη συμμετρία των γραφικών παραστάσεων των f,f^{-1} ως προς την ευθεία $y=x$. Με χρήση των κανόνων **De L'Hospital** έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+x-1}{x}=+\infty$. Άρα, η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x-1}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f^{-1}(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x-1-x)=-1$

Άρα η f^{-1} έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=x-1$.

Η συμμετρική της ως προς την $y=x$ είναι η $y=x+1$, άρα η f έχει ασύμπτωτη την $y=x+1$.

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u)=\int_0^u f(t)dt$

Η F είναι συνεχής στο $[x,x+1]$, παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$.

Οπότε, από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow$

$f(\xi)=\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt\Leftrightarrow f(\xi)=\int_x^{x+1}f(t)dt$.

Άρα σε κάθε διάστημα της μορφής $(x,x+1)$ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$f(\xi)=\int_x^{x+1}f(t)dt$. Οπότε στο $(2009,2010)$ υπάρχει $\xi_1\in(2009,2010)$ τέτοιο ώστε

$f(\xi_1)=\int_{2009}^{2010}f(t)dt.$ Όμοια, στο $(2010,2011)$ υπάρχει $\xi_2\in(2010,2011)$

τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=\int_{2010}^{2011}f(t)dt.$

Από τη μονοτονία της f στα διαστήματα $[2009,2010],[2010,2011]$ έχουμε

$2009<\xi_1<2010<\xi_2<2011\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(\xi_1)<f(\xi_2)$. Οπότε, $\int_{2009}^{2010}f(t)dt<\int_{2010}^{2011}f(t)dt.$

ΘΕΜΑ 126 — Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Έστω η συνάρτηση $f(x)$,συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

Αν $g(x):R\to R$, συνάρτηση με $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt, t\in R, x\in R$

και ο μιγαδικός $z:|z-2+i|=|z+2-i|,(1)$,τότε:

Ε1. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y=2x$.

Ε2. Αν η ευθεία ε, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f ,στο $+\infty$ να βρείτε τον $\kappa\in R$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{xf(\frac{1}{x})-5x^2\eta\mu(\frac{1}{x})+\kappa}{f(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}+2}\right)=10$

Ε3. Να αποδείξετε ότι: $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du, & x\neq0\\ f(0), & x=0\end{cases}$

Ε4. Να αποδείξετε οτι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Ε5. Αν ο μιγαδικός $z=\int_1^2 f(t)dt + i\int_0^2 f(t)dt$ ικανοποιεί τη σχέση (1) να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=f(\xi)$.

Λύση:

Ε1. Έστω $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$|z-2+i|=|z+2-i| \Leftrightarrow |x+yi-2+i|=|x+yi+2-i| \Leftrightarrow$$
$$|(x-2)+(y+1)i|=|(x+2)+(y-1)i| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1 \Leftrightarrow 4y=8x \Leftrightarrow y=2x.$$

Συνεπώς οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y=2x$.

Ε2. Επειδή η ευθεία (ε) $y=2x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$.

αρχικά $\left|\frac{5\eta\mu u}{u^2}\right| \le \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{u^2} \le \frac{5\eta\mu u}{u^2} \le \frac{1}{u^2}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u^2}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u^2}\right)=0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{5\eta\mu u}{u^2}\right)=0$

$$10=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(\frac{1}{x})-5x^2\eta\mu\frac{1}{x}+\kappa}{f(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}+2} \overset{(*)}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{f(u)}{u}-\frac{5\eta\mu u}{u^2}+\kappa}{f(u)-2u+2}=\frac{2-0+\kappa}{0+2}=\frac{\kappa+2}{2}$$

Οπότε $\frac{\kappa+2}{2}=10 \Leftrightarrow \kappa=18$

(*) Θέτω $\frac{1}{x}=u$, έχω ότι $\lim\limits_{x\to0^+}u=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

Ε3. Έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, οπότε για $x=0$ έχουμε

$$g(0)=\int_0^1 f(0)dt=f(0)\int_0^1 dt=f(0)[t]_0^1=f(0).$$

Για $x\neq0$ θέτουμε $xt=u$, οπότε $dt=\frac{du}{x}$.

Για $t=0$, έχουμε $u=0$. Ενώ για $t=1$, έχουμε $u=x$

Συνεπώς για $x\neq0$ έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x\frac{f(u)du}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

Επομένως, $\mathbf{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du, x\neq 0\\ f(0), x=0\end{cases}$

Ε4. Έχουμε ότι η $\mathbf{f(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Η $\dfrac{1}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, άρα η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du-xf(0)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{f'(0)}{2}.$$

Επομένως η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)du+\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ \dfrac{f'(0)}{2}, x=0\end{cases}$

Ε5. Έχουμε $z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt\Leftrightarrow \alpha+2\alpha i=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt$

Οπότε $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=\alpha$ και $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=2\alpha$

Όμως $\displaystyle\int_1^2 f(t)dt=\alpha\Leftrightarrow\int_1^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=\alpha\Leftrightarrow\int_1^0 f(t)dt+2\alpha=\alpha\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)dt=\alpha$

Η $\mathbf{g}$ συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Συνεπώς από **ΘΜΤ** έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=g(2)-g(1)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt=\alpha-\alpha=0$$

Δηλαδή $g'(\xi)=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\xi^2}\displaystyle\int_0^\xi f(u)du+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\xi}\displaystyle\int_0^\xi f(u)du+f(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du=f(\xi)\Leftrightarrow g(\xi)=f(\xi).$$

ΘΕΜΑ 127

Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με την $\mathbf{f''}$ συνεχή στους πραγματικούς αριθμούς. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f''}$ ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2=f(x)f'(x), f(0)=2f'(0)=1$ τότε

Ε1. Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f}$

Ε2. Να αποδείξετε ότι για $\alpha>0$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2004}\ln f(x)dx=0$

Ε3. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,1]$ να αποδείξετε ότι η $2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt=1$ έχει μία μόνο λύση στο $[0,1]$.

Πηγή: Γ. Κομπότης (εκδόσεις Κωστόγιαννος)

Λύση:

Ε1. $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow[2f(x)f'(x)]'=(f^2(x))'\Rightarrow$ $2f(x)f'(x)=f^2(x)+c, c\in R$. Για $x=0$ έχουμε $1=1+c\Leftrightarrow c=0$. 'Αρα,

$f^2(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)=[(f^2(x))]'\Leftrightarrow f^2(x)e^{-x}-[(f^2(x))]'e^{-x}=0\Leftrightarrow$

$(f^2(x)e^{-x})'=0\Rightarrow f^2(x)e^{-x}=c_1, c_1\in R$. Επειδή $f(0)=1$ έχουμε $c_1=1$, άρα $f^2(x)=e^x$

Από την τελευταία σχέση για κάθε $x\in R$ προφανώς η $f(x)\neq 0$.
Συνεπώς θα διατηρεί σταθερό πρόσημο (*) και αφού $f(0)=1>0$, θα έχουμε

$f(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Οπότε τελικά έχουμε $f(x)=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$.

(*)Σε περιπτώση που χρειάζεται να το αποδείξουμε, δουλεύουμε οπώς στο **(Ε1)** του θέματος **121.**

Ε2. Έστω $h(x)=x^{2004}\ln f(x)=x^{2004}\frac{x}{2}$

Τότε για κάθε $x\in R$ έχουμε $h(-x)=(-x)^{2004}\cdot\frac{-x}{2}=-h(x)$

Άρα η g είναι περιττή, οπότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} h(x)dx=0$ (**)

(**) Είναι: $\int_{-x}^{x} h(t)dt=\int_0^x h(t)dt-\int_0^{-x} h(t)dt$

Θέτω $t=-u$, έχουμε $dt=-du$. Για $t=0$ έχω $u=0$, ενώ για $t=-x$ έχω $u=x$, οπότε $\int_0^{-x} h(t)dt=-\int_0^x h(-u)du=\int_0^x h(u)du$

Επομένως $\int_{-x}^{x} h(t)dt=\int_0^x h(t)dt-\int_0^{-x} h(t)dt=\int_0^x h(t)dt-\int_0^x h(t)dt=0.$

Ε3. Η g έχει σύνολο τιμών το $[0,1]$ οπότε: $0\leq g(x)\leq 1.$

Όμως, $1+f^2(x)>1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+f^2(x)}<1$. Άρα,

$$0\le \frac{g(x)}{1+f^2(x)}\le 1\Leftrightarrow 1-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\ge 0\Rightarrow \int_0^1\left(1-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\right)dx>0\Rightarrow$$

$$1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0$$

Έστω τώρα η συνεχής στο $[0,1]$, συνάρτηση r με $r(x)=2x-\int_0^x\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1.$

Έχουμε $r(0)=-1<0$ και $r(1)=1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0.$

Οπότε από θεώρημα **Bolzano,** η r έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$

Όμως η συνάρτηση $\frac{g(t)}{1+f^2(t)}-1$ είναι συνεχής στο $[0,1]$,άρα η συνάρτηση r είναι παραγωγίσιμη με $r'(x)=2-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\ge 1$, όποτε η r είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 128

Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f[1,2]\to R$ για την οποία δίνονται $f''(x)<0, x\in[1,2]$, $f(1)=0, f(2)=2, f'(2)=1$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Ε2. Να αποδειξετε ότι η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Ε3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)<-1$

Ε4. Να αποδείξετε ότι

α. $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>\frac{f(2)-f(x)}{2-x}, x\in(1,2)$

β. $f(x)\ge 2(x-1), x\in[1,2]$

γ. $\int_1^2 f(x)dx\ge 1$

Ε5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=2$ τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο τη γραφική παράσταση της f

Ε6. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$, με $\xi_1<\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$

Πηγή: Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f''(x)<0, x\in[1,2]$, αφού επιπλέον η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη , έχουμε ότι η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Η $\mathbf{f'}$ στο κλειστό $[1,2]$,παρουσιάζει, ως συνεχής, ελάχιστη τιμή στο $x_0=2$ Άρα $f'(x)\ge f'(2)=1>0$. Η $\mathbf{f}$ λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, με σύνολο τιμών $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[0,2]$.

Ε2. Η εφαπτομένη της C_f στο $(2,f(2))=(2,2)$ έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=x$

Ε3. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2$. Η $\mathbf{f'}$ είναι συνεχής στο $[\xi,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi,2)$, από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει $x_0\in(\xi,2)\subset(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=\dfrac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi}=\dfrac{-1}{2-\xi}<-1.$

Ε4. **α.** Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, επομένως εφαρμόζεται το **Θ.Μ.Τ** στα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,2]$ και έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in(x,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$.. Τότε για $\xi_1<\xi_2$ παίρνουμε

$\xi_1<\xi_2\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$, αφού η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

β. Η σχέση $f(x)\ge 2(x-1)$ ισχύει ως ισότητα για $x=1$ και $x=2$. Για $x\in(1,2)$ από το **(Ε4.α.)** έχουμε $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}\Rightarrow f(x)>2(x-1).$

γ. Από το **(Ε4.β)** έχουμε $f(x)\ge 2(x-1)\Rightarrow f(x)-2(x-1)\ge 0$
Επιπλέον η $f(x)-2(x-1)$ συνεχής και συνεπώς

$$\int_1^2\big(f(x)-2(x-1)\big)dx\ge 0\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx\ge\int_1^2 2(x-1)dx=1$$

Ε5. Έστω η συνάρτηση $h(x)=2-x$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $s(x)=f(x)-h(x)=f(x)-2+x, x\in[1,2]$. Η $s(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ αφού η $\mathbf{f}$ συνεχής και επιπλέον $s(1)=-1<0$ και $s(2)=2>0$. Από θεώρημα **Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε,
$s(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)-h(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=h(x_1)$.
Επιπλέον η $s(x)$ γνησίως αύξουσα , αφού $s'(x)=f'(x)+1>0$. Οπότε το x_1 μοναδικό.

Ε6. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,x_1]$ και $[x_1,2]$, παραγωγίσιμη στα $(1,x_1)$ και $(x_1,2)$,οπότε από **Θ.Μ.Τ** υπάρχουν $\eta_1 \in (1,x_1)$ και $\eta_2 \in (x_1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\eta_1)=\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}=\dfrac{2-x_1}{x_1-1}$ και

$$f'(\eta_2)=\frac{f(2)-f(x_1)}{2-x_1}=\frac{x_1}{2-x_1}.$$

Τότε $f'(\eta_1)\cdot f'(\eta_2)=\dfrac{2-x_1}{x_1-1}\dfrac{x_1}{2-x_1}=\dfrac{x_1}{x_1-1}$ και $f'(\eta_1)+2=\dfrac{2-x_1}{x_1-1}+2=\dfrac{x_1}{x_1-1}$.

ΘΕΜΑ 129

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνονται f,g,φ συνεχείς στο R με $0<\alpha<\beta$, $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, $\varphi(x)>0$ και

$$h(x)=\frac{\int_0^x t\varphi(t)dt}{\int_0^x \varphi(t)dt} \text{ και } \int_{h(2)}^{h(-1)} f(x)dx>0.$$

Ε1. Να δειχτεί ότι η h γνησίως αύξουσα για $x>0$ και h γνησίως αύξουσα για $x<0$.

Ε2. Αν $h(0)=0$,να δείξετε ότι η $h(x)$ είναι $1-1$ στο R

Ε3. Αν f γνησίως αύξουσα και η $g(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (\alpha ,\beta)$, να δείξετε ότι: αν $f(\beta)>g(\beta)$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta g(x)dx$ τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi_o \in [\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi_o)=g(\xi_o)$.

Ε4. Να δειχτεί ότι αν $h(0)=0,$ υπάρχει ξ ώστε

$$h\left(\frac{\int_\beta^\xi g(x^x)dx}{\xi-\alpha}\right)=h\left(\frac{f(\xi^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}\right)$$

Πηγή: Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Για να ορίζεται η συνάρτηση h πρέπει $\int_0^x \varphi(t)dt \neq 0$.Έχουμε πως για κάθε $t \in R$ ισχύει $\varphi(t) > 0$, οπότε για $x > 0$ έχουμε $\int_0^x \varphi(t)dt > 0$.

Ενώ για $x < 0$ έχουμε $\int_x^0 \varphi(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x \varphi(t)dt < 0$. Τέλος , για $x = 0$ έχουμε $\int_0^0 \varphi(t)dt = 0$. Συνεπώς $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Έχουμε πως η φ συνεχής στο R, οπότε οι συνάρτησεις των ολοκληρωμάτων $\int_0^x t\varphi(t)dt$ και $\int_0^x \varphi(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο R. Η $h(x) = \dfrac{\int_0^x t\varphi(t)dt}{\int_0^x \varphi(t)dt}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με,

$$h'(x) = \frac{x\varphi(x)\int_0^x \varphi(t)dt - \varphi(x)\int_0^x t\varphi(t)dt}{\left(\int_0^x \varphi(t)dt\right)^2} = \frac{\varphi(x)\left(x\int_0^x \varphi(t)dt - \int_0^x t\varphi(t)dt\right)}{\left(\int_0^x \varphi(t)dt\right)^2} = \frac{\varphi(x)k(x)}{\left(\int_0^x \varphi(t)dt\right)^2}$$

όπου $k(x) = x\int_0^x \varphi(t)dt - \int_0^x t\varphi(t)dt, x \in R$

Έχουμε πως η φ είναι συνεχής στο R, οπότε οι συνάρτησεις των ολοκληρωμάτων $\int_0^x t\varphi(t)dt$ και $\int_0^x \varphi(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο R. Άρα η k παραγωγίσιμη στο R με $k'(x) = \int_0^x \varphi(t)dt + x\varphi(x) - x\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt, x \in R$.

Εχουμε από **(Ε1)** ότι $k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ με τιμή $k(0) = 0$.

x	-∞	0	+∞
k'(x)	-	0	+
k(x)	↘	ο. ε	↗

Επομένως για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε $k(x) > 0$
Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε $h'(x) > 0$.
Οπότε για κάθε $x < 0$ η h είναι γνησίως αύξουσα , ενώ για κάθε $x > 0$ η h είναι γνησίως αύξουσα .

Ε2. Αν $h(0) = 0$, δείχνουμε πως η h είναι συνεχής στο $x = 0$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\int_0^x t\varphi(t)dt}{\int_0^x \varphi(t)dt}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

Επομένως η h είναι συνεχής στο $x=0$

Γνωρίζουμε πως η h είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Αν δείξουμε πως τα σύνολα τιμών τους δεν έχουν κοινά σημεία, τότε η h θα είναι $1-1$.

Για $x<0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(0)=0$

Άρα η h έχει στο $(-\infty,0)$ σύνολο τιμών το $A_1 = (\lim\limits_{x\to -\infty} h(x), \lim\limits_{x\to 0} h(x)) = (\lim\limits_{x\to -\infty} h(x), 0)$

Για $x>0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0$. Άρα η h έχει στο $(0,+\infty)$ σύνολο τιμών το $A_2 = (\lim\limits_{x\to 0} h(x), \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)) = (0, \lim\limits_{x\to +\infty} h(x))$

Επειδή $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ έχουμε οτι η η h θα είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$

Β΄ Τρόπος : Αφού η h συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα και θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ε3. Προσδιορίζουμε και το πρόσημο της συνάρτησης f.

Επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\neq 0$, έχουμε πως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο (*) στο $\mathbb{R}$.

(*) Αν χρειάζεται να το αποδείξουμε, δουλεύουμε όπως στο **(Ε1)** του θέματος **121**

Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$, τότε επειδή $h(2)>0>h(-1)$ έχουμε ότι

$f(x)>0 \Rightarrow \int_{h(-1)}^{h(2)} f(x)dx > 0 \Rightarrow \int_{h(2)}^{h(-1)} f(x)dx < 0$,**άτοπο.** Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)<0.$

Θεωρούμε $s(x)=f(x)-g(x), x\in[\alpha,\beta]$. Έχουμε πως η s είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμα $s(\beta)=f(\beta)-g(\beta)>0$

Αν $f(\alpha)=g(\alpha)$, τότε η $\xi_0=\alpha$ ρίζα της s.

Αν $f(\alpha)\neq g(\alpha)$. Τότε έστω πως για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

$f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.**άτοπο**,

επομένως υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<g(x_0)$

Η s είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε είναι συνεχής και στο $[x_0,\beta]$.

Ακόμα, $s(\beta)=f(\beta)-g(\beta)>0$ και $s(x_0)=f(x_0)-g(x_0)<0$, οπότε από θεώρημα **Bolzano** έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_0\in(x_0,\beta)$ τέτοιο ώστε $s(\xi_0)=0\Leftrightarrow f(\xi_0)=g(\xi_0)$.

Τελικά, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_0\in[\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $s(\xi_0)=0\Leftrightarrow f(\xi_0)=g(\xi_0)$

Δείχνουμε πως η s είναι γνησίως μονότονη, άρα το ξ_0 μοναδικό.

Έχουμε πως οι f,g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Επίσης η f γνησίως αύξουσα στο (α,β) και η g γνησίως φθίνουσα στο (α,β)

Έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$ και

$x_1<x_2\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow -g(x_1)<-g(x_2)$

Προσθέτω κατά μέλη και έχουμε $s(x_1)<s(x_2)$, δηλαδή η s είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Επειδή η s είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε πως η s είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, οπότε το ξ_0 μοναδικό.

Ε4. Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$, έχουμε πως η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Θεωρώ $m(x)=(\beta-x)\int_\beta^x g(t^t)dt-(x-\alpha)f(x^x)g(x), x\in[\alpha,\beta]$

Η m είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Ακόμα, $m(\alpha)=(\beta-\alpha)\int_\beta^\alpha g(t^t)dt=-(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta g(t^t)dt$ και $m(\beta)=-(\beta-\alpha)f(\beta^\beta)g(\beta)$

οπότε, $m(\alpha)m(\beta)=(\beta-\alpha)^2 f(\beta^\beta)g(\beta)\int_\alpha^\beta g(t^t)dt<0$ διότι $f(\beta^\beta)<0$ και

$g(\beta)\int_\alpha^\beta g(t^t)dt>0$, αφού $g(\beta),\int_\alpha^\beta g(t^t)dt$ ομόσημοι. Άρα από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$m(\xi)=0\Leftrightarrow(\beta-\xi)\int_\beta^\xi g(t^t)dt=(\xi-\alpha)f(\xi^\xi)g(\xi)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_\beta^\xi g(t^t)gt}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}\Rightarrow h\left(\frac{\int_\beta^\xi g(t^t)gt}{\xi-\alpha}\right)=h\left(\frac{f(\xi^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}\right)$$

ΘΕΜΑ 130

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνεχής στο $[1,2]$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $\int_x^{2x}\frac{t}{x^2}f(\frac{t}{x})dt=1$

Ε1. Να αποδείξετε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{1}{\xi}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$

Ε2. Να μελετήσετε την H ως προς την μονοτονία.

Ε3. Να αποδείξετε οτι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$\int_1^{x_0}f(t)dt=\int_{x_0}^2 f(t)dt$$

Ε4. Αν το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=1,x=2$ είναι $4\tau.\mu$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^2 H(x)dx$

Πηγή: <u>Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)</u>

Λύση:

Ε1. Θέτουμε $u=\frac{t}{x}\Rightarrow t=ux$. Έχουμε $dt=xdu$.

Για $t=x$ έχουμε $u=1$ και για $t=2x$ έχουμε $u=2$.

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται $\int_1^2 u\frac{1}{x}f(u)xdu=\int_1^2 uf(u)du$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x uf(u)du,\alpha\in[1,2],x\in[1,2]$

Η συνάρτηση $xf(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$, άρα η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_\alpha^x uf(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$.

Επομένως η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $F'(x)=xf(x)$.

Η F συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.

Οπότε, από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1}\Rightarrow \xi f(\xi)=F(2)-F(1)\Rightarrow \xi f(\xi)=\int_1^2 uf(u)du=1\Rightarrow f(\xi)=\frac{1}{\xi}$$

Ε2. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο (*), όμως $f(\xi)=\frac{1}{\xi}>0$. Οπότε για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε $f(x)>0$, αρα $H'(x)=2f(x)>0$. Συνεπώς, η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$

(*) Αν χρειάζεται να το αποδείξουμε, δουλεύουμε όπως στο **(Ε1)** του θέματος **121**

Ε3. Επειδή $H(1)H(2)<0$ και η συνάρτηση είναι συνεχής, από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $H(c)=0$.
Επιπλέον επειδή η H' γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, έχουμε οτι το c είναι μοναδικό.
Τότε $\int_1^c f(x)dx+\int_2^c f(x)dx=0$

Ε4. $E=4\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int_1^2 H(x)dx=\int_1^2(x)'H(x)dx=$
$[xH(x)]_1^2-\int_1^2 xH'(x)dx=2H(2)-H(1)-\int_1^2 2xf(x)=3\int_1^2 f(x)dx-2=12-2=10.$

ΘΕΜΑ 131

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$.
Η f είναι κυρτή, με συνεχή παράγωγο και $f(1)=1$. Ακόμα,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}, & x>1\\[2ex] \lim\limits_{t\to1}\left[\dfrac{f(t)-1}{t-1}+f(t)\right], & x=1\end{cases}$$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=0$

Ε2. Να βρεθεί η $g'(1)$

Ε3. Να μελετηθούν οι f,g ως προς τη μονοτονία.

Ε4. Να λυθεί, ως προς x, η ανίσωση $(x+1)\int_1^{x^2} f(t)dt>(x^2-1)\int_1^{x+2} f(t)dt$

στο διάστημα $(1,+\infty)$

Πηγή: Κ.Ρεκούμης - Κ.Λαγός (εκδόσεις Μεταίχμιο)

Λύση:

Ε1. Έχουμε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=1$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$.

Επιπλέον έχουμε $\lim\limits_{t\to1}\left(\dfrac{f(t)-1}{t-1}+f(t)\right)=g(1)$.

Επειδή η f συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Με χρήση **De L'Hospital** έχουμε,

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\int_1^x f(t)dt\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1,$$ αφού η f συνεχής.

Συνεπώς $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{f(t)-1}{t-1}+f(t)\right)=g(1)=1.$

Θέτουμε $\frac{f(x)-1}{x-1}+f(x)=h(x)$ με $\lim_{x\to 1} g(x)=f(1)=1$, τότε $\frac{f(x)-1}{x-1}=h(x)-f(x)$ με $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(h(x)-f(x)\right)=f(1)-f(1)=0\Rightarrow f'(1)=0$.

Ε2. Έχουμε,

$$g'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{2(x-1)}\Leftrightarrow$$

$$g'(1)=\frac{1}{2}f'(1)=0.$$

Ε3. Η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, συνεπώς η f' γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
Επιπλέον η f' ως γνησίως αύξουσα , έχει μοναδική ρίζα την $x_0=1$.
Άρα για κάθε $x>1$, έχουμε $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$. Επιπλέον η f συνεχής στο $[1,+\infty)$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για $x>1$ η $g(x)=\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}$ παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{f(x)(x-1)-\int_1^x f(t)dt}{(x-1)^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $s(x)=f(x)(x-1)-\int_1^x f(t)dt, x\ge 1.$

Η εξίσωση $s(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x_0=1.$
Όμως η s είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με
$s'(x)=f'(x)(x-1)+f(x)-f(x)=f'(x)(x-1)>0$, για κάθε $x>1$.
Συνεπώς η s είναι γνησίως αύξουσα,οπότε έχουμε
$x>1\Rightarrow s(x)>s(1)=0$. Δηλαδή, για κάθε $x>1$ ισχύει $g'(x)>0.$
Επιπλέον η g συνεχής, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Ε4. Για $x>1,$ έχουμε

$$(x+1)\int_1^{x^2} f(t)dt > (x^2-1)\int_1^{x+2} f(t)dt \Rightarrow \frac{\int_1^{x^2} f(t)dt}{x^2-1} > \frac{\int_1^{x+2} f(t)dt}{x+2-1} \Rightarrow$$

$g(x^2) > g(x+2) \Rightarrow x^2 > x+2$,αφού g γνησίως αύξουσα.

Άρα $x^2 > x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2.$

ΘΕΜΑ 132

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με

$$\int_0^x 2t\eta\mu t f(t)dt = \int_0^x t^2 f^2(t)dt + \int_0^x \eta\mu^2 t dt \quad x \in R.$$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in R$.

Ε2. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Ε3. Να βρείτε τα ακρότατα και τη μονοτονία στο $[-\pi, \pi]$.

Ε4. Να λυθεί η $f(x)+f(x^2)=f(x^8)+f(x^{2009})$ στο $[\,0,\ \pi\,]$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν μεταξύ των $C_f, y = x\eta\mu 1$, του άξονα $x'x$ και των $x=0$, $x=\pi$, είναι μικρότερο του $\dfrac{2\pi-1}{2}\eta\mu 1$.

Ε6. Να βρεθεί το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{3x}\frac{\eta\mu t}{t}dt}{x}$.

Πηγή: Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Ισχύει $\int_0^x 2t\eta\mu t f(t)dt = \int_0^x t^2 f^2(t)dt + \int_0^x \eta\mu^2 t dt \Leftrightarrow$

$$\int_0^x [tf(t)-\eta\mu t]^2 dt = 0 \Rightarrow [tf(t)-\eta\mu t]^2 = 0 \Rightarrow tf(t)-\eta\mu t = 0$$

- Αφού η $[tf(t)-\eta\mu t]^2$ είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και ισχύει $[tf(t)-\eta\mu t]^2 \geq 0$
- για $x=0$ ισχύει η ισότητα .

Ε2. Είναι $xf(x) = \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}, x \neq 0$

Αφού είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 0 , οπότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1. \quad \text{Άρα,} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)' = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

Στο $x_0 = 0$, θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα με τον ορισμό

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\eta\mu x - x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο 0 με $f'(0) = 0$.

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, με $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Ε3. Το πρόσημο της f' ,εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή. Θεωρώ $g(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, x \in [-\pi, \pi]$, με προφανή ρίζα το 0 ,αφού

$g(0) = 0\cdot\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0 = 0$ και παράγωγο $g'(x) = (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)' = -x\eta\mu x.$

Άρα για $x < 0$ έχουμε $g(x) > 0$. ενώ για $x > 0$ έχουμε $g(x) < 0$. Οπότε ο πίνακας μονοτονίας της συνεχούς f στο $[-\pi, \pi]$ είναι

x	$-\pi$		0		π
$-x$		+	0	-	
$\eta\mu x$		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	-	
$g(x)$		↘	0	↘	

x	$-\pi$		0		π
$g(x)$		+	0	-	
x^2		+	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	
	O.E		O.M		O.E

- Για $x = -\pi$, ελάχιστο το $f(-\pi) = \dfrac{\eta\mu(-\pi)}{-\pi} = 0$
- Για $x \in [0, \pi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα .
- Για $x = 0$ μέγιστο το $f(0) = 1$
- Για $x \in [-\pi, 0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα
- Για $x = \pi$ ελάχιστο το $f(\pi) = \dfrac{\eta\mu\pi}{\pi} = 0.$

Ε4. Οι αριθμοί 0 και 1 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης $f(x) + f(x^2) = f(x^8) + f(x^{2009})$.

Για $x > 1 \Rightarrow x^{2009} > x^2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^{2009}) < f(x^2)$ και $x > 1 \Rightarrow x^8 > x \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^8) < f(x)$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $f(x^{2009}) + f(x^8) < f(x^2) + f(x)$.

Οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(1, \pi]$.

Για $0 < x < 1 \Rightarrow x^{2009} < x^2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^{2009}) > f(x^2)$ και $0 < x < 1 \Rightarrow x^8 < x \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x^8) > f(x)$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε $f(x^{2009}) + f(x^8) > f(x^2) + f(x)$

άρα η εξίσωση μας είναι αδύνατη στο $(0,1)$.
Συνεπώς η εξίσωση $f(x)+f(x^2)=f(x^8)+f(x^{2009})$, έχει μοναδικές λύσεις τις 0 και 1.

Ε5. Πρόκειται για εμβαδόν μεταξύ τριών συναρτήσεων και ανάμεσα στις $x=0, x=\pi$. Οπότε ένα σχήμα είναι αναγκαίο το όποιο θα βασιστεί στα σημεία τομής των $y_f=f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, $y_\varepsilon=x\eta\mu 1$ και της $y_{xx'}=0$ (άξονα των x)

$\delta_1(x)=y_f-y_\varepsilon=\frac{\eta\mu x}{x}-x\eta\mu 1$, προφανής ρίζα το $x=1$ και μοναδική αφού

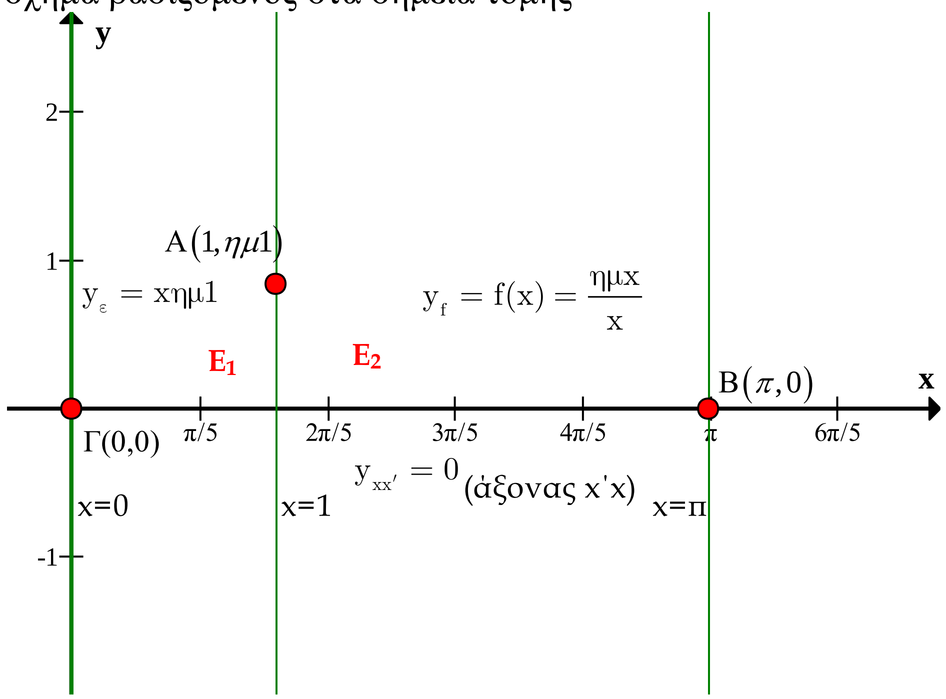
$$\delta_1'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}-x\eta\mu 1\right)'=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}-\eta\mu 1 \underset{f'(x)<0}{\overset{f\downarrow \sigma\tau o[0,\pi]}{=}} f'(x)-\eta\mu 1<0$$

Άρα η $\delta_1(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα $[0,\pi]$. Άρα το σημείο τομής τους είναι $A(1,f(1))=A(1,y_\varepsilon(0))=A(1,\eta\mu 1)$.

$\delta_2(x)=y_f-y_{xx'}=\frac{\eta\mu x}{x}$ προφανής ρίζα στο $[0,\pi]$ η $x=\pi$ και μοναδική αφού η **f είναι γνησίως φθίνουσα** στο $[0,\pi]$.

Άρα το σημείο τομής τους είναι $B(\pi,f(\pi))=B(1,y_{xx'}(\pi))=B(\pi,0)$.
$\delta_3(x)=y_\varepsilon-y_{xx'}=x\eta\mu 1$ προφανής ρίζα στο $[0,\pi]$ το $x=0$. Άρα το σημείο τομής τους είναι $\Gamma(0,y_\varepsilon(0))=\Gamma(0,y_{xx'}(0))=\Gamma(0,0)$

Από τα A, B διέρχεται η $y_f=f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$.
Από τα B, Γ διέρχεται η $y_{xx'}=0$.
Από τα Γ, A διέρχεται η $y_\varepsilon=x\eta\mu 1$.
Άρα κάνω σχήμα βασιζόμενος στα σημεία τομής



Αν $\mathbf{\Omega}$ είναι το σχηματιζόμενο χωρίο μεταξύ των $\mathbf{x'x}$, $\mathbf{C_f}$ και $\mathbf{y = x \cdot \eta\mu 1}$, τότε για το εμβαδόν του $\mathbf{E(\Omega)}$ έχουμε,

$$\mathbf{E(\Omega) = E_1(\Omega) + E_2(\Omega) = \int_0^1 (y_\varepsilon - y_{xx'})dx + \int_1^\pi (y_f - y_{xx'})dx =}$$

$$\mathbf{= \int_0^1 x \cdot \eta\mu 1 dx + \int_1^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dx = \frac{\eta\mu 1}{2} + \int_1^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dx.}$$

Για κάθε $\mathbf{x \in (0,\pi)}$, η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$\mathbf{1 \le x \le \pi \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) \ge f(x) \ge f(\pi) \Rightarrow f(\pi) \le f(x) \le f(1)}$$

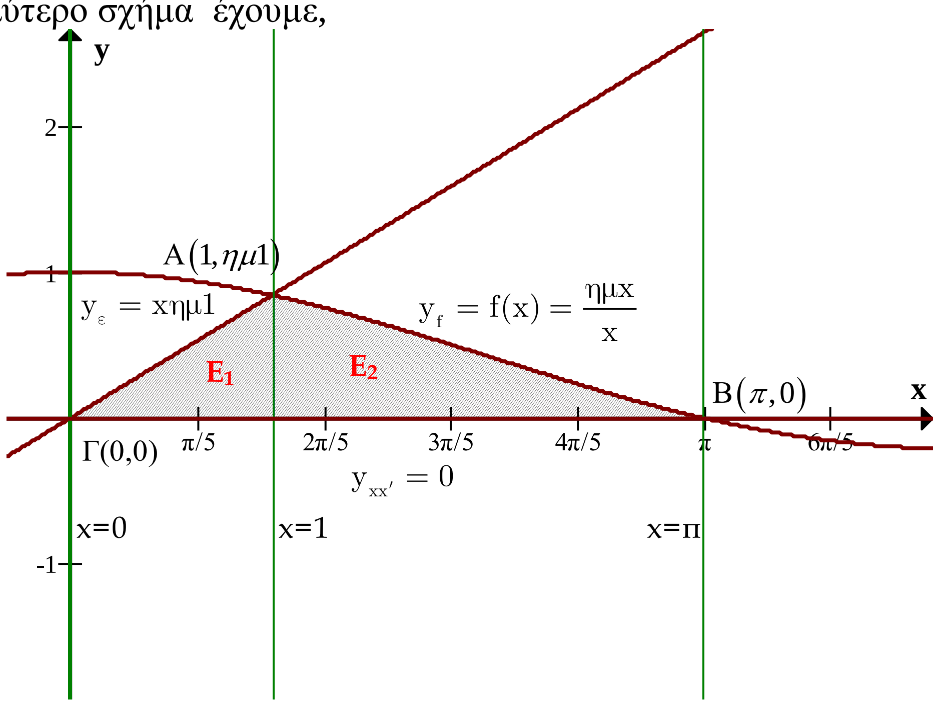
$$\mathbf{\int_1^\pi f(\pi)dt \le \int_1^\pi f(x)dt \le \int_1^\pi f(1)dt \Rightarrow (\pi\text{-}1)f(\pi) \le \int_1^\pi f(x)dt \le (\pi\text{-}1)f(1) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{(\pi\text{-}1)\frac{\eta\mu\pi}{\pi} \le \int_1^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dt \le (\pi\text{-}1)\frac{\eta\mu 1}{1}}.$$

Ακόμα έχουμε $\mathbf{0 \le \int_1^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dt \le (\pi\text{-}1)\eta\mu 1}$. Προσθέτουμε το $\mathbf{\frac{\eta\mu 1}{2}}$ και έχουμε

$$\mathbf{\frac{\eta\mu 1}{2} \le \frac{\eta\mu 1}{2} + \int_1^\pi \frac{\eta\mu x}{x} dt \le \frac{\eta\mu 1}{2} + \pi\eta\mu 1 - \eta\mu 1 = \frac{2\pi - 1}{2}\eta\mu 1 < \frac{2\pi + 1}{2}\eta\mu 1}$$

Με ένα καλύτερο σχήμα έχουμε,



Ε6. Για κάθε $\mathbf{x \in (0, \pi)}$ η $\mathbf{f}$ είναι φθίνουσα. Οπότε για κάθε $\mathbf{x \in (0, \pi)}$ έχουμε $\mathbf{0 < 2x < 3x < \pi}$ και για κάθε $\mathbf{t}$ με $\mathbf{2x \le t \le 3x}$ θα είναι:
$\mathbf{f(2x) \ge f(t) \ge f(3x) \Rightarrow f(3x) \le f(t) \le f(2x).}$ Επομένως,

$$\int_{2x}^{3x} f(3x)dt \le \int_{2x}^{3x} f(t)dt \le \int_{2x}^{3x} f(2x)dt \Rightarrow xf(3x) \le \int_{2x}^{3x} f(t)dt \le xf(2x)$$

$$\frac{\eta\mu 3x}{3} \le \int_{2x}^{3x} f(t)dt \le \frac{\eta\mu 2x}{2} \overset{:x>0}{\Rightarrow} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \le \frac{\int_{2x}^{3x} f(t)dt}{x} \le \frac{\eta\mu 2x}{2x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 1, \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = 1$,άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{3x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{3x} \frac{\eta\mu t}{t}dt}{x} = 1 .$$

Β΄ τρόπος για το Ε6.

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{3x} \frac{\eta\mu t}{t}dt}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{3x} f(t)dt}{x} \underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-\int_0^{2x} f(t)dt + \int_0^{3x} f(t)dt\right)'}{(x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2f(2x)+3f(3x)}{1} = f(0).$$

ΘΕΜΑ 133

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt.$$

Ε1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x>0$.

Ε3. Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $g(x) = f(x) f\left(\frac{e}{x}\right)$, $x>0$.

Ε4. Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$, να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Λύση:

Ε1. Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, η συνάρτηση του ολοκληρώματος

$\int_1^x \frac{t+1}{t\left(e^{f(t)}+1\right)}dt$ θα είναι παραγωγίσιμη. Έτσι παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση και

έχουμε $f'(x)=\frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Rightarrow xf'(x)e^{f(x)}+xf'(x)=x+1 \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$f'(x)+f'(x)e^{f(x)}=1+\frac{1}{x} \Rightarrow (e^{f(x)}+f(x))'=(x+\ln x)'$

Άρα θα υπάρχει $c \in R$, τέτοια ώστε

$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c, \Rightarrow e^{f(1)}+f(1)=1+0+c \Rightarrow c=0$, γιατί $f(1)=0$.

Τελικά $e^{f(x)}+f(x)=\ln x+x.$ **(1)**

Ε2. Έστω η $k(x)=x+e^x, x\in R, k'(x)=1+e^x>0$, άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και $1-1$. Τότε $(1) \Rightarrow k(f(x))=k(\ln x) \Rightarrow f(x)=\ln x$, αφού η k είναι $1-1$.

Ε3. Είναι $g(x)=f(x)f(\frac{e}{x})=\ln x(1-\ln x).$

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x}, x>0$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$g'(x)>0 \Rightarrow \ln x<\frac{1}{2} \Rightarrow x<\sqrt{e}, g'(x)<0 \Rightarrow x>\sqrt{e}, g'(\sqrt{e})=0$.

Οπότε, από το διπλανό πίνακα , έχουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{e}]$,γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e},+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=\sqrt{e}$ με τιμή $g(\sqrt{e})=\frac{1}{4}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		↗	Ο.Μ	↘	

Ε4. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}$ και $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), από **ΘΜΤ** υπάρχει

$\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Όμοια , η f είναι συνεχής στο $[\beta,\gamma]$, παραγωγίσιμη στο (β,γ) από **ΘΜΤ** θα υπάρχει $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Αλλά $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ (αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 134 — Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς

Αν $f:(0,+\infty)\to R, g:R\to R$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε να ισχύουν

$f(g(x))g(x)=x, x\in R$ και $f'(g(x))g'(x)=\frac{1-x}{e^x}, x\in R$ με $g(0)=1$.

Ε1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,g(1))$ είναι η $y=g(1)x$.

Ε2. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x\in(0,+\infty)$ και ότι είναι κοίλη στο $(0,e\sqrt{e}]$, και η g κυρτή στο R.

Ε3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=1$.

Ε4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f,g και των ευθειών $x=1, x=\ln 3$.

Ε5. Να δείξετε ότι $e^{\sqrt{6-2e}}>\ln 3$.

Λύση:

Ε1. Για $x=0$ έχουμε $f(g(0))g(0)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$.

Έχουμε $f'(g(x))g'(x)=\frac{1-x}{e^x} \Leftrightarrow [f(g(x))]'=\left(\frac{x}{e^x}\right)' \Rightarrow f(g(x))=\frac{x}{e^x}+c$.

Οπότε για $x=0$ έχουμε $f(g(0))=c \Leftrightarrow f(1)=c \Leftrightarrow c=0$.

Συνεπώς, $f(g(x))=\frac{x}{e^x}$. Όμως $f(g(x))g(x)=x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x}g(x)=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x)=e^x$.

Επομένως $g'(x)=g(x)=e^x$, άρα $g'(1)=g(1)=e$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $A(1,g(1))$ είναι η

$$y-g(1)=g'(1)(x-1) \overset{g'(1)=g(1)}{\Leftrightarrow} y-g(1)=g(1)(x-1) \Leftrightarrow y=g(1)x.$$

Ε2. Έχουμε $f(e^x)=\frac{x}{e^x}$. Θέτουμε $e^x=u>0$ οπότε $e^x=u \Leftrightarrow x=\ln u$.

Επομένως $f(e^x)=\frac{x}{e^x} \Rightarrow f(u)=\frac{\ln u}{u}, u>0$.

Άρα $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x>0$, που επαληθεύει τις αρχικές σχέσεις.

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$ και $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}, x>0$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}=e\sqrt{e}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x-3>0 \Leftrightarrow \ln x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>e\sqrt{e}$$

Επομένως, από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η f είναι κοίλη στο $(0,e\sqrt{e}]$ και κυρτή στο $[e\sqrt{e},+\infty)$.

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	Σ.Κ	$\cup$	

Επίσης, για την $g(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$ και $g''(x)=e^x>0$. Συνεπώς η g κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Ε3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>0$ και $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}, x>0$.

$f(1)=0, f'(1)=1$. Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x=1$ είναι η $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$.

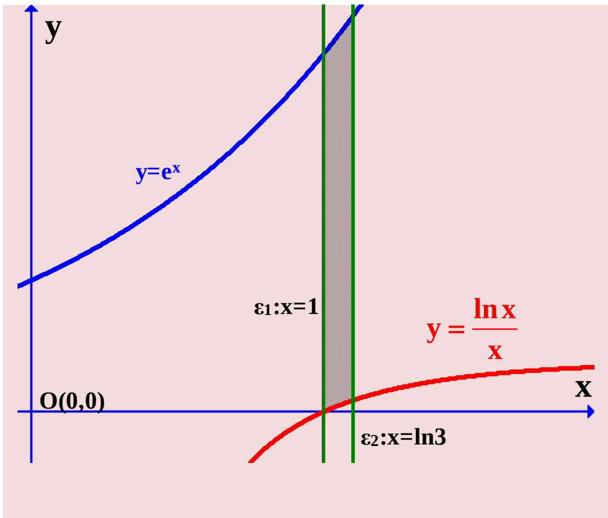
Ε4. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δείχνουμε πως $f(x)<g(x)$. Συγκεκριμένα, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,0)$ είναι η $y=x-1$, ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(0,1)$ είναι η $y=x+1$. Από την κυρτότητα των f, g έχουμε $f(x)\le x-1<x<x+1\le g(x)$. Οπότε ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_1^{\ln 3}|g(x)-f(x)|dx=\int_1^{\ln 3}\big(g(x)-f(x)\big)dx \Leftrightarrow$$

$$E=\int_1^{\ln 3}\left(e^x-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^{\ln 3}e^x dx-\int_1^{\ln 3}\frac{\ln x}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E=\left[e^x\right]_1^{\ln 3}-\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^{\ln 3}=3-e-\frac{1}{2}\ln^2(\ln 3)$$

$$E=\left(3-e-\frac{1}{2}\ln^2(\ln 3)\right)\text{τ.μ}$$



Ε5. Έχουμε $E>0 \Rightarrow 3-e-\dfrac{1}{2}\ln^2(\ln 3)>0 \Rightarrow$

$6-2e>\ln^2(\ln 3) \Rightarrow \sqrt{6-2e}>\ln(\ln 3) \Rightarrow e^{\sqrt{6-2e}}>\ln 3$.

ΘΕΜΑ 135

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=x.$$

Ε1. **α.** Να αποδειχθεί ότι: $f'(0)=f(0)+1$.

β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημό της.

γ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f..

Ε2. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε:

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η συνάρτηση $g(x)=f''(x)-f(x)$ είναι σταθερή.

β. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση:

Ε1. **α.** Η $g(u)=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ έχει $g'(u)=-\dfrac{(\sqrt{u^2+1})'}{\sqrt{u^2+1}}=-\dfrac{u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}$

$$g'(u)=0\Leftrightarrow -\frac{u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}=0\Leftrightarrow u=0\text{, ενώ}$$

$$g'(u)>0\Leftrightarrow -\frac{u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}>0\Leftrightarrow u<0$$

Επομένως, από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

u	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(u)$	-	0	+
$g(u)$	↘	O.E	↗

Για $x=0$ από την αρχική σχέση, προκύπτει $\displaystyle\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=0$. Αφού $g(u)>0, u\in R$ αναγκαία $f(0)=0$.

Γιατί αν $f(0)>0$ τότε $\displaystyle\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du>0$ και αν $f(0)<0$ τότε $\displaystyle\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du<0$

.Επιπλέον η $x=0$ είναι και μοναδική της ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, διότι αν για κάποιο $x_0\neq 0$ ισχύει $f(x_0)=0$,τότε προκύπτει ότι $x_0=0$ που είναι **άτοπο.**

Τώρα με $0<u<x\Rightarrow g(0)>g(u)>g(x)\Leftrightarrow 1>g(u)>g(x)\Rightarrow\begin{cases}1-g(u)>0\\ g(u)-g(x)>0\end{cases}$.

Για $x>0$έχουμε πως $\displaystyle\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=x>0$

Αν υποθέσουμε πως υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<0$θα είχαμε πως

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}>0\overset{f(x_0)<0}{\Rightarrow}\int_{f(x_0)}^{0}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du>0\Rightarrow\int_0^{f(x_0)}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du<0 \text{ άτοπο διότι}$$

$$\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=x>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Επιπλέον δεν υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ διότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Άρα για κάθε $x>0$ έχουμε πως $f(x)>0$και όμοια για $x<0$ έχουμε πως $f(x)<0$.
Επειδή $f(x)>0$, ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_0^{f(x)}(1-g(u))du>0 \Rightarrow \int_0^{f(x)}du>\int_0^{f(x)}g(u)du \Rightarrow f(x)>\int_0^{f(x)}g(u)du$$ καθώς και

$$\int_0^{f(x)}(g(u)-g(x))du>0 \Rightarrow \int_0^{f(x)}g(u)du>\int_0^{f(x)}g(x)du \Rightarrow \int_0^{f(x)}g(u)du>f(x)g(x)$$, οπότε

$$f(x)>\int_0^{f(x)}g(u)du>g(x)f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}<\frac{1}{\int_0^{f(x)}g(u)du}<\frac{1}{g(x)f(x)}$$ επομένως

$$\frac{f(x)}{f(x)}<\frac{f(x)}{\int_0^{f(x)}g(u)du}<\frac{f(x)}{g(x)f(x)} \Leftrightarrow 1<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{g(x)} \quad (1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=1$, από κριτήριο παρεμβολής , $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Ομοίως για $x<0$ δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ άρα $f'(0)=f(0)+1$.

Β΄ τρόπος για το Ε1.α

Η $g(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ έχει $g'(u)=-\frac{(\sqrt{u^2+1})'}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}$.

Η g είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επειδή για $x=0$ στην αρχική σχέση προκύπτει $\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=0$, αφού $g(u)>0, u\in R$, αναγκαία $f(0)=0$ γιατί αν $f(0)>0$ τότε $\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du>0$ και αν $f(0)<0$ τότε $\int_0^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du<0$. Η $x=0$ είναι και μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$,αφού αν για κάποιο $x_0\neq 0, f(x_0)=0$ προκύπτει $x_0=0$, **άτοπο.**

Είναι $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\int_0^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du}\right).$$

Όμως η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ και όταν $x\to 0$ τότε και $f(x)\to 0$,οπότε θέτουμε $f(x)=t$ με $t\to 0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\int_0^{t}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{1+t^2}\right)=1=f'(0)$$ άρα $f'(0)=1$.

Συνεπώς $f'(0)=f(0)+1$.

β. Έστω οτι υπάρχουν υπάρχουν $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \ge f(x_2)$ τότε

$$\int_{f(x_2)}^{f(x_1)} g(u)du \ge 0 \Leftrightarrow \int_{f(x_2)}^{0} g(u)du + \int_{0}^{f(x_1)} g(u)du \ge 0 \Leftrightarrow \int_{0}^{f(x_1)} g(u)du \ge \int_{0}^{f(x_2)} g(u)du$$

δηλαδή $x_1 \ge x_2$ **άτοπο**, οπότε για κάθε $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και αφού $f(0) = 0$, έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) > 0$, ενώ για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) < 0$.

γ. Από $1 < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{g(x)}$ έχουμε $f(x) > x, x > 0$.Συνεπώς $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x}$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

και ομοίως για $x < 0$ από $f(x) < x$ προκύπτει $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

άρα το σύνολο τιμών της συνεχούς και γνησίως αύξουσας f είναι το $\mathbf{R}$.

Β΄ τρόπος για το Ε1.γ.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $\int_{0}^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = x$

- ☑ Για $x > 0$ αφού $\int_{0}^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du > 0$ άρα $f(x) > x$ είναι $0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και
- ☑ Για $x<0$ είναι $f(x) < x$ οπότε προκύπτει $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Ε2. **α.** Επειδή η $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ είναι και συνεχης,

οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$., οπότε η $\int_{0}^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Επομένως, παραγωγίζοντας τη σχέση $\int_{0}^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = x$, έχουμε

$\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{f^2(x)+1}$ **(2).** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, η

$\sqrt{f^2(x)+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, οπότε και η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, με

$$f''(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}f(x)=f(x)$$

Έτσι έχουμε $g(x)=f''(x)-f(x)=0$,άρα $g(x)=0$.

β. Είναι τώρα $f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$ ή $(f'(x)+f(x))'=f'(x)+f(x)$ οπότε από γνωστή εφαρμογή έχουμε , $f'(x)+f(x)=ce^x, c\in\mathbf{R}$, όμως $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, οπότε προκύπτει ότι $c=1$.

Άρα $f'(x)+f(x)=e^x \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow (e^x f(x))'=(\frac{1}{2}e^{2x})'$ άρα

$e^x f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c, c\in\mathbf{R}$. Όμως $f(0)=0$, οπότε $c=-\frac{1}{2}$.

Έτσι έχουμε $e^x f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$.

ΘΕΜΑ 136

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\int_1^x x\ln t\,dt$

Ε1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

Ε2. Να βρείτε τις $f'(x), f''(x)$.

Ε3. Να συμπληρωθεί ο πίνακα προσήμων και δείξτε οτι η $f'(x)$,έχει ακριβώς δυο ρίζες.

Ε4. Αν x_0 η μια ρίζα της $f'(x)$, να δείξετε οτι $\int_{x_0}^1 f''(x)dx=0$.

Ε5. Βρείτε τη μονοτονία της $f(x)$ και το σύνολο τιμών της.

Λύση:

Ε1. Η $A(t)=\ln t$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Το $1\in(0,+\infty)$ άρα και το $x\in(0,+\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $(0,+\infty)$.

Α΄ τρόπος

$$f(x)=\int_1^x x\ln t\,dt=x\int_1^x \ln t\,dt=x[t\ln t-t]_1^x \Leftrightarrow$$

$f(x)=x(x\ln x-x-1\ln 1+1)=x^2\ln x-x^2+x$ με $x>0$

Β΄ τρόπος

Έχουμε $f(x)=\int_1^x x\ln t dt = x\int_1^x \ln t dt$ (1). Η συνάρτηση $\int_1^x \ln t dt$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς η συνάρτηση $\int_1^x \ln t dt$ είναι παραγωγίσιμη. Άρα και η $f(x)$ παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων. Τότε έχουμε,

$$\frac{f(x)}{x}=\int_1^x \ln t dt \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\int_1^x \ln t dt\right)' \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\ln x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(x\ln x - x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x\ln x - x + c, c\in R \ (2).$$ Για $x=1$ στην (1) λαμβάνουμε $f(1)=0$. Οπότε για $x=1$ στην (2) παίρνουμε $c=1$. Άρα

$$\frac{f(x)}{x}=x\ln x - x+1 \Rightarrow f(x)=x^2\ln x - x^2+x, x\in(0,+\infty).$$

Ε2. Έχουμε $f'(x)=2x\ln x - x+1$ και $f''(x)=2\ln x+1$.

Ε3. Για την $f''(x)$ έχουμε: $f''(x)=0 \Rightarrow 2\ln x+1=0 \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$

Ενώ $f''(x)>0 \Rightarrow x>\frac{\sqrt{e}}{e}$ και $f''(x)<0 \Rightarrow 0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$.

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	↘	Ο.Ε	↗	

Οπότε, από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$.

Στο διάστημα $[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty)$, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$ η οποία είναι και μοναδική σ΄αυτό το διάστημα λόγω της μονοτονίας.

Η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$ και συνεχής, με σύνολο τιμών το

$$[f'\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right),\lim_{x\to 0^+} f'(x))=[\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}},1).$$

Επειδή το 0 ανήκει στο παραπάνω σύνολο τιμών, θα υπάρχει $x_o\in\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$. Επιπλέον το x_o μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $(0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$, αφού η $f'(x)$ μονότονη σ' αυτό το διάστημα.

Ε4. $\int_{x_o}^{1} f''(x)dx = \left[f'(x)\right]_{x_o}^{1} = f'(1) - f'(x_o) = 0 - 0 = 0$.

Ε5. Η $f'(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x=1$ και $x=x_o$ με $x_o<1$.
Τότε, για $0<x<x_o \Rightarrow f'(x)>f'(x_o)=0$ αφού η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$ και $x_o \in (0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$. Για $x_o<x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(x_o)=0$, αφού η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$ και $x_o \in (0,\frac{\sqrt{e}}{e}]$.
Τέλος για $x>1 \Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$.
Αφού η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty)$ και $1 \in [\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty)$.
Συνεπώς για τη μονοτονία της f έχουμε ότι είναι: Γνησίως αύξουσα στο $(0,x_o]$ με σύνολο τιμών $A_1 = (\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(x_o)] = (0, f(x_o)]$.
Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_o,1]$ με σύνολο τιμών $A_2 = \left[f(1), f(x_o)\right] = \left[0, f(x_o)\right]$ και τέλος είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ με σύνολο τιμών $A_3 = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [0,+\infty)$.
Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το
$f(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (0, f(x_o)] \cup \left[0, f(x_o)\right] \cup [0,+\infty) = [0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 137 — Προτείνει ο Στάθης Κούτρας

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$x^2f''(x)+5xf'(x)+4f(x)=0$ για κάθε $x>0$, $f(1)=1$ και $f'(1)=-3$.

Ε1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)+\ln x$ με $x>0$ είναι σταθερή.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της f.

Ε3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Ε4. Να δείξετε ότι αν $0<\alpha<\beta<2$ τότε $f(\beta) < \frac{\beta\ln\alpha - \alpha\ln\beta}{\alpha^2\beta - \alpha\beta^2} < f(\alpha)$.

Ε5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις : $y=0, x=1, x=e^2$.

Λύση:

Ε1. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)+\dfrac{1}{x}$ (1).Επίσης από $x^2f''(x)+5xf'(x)+4f(x)=0,x>0$ θα ισχύει και $x^3f''(x)+5x^2f'(x)+4xf(x)=0,x>0$,οπότε $x^3f''(x)+3x^2f'(x)+2x^2f'(x)+4xf(x)=0,x>0$,άρα $(x^3f'(x))'+(2x^2f(x))'=0,x>0$ ή $(x^3f'(x)+2x^2f(x))'=0,x>0$,επομένως $x^3f'(x)+2x^2f(x)=c,x>0$.

Έπειδή $f(1)=1,f'(1)=-3$ προκύπτει $c=-1$ άρα $x^3f'(x)+2x^2f(x)=-1,x>0$ ή $2xf(x)+x^2f'(x)=-\dfrac{1}{x},x>0$.Έτσι από την $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)+\dfrac{1}{x}$ έχουμε ότι $g'(x)=0,x>0$ άρα $g(x)=c,x>0$.

Ε2. Αφού $g(1)=1$ από **(Ε1)** είναι $c=1$. Άρα $x^2f(x)+\ln x=1,x>0.$

Επομένως $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2},x>0$

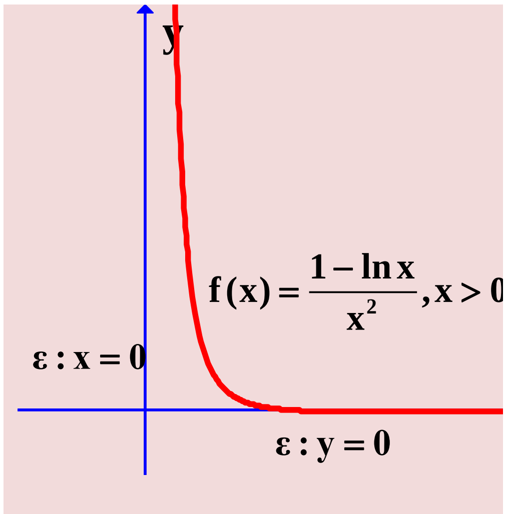
Ε3. Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\right)=+\infty,$$

η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f , ακόμη αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=0$$

η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$



Ε3. Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{\ln x}{x},x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (άρα και συνεχής) με $h'(x)=f(x)$, σύμφωνα με το **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(\alpha)-h(\beta)}{\alpha-\beta}$ ή $f(\xi)=\dfrac{\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{\ln\beta}{\beta}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta\ln\alpha-\alpha\ln\beta}{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}$.

Οπότε , αρκεί από τη ζητούμενη ανισότητα να δείξουμε ότι $f(\beta)<f(\xi)<f(\alpha)$.

Είναι τώρα $f'(x)=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3x+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$ και επειδή $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x=3\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<e\sqrt{e}$ η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,e\sqrt{e}]$ και επειδή $(0,2)\subseteq(0,e\sqrt{e}]$,

έχουμε $0<\alpha<\xi<\beta<2\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(\beta)<f(\xi)<f(\alpha)$.

Ε5. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E=\int_1^{e^2}|f(x)|dx.$

Επειδή $f(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow x<e$ και $f(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow x>e$

το εμβαδόν θα είναι $E=\int_1^{e}|f(x)|dx+\int_e^{e^2}|f(x)|dx=\int_1^{e}f(x)dx-\int_e^{e^2}f(x)dx \overset{(E4)}{\Leftrightarrow}$

$E=[h(x)]_1^e-[h(x)]_e^{e^2}=h(e)-h(1)-h(e^2)+h(e)=\dfrac{e-2}{e^2}.$

ΘΕΜΑ 138

Προτείνει ο Στάθης Κούτρας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f(\alpha)-f(\beta)\geqslant\int_\beta^\alpha \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=1+\int_0^x \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της f

Ε3. Να αποδείξετε ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η εξίσωση $f'(x)g(x)=(2-f(x))g'(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Ε4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2e^{x-1}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ την οποία και να βρείτε.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(\alpha)-f(\beta)\geq\int_\beta^\alpha \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$, οπότε για $\beta=0$ έχουμε

$f(\alpha)\geq f(0)+\int_0^\alpha \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$. Και για $x=\alpha$, έχουμε $f(x)\geq f(0)+\int_0^x \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$ (1).

Ενώ για $\alpha=0$ έχουμε $f(\beta)\leq f(0)+\int_0^\beta \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$. Και για $x=\beta$, έχουμε

$f(x)\leq f(0)+\int_0^x \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)=1+\int_0^x \dfrac{2tf(t)}{t^2+1}dt$.

Ε2. Επειδή η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι συνεχής, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη , άρα $f'(x)=\dfrac{2xf(x)}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)(x^2+1)-(x^2+1)'f(x)=0\Rightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x^2+1}\right)'=0 \Rightarrow f(x)=(x^2+1)c$.

Για $x=0$ έχουμε $c=1$, οπότε $f(x)=x^2+1$,που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε3. $f'(x)g(x)=(2-f(x))g'(x) \Leftrightarrow$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-2g'(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)g(x)-2g(x))'=0$

Θεωρώ $h(x)=f(x)g(x)-2g(x), x\in[-1,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$h(-1)=f(-1)g(-1)-2g(-1)=2g(-1)-2g(-1)=0$ καθώς και

$h(1)=f(1)g(1)-2g(1)=2g(1)-2g(1)=0$. Επομένως από θεώρημα **Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0$.

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x)g(x)=(2-f(x))g'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Ε4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^2+1=2e^{x-1} \Leftrightarrow 2e^{x-1}-x^2-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=2e^{x-1}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$.

Η H παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$H'(x)=2e^{x-1}-2x$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης έχουμε $H'(1)=0$ Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της H', προχωρούμε στο πρόσημο της $H''(x)$.

$H''(x)=2e^{x-1}-2$ έχουμε,

$H''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-1}-2=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=1 \Leftrightarrow x=1$

$H''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-1}-2>0 \Leftrightarrow e^{x-1}>1 \Leftrightarrow x>1$

$H''(x)<0 \Leftrightarrow 2e^{x-1}-2<0 \Leftrightarrow e^{x-1}<1 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$H''(x)$	-	0	+
$H'(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Έτσι από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας, έχουμε ότι η συνάρτηση $H'(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$, με τιμή $H'(1)=0$.

$H'(x)\geq H'(1) \Rightarrow H'(x)\geq 0$ ενώ για κάθε $x\neq 1$ έχουμε $H'(x)>0$.

Άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τέλος $H(1)=0$ άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση το $x=1$.

ΘΕΜΑ 139 — Προτείνει ο Γιάννης Κουτσούκος

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x, x>0$, $K(x)=\displaystyle\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{2t^2}{t^2+1}dt$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και

$h(x)=x^2+1$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq x-1$ για κάθε $x>0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι $K(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και βρείτε την $K''(x)$.

Ε3. **α.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $g(x)=(foh)(x)$ στο R.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\theta)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=\varepsilon\varphi\theta$ με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} E(\theta)$.

δ. Να δειχθεί ότι $E(\theta)>2(\theta-\eta\mu\theta)$ με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση:

Ε1. Θέλουμε να δείξουμε πως για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\le x-1 \Leftrightarrow \ln x - x+1\le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x)=\ln x - x+1, x>0$. Η m παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $m'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}, x>0$.

$m'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$ και

$m'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<1$.

x	0	1	$+\infty$
$m'(x)$	+	0	-
$m(x)$	↗	Ο.Μ	↘

Οπότε, από τον διπλανό πίνακα μονοτονίας, έχουμε ότι η m είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$ με τιμή $m(1)=0$. Συνεπώς για κάθε $x>0$ ισχύει $m(x)\le m(1) \Leftrightarrow \ln x - x+1\le 0 \Leftrightarrow \ln x\le x-1$.

Ε2. Η $\frac{2t^2}{t^2+1}$ συνεχής στο $(0,\frac{\pi}{2})$, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_0^x \frac{2t^2}{t^2+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$. Η $\varepsilon\varphi x$ παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{2t^2}{t^2+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$, ως σύνθεση της $\int_0^x \frac{2t^2}{t^2+1}dt$ με την $\varepsilon\varphi x$. Συνεπώς η K παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ με

$$K'(x)=\frac{2\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\cdot(\varepsilon\varphi x)'=\frac{2\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\cdot\left(\varepsilon\varphi^2 x+1\right)=2\varepsilon\varphi^2 x, x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Η K' παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$K''(x)=\frac{4\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

Ε3. **α.** Έχουμε $\mathbf{f(x)=\ln x, x>0}$ και $\mathbf{h(x)=x^2+1, x\in R}$.

Για να ορίζεται η $\mathbf{g(x)=(foh)(x)}$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_h \\ \text{και} \\ h(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \text{και} \\ x^2+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x\in R$

Συνεπώς η $\mathbf{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ και τύπο

$$\mathbf{g(x)=(foh)(x)=f(h(x))=f(x^2+1)=\ln(x^2+1), x\in R.}$$

β. Ψάχνουμε το $\mathbf{E(\theta)=\int_0^{εφθ}\left|\ln(x^2+1)\right|dt}$. Για κάθε $\mathbf{x\in R}$ έχουμε πως

$\mathbf{x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\geq 0}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $\mathbf{x=0}$, οπότε για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{g(x)>0}$.

Οπότε $\mathbf{E(\theta)=\int_0^{εφθ}\ln(x^2+1)dt=\int_0^{εφθ}(x)'\ln(x^2+1)dt=}$

$$\mathbf{=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^{εφθ}-\int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^{εφθ}-\int_0^{εφθ}\frac{2x^2}{x^2+1}dx=}$$

$$\mathbf{=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^{εφθ}-2\int_0^{εφθ}\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^{εφθ}-2\int_0^{εφθ}dx+2\int_0^{εφθ}\frac{1}{x^2+1}dx=}$$

$$\mathbf{=\left[x\ln(x^2+1)\right]_0^{εφθ}-2[x]_0^{εφθ}+2\theta=εφθ\ln(εφ^2\theta+1)-2εφθ+2\theta.}$$

Αφού, θεωρώντας $\mathbf{s(\theta)=\int_0^{εφθ}\frac{1}{x^2+1}dx}$, $\mathbf{\theta\in[0,\frac{\pi}{2})}$.

Η $\mathbf{s}$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\mathbf{s'(\theta)=\frac{1}{εφ^2\theta+1}(εφθ)'=\frac{1}{εφ^2\theta+1}\left(εφ^2\theta+1\right)=1}.$$

Συνεπώς $\mathbf{s(\theta)=\theta+c, c\in R.}$.Για $\mathbf{\theta=0\Leftrightarrow c=0}$, οπότε $\mathbf{s(\theta)=\theta\Leftrightarrow\int_0^{εφθ}\frac{1}{x^2+1}dx=\theta}$.

γ. $\mathbf{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}E(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(εφθ\cdot\ln(εφ^2\theta+1)-2εφθ+2\theta\right)\overset{+\infty-\infty}{=}}$

$$\mathbf{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left[εφθ\left(\ln(εφ^2\theta+1)-2+\frac{2\theta}{εφθ}\right)\right]=+\infty}$$

Διότι $\mathbf{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{2\theta}{εφθ}\right)=0}$, $\mathbf{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}(εφθ)=+\infty}$ και $\mathbf{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\ln(εφ^2\theta+1)\right)=+\infty}$.

δ. Θέλουμε να δείξουμε πως για κάθε $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2\varepsilon\varphi\theta+2\theta>2(\theta-\eta\mu\theta)\Leftrightarrow$$
$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2\varepsilon\varphi\theta>-2\eta\mu\theta\Leftrightarrow \ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$
$$\ln(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta})-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow -\ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$
$$\ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)+2<2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)<2\sigma\upsilon\nu\theta-2.$$

Από **(Ε1)** ,έχουμε $\ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)\le\sigma\upsilon\nu^2\theta-1=-\eta\mu^2\theta$

Οπότε αρκεί να δείξουμε πώς για κάθε $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει $-\eta\mu^2\theta<2\sigma\upsilon\nu\theta-2$

Θεωρώ $t(\theta)=2\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta-2, \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Η t παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$t'(\theta)=-2\eta\mu\theta+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=2\eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta-1)\le 0$.

Οπότε η t είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$. Άρα για κάθε $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ισχύει

$t(\theta)\le t(0)\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta-2\le 0$. Συνεπώς για κάθε $(0,\frac{\pi}{2})$ έχουμε ,

$2\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta-2<0.$

Β΄ τρόπος για το Ε3.δ.

Θέλουμε να δείξουμε πως για κάθε $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\theta \cdot \ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2\varepsilon\varphi\theta+2\theta>2(\theta-\eta\mu\theta)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta \cdot \ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2\varepsilon\varphi\theta>-2\eta\mu\theta\Leftrightarrow$$
$$\ln(\varepsilon\varphi^2\theta+1)-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta})-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$
$$-\ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)-2>-2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)+2<2\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$$
$$\ln(\sigma\upsilon\nu^2\theta)<2\sigma\upsilon\nu\theta-2\Leftrightarrow 2\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)<2\sigma\upsilon\nu\theta-2\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\theta)<\sigma\upsilon\nu\theta-1$$

$\Leftrightarrow 2\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)<2\sigma\upsilon\nu\theta-2\Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu\theta)<\sigma\upsilon\nu\theta-1$ που ισχύει λόγω του **(Ε1)** με $x=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $x\in(0,1)$.

ΘΕΜΑ 140

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $\int_0^{f(x)}\left(e^t+1\right)dt=x-1.$

Ε1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς το που στρέφει τα κοίλα.

Ε3. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

Ε4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e+1$.

Ε5. Να δείξετε ότι $(x-1)f'(x)<f(x)<\frac{x-1}{2}$ για κάθε $x>1$.

Πηγή: Ε.Τσακουμάγκος – Α.Μπαλωμένου (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $g(t)=e^t+1$ είναι συνεχής στο R, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, η f είναι παραγωγίσιμη στο R, η $\int_0^{f(x)} g(t)dt.$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Η $x-1$ παραγωγίσιμη στο R.

Παραγωγίζουμε κατά μέλη την σχέση $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x-1$.

Οπότε, $f'(x)(e^{f(x)}+1)=1 \overset{e^{f(x)}+1>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+1}>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x-1 \Rightarrow \left[e^t+x\right]_0^{f(x)}=x-1 \Rightarrow e^{f(x)}+f(x)=x$.

Θεωρώ $h(x)=e^x+x, x\in R$. Η h παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=e^x+1>0$.
Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.
Βρίσκουμέ το συνολο τιμών της: Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$.

Επομένως η h έχει σύνολο τιμών το R. Συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} η οποία έχει πεδίο ορισμού το R. Έχουμε $h(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=h^{-1}(x)$. Οπότε η f έχει σύνολο τιμών το R.
Ακόμα έχουμε ότι $h(f(x))=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=h(x)=e^x+x, x\in R$.

Ε2. Έχουμε $f''(x)(e^{f(x)}+1)+\left(f'(x)\right)^2 e^{f(x)}=0 \Rightarrow f''(x)=\frac{-\left(f'(x)\right)^2 e^{f(x)}}{(e^{f(x)}+1)}<0.$

Οπότε η f είναι κοίλη στο $R.$

Ε3. Έχουμε πως $f(1)=0$, διότι για $x=1$ έχουμε $\int_0^{f(1)}\left(e^t+1\right)dt=0 (1)$.

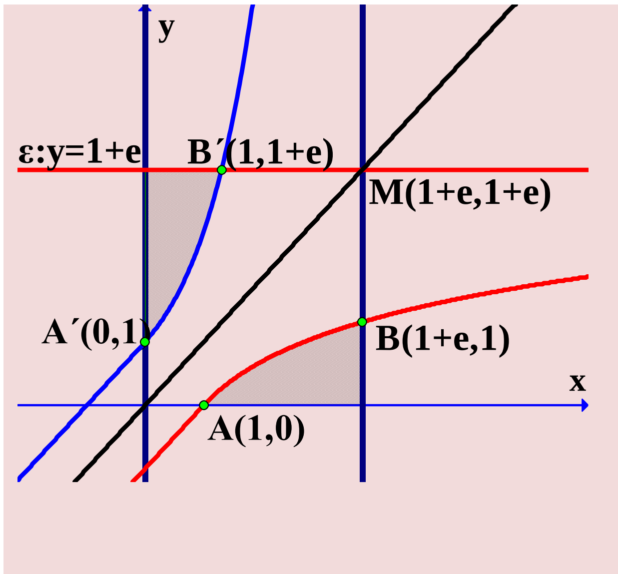
Όμως επειδή για κάθε $t\in R$ έχουμε $e^t+1>0$ για να ισχύει η (1) πρέπει $f(1)=0$. Επίσης, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R έχουμε ότι η $x=1$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$. Επιπλέον για κάθε $x>1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$. Καθώς για κάθε $x<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(1)=0$.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e+1$ είναι $E=\int_1^{1+e}|f(x)|dx$. Επιπλέον για κάθε $x>1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$

άρα, $E=\int_1^{1+e} f(x)dx$

Α΄ τρόπος

Ψάχνουμε το εμβαδόν $E=\int_1^{1+e} f(x)dx$.



Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ άρα τα σημεία $A(1,f(1))$, $B(1+e,f(1+e))$ είναι συμμετρικά με τα σημεία $A'(0,f^{-1}(0))=A'(0,1)$, $B'(1,f^{-1}(1))=B'(1,1+e)$ αντίστοιχα

.Ακόμη το εμβαδόν $E=\int_1^{1+e} f(x)dx$ λόγω συμμετρίας είναι ίσο με το

$$E=\int_0^1\left(1+e-f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^1\left(1+e-e^x-x\right)dx=\left[x+xe-e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E=1+e-e-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}\text{τ.μ.}$$

Β΄ τρόπος

Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u)=e^u+u$, τότε $dx=(e^u+1)du.$

Για $x=1 \Rightarrow u=0$ ενώ για $x=1+e \Rightarrow u=1.$

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_1^{1+e} f(x)dx=\int_0^1 u(e^u+1)du=\int_0^1 u(e^u+1)du=\left[ue^u\right]_0^1-\left[e^u\right]_0^1+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}\text{τμ.}$$

Ε5. Για $x>1$ στο διάστημα $[1,x]$ επειδή f παραγωγίσιμη , από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Επειδή η f είναι κοίλη, έχουμε οτι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα,

$$1<\xi<x \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(1).$$

Όμως για κάθε $x>1$ έχουμε $f(1)=0, x-1>0$.

Επειδή $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ και $f(1)=0$ έχουμε $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, οπότε η σχέση $f'(x)<\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(1)$ γίνεται $(x-1)f'(x)<f(x)<\dfrac{x-1}{2}$.

ΘΕΜΑ 141

Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-3x$ και $g(x)=\displaystyle\int_1^{\ln x}\frac{e^t(e^t+3t)}{e^t-3t}dt$

Ε1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Ε2. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$,οι οποίες ανήκουν στα διαστήματα $\left(0,\dfrac{e}{3}\right)$ και $(\ln 3,2)$.

Ε3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

Ε4. Να βρείτε το σημείο καμπής της g.

Ε5. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και ότι για κάθε $\alpha,\beta\in D_g$ με $\alpha<\beta$ ισχύει

$$(e-3)\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta}\frac{e^t(e^t+3t)}{e^t-3t}dt\ge(\beta-\alpha)(e+3).$$

Πηγή: Χ. Πατήλας (εκδόσεις Ελληνοεκδοτική)

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=e^x-3x$ με $f'(x)=e^x-3$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x=3\Leftrightarrow x=\ln 3$

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow x>\ln 3$. Η f είναι γνήσιως αύξουσα στο $[\ln 3,+\infty)$.

$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x<3\Leftrightarrow x<\ln 3$. η f είναι γνήσιως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln 3]$.

Έτσι , σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα, από τον οποίο βλέπουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln 3$, με τιμή $f(\ln 3)=3-3\ln 3$.

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-3x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-3x)\overset{(+\infty-\infty)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}[e^x(1-\dfrac{3x}{e^x})]=+\infty$.

Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{3x}{e^x})=1$.

Έχουμε $f\left((-\infty,\ln 3]\right)\overset{f\downarrow}{=}[f(\ln 3),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[3-3\ln 3,+\infty)$ και

$f\left([\ln 3,+\infty)\right)\overset{f\uparrow}{=}[f(\ln 3),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[3-3\ln 3,+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f , είναι το $[3-3\ln 3,+\infty)$.

Ε2. Έχουμε $f(0)=1>0$ και $f(\frac{e}{3})=e^{\frac{e}{3}}-e<0,$ αφού

$e<3\Leftrightarrow\frac{e}{3}<1\Leftrightarrow e^{\frac{e}{3}}<e.$ Η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{e}{3}]$ και $f(0)f(\frac{e}{3})<0.$

Από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει $x_1\in(0,\frac{e}{3})$ ώστε $f(x_1)=0.$

Η ρίζα είναι μοναδική γιατί στο $(-\infty,\ln 3]$ η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και $(0,\frac{e}{3})\subset(-\infty,\ln 3]$, αφού $\frac{e}{3}<\ln 3\Leftrightarrow e<\ln 3^3\Leftrightarrow$

$\ln e^e<\ln 3^3\Leftrightarrow e^e<3^3$, που ισχύει γιατί $e<3$.

Επίσης είναι $f(\ln 3)=3-3\ln 3=3(1-\ln 3)=3(\ln e-\ln 3)<0$ γιατί $e<3$ και $f(2)=e^2-4>0$ γιατί $e>2$ οπότε ισχύει $f(\ln 3)f(2)<0,$ από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει $x_2\in(\ln 3,2)$ ώστε $f(x_2)=0.$ Η ρίζα είναι μοναδική, γιατί στο $[\ln 3,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα.

Ε3. Επειδή είναι $g(x)=\int_1^{\ln x}\frac{e^t(e^t+3t)}{f(t)}dt$ και

$f(t)\neq 0$ για $t\in(-\infty,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup(x_2,+\infty)$, ισχύει $0<x_1<\frac{e}{3}<1<\ln 3<x_2$.

Πρέπει και για $x>0$ να ισχύει $x_1<\ln x<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<x<e^{x_2}$ ή $3x_1<x<3x_2$,αφού x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Επομένως , το πεδίο ορισμού της g είναι το $A=(3x_1,3x_2)$.

Ε4. Η f είναι συνεχής στο $(3x_1,3x_2)$ και η $e^t(e^t+3t)$ είναι συνεχής στο $(3x_1,3x_2)$, οπότε η συνάρτηση $\int_1^{x}\frac{e^t(e^t+3t)}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(3x_1,3x_2)$. Ακόμα, η $\ln x$ παραγωγίσιμη στο $(3x_1,3x_2)$.Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{e^{\ln x}(e^{\ln x}+3\ln x)}{f(\ln x)}\frac{1}{x}=\frac{x(x+3\ln x)}{(x-3\ln x)x}=\frac{x+3\ln x}{x-3\ln x}$$, ακόμη

$$g''(x)=\frac{(1+\frac{3}{x})(x-3\ln x)-(1-\frac{3}{x})(x+3\ln x)}{(x-3\ln x)^2}=\frac{6(1-\ln x)}{(x-3\ln x)^2}$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{6(1-\ln x)}{(x-3\ln x)^2}=0\Leftrightarrow x=e\in(3x_1,3x_2)$$

$$g''(x)>0\Leftrightarrow\frac{6(1-\ln x)}{(x-3\ln x)^2}>0\Leftrightarrow 3x_1<x<e$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα και έχουμε ότι η $\mathbf{g}$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $(3x_1, e]$ και τα κοίλα κάτω στο $[e, 3x_2)$.

x	$3x_1$	e	$3x_2$
$g''(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\cup$	Σ.Κ	$\cap$

Έχουμε $g(e) = \int_1^1 \frac{e^t(e^t + 3t)}{e^t - 3t} dt = 0.$

Επειδή $g''(e) = 0$ και η g'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $e \in (3x_1, 3x_2)$, η g έχει σημείο καμπής το σημείο $B(e, 0)$.

Ε5. Η προς απόδειξη σχέση γράφεται $(e-3)(g(\beta)-g(\alpha)) \geq (\beta-\alpha)(e+3)$. Επειδή τώρα $g''(e) = 0$ και $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$,η g' είναι γνήσιως αύξουσα στο $(3x_1, e]$. Επειδή η $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$, η g' είναι γνήσιως φθίνουσα στο $[e, 3x_2)$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η g' παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = e$ με τιμή $g'(e) = \frac{e+3}{e-3} < 0,$ άρα για κάθε $x \in (3x_1, 3x_2)$ ισχύει $g'(x) < 0,$ επομένως η g είναι γνήσια φθίνουσα στο $(3x_1, 3x_2)$.

x	$3x_1$	e	$3x_2$
$g''(x)$	+	0	-
$g'(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ	$\searrow$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subset (3x_1, 3x_2)$,παραγωγίσιμη (α, β), οπότε από **ΘΜΤ**, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(\xi) = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Επειδή $g'(\xi) \leq g'(e) = \frac{e+3}{e-3}$ θα ισχύει και $\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{e+3}{e-3} \Leftrightarrow (e-3)(g(\beta)-g(\alpha)) \geq (\beta-\alpha)(e+3)$,που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 142

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) = 1 + x\int_1^x f(x-t)dt \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_{-1}^0 f(x)dx = -2 .$$

Ε1. Να βρείτε την παράγωγο της f και τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

Ε2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{(x-1)^3}$.

Ε3. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} \left[e^x \left(f(e^{-x}) - 1 \right) \right] = 2$.

Πηγή: Εισήγηση του Γ. Κωτσάκη, Βέροια 18/4/2010

Λύση:

Ε1. Για $u = x - t$ έχουμε ότι $du = -dt$.

Για $t=1 \to u=x-1$, ενώ για $t=x \to u=0$,οπότε η $f(x)=1+x\int_1^x f(x-t)dt$

γίνεται $f(x)=1+x\int_{x-1}^{0} f(u)(-du)=1+x\int_0^{x-1} f(u)du$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$f'(x)=\int_0^{x-1} f(u)du+xf(x-1)$. Επομένως $f'(1)=f(0)$.

Ακόμα, $f(0)=1+0\int_0^{-1} f(u)du=1$, άρα $f'(1)=1$.

Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$ είναι $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

Ε2. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Ε3. Έχουμε $f(e^{-x})-1=e^{-x}\int_0^{e^{-x}-1} f(u)du$.

Οπότε $g(x)=e^x\left(f(e^{-x})-1\right)=\int_0^{e^{-x}-1} f(u)du$. Έχουμε, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^{e^{-x}-1} f(u)du\right)$.

Θέτουμε $e^{-x}=t$, όταν $x\to+\infty$ έχουμε ότι $t\to 0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^{e^{-x}-1} f(u)du\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\int_0^{t-1} f(u)du\right)$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, άρα η συνάρτηση $\int_0^{t} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Η $t-1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, άρα και συνεχής. Οπότε, $\lim\limits_{t\to 0}\left(\int_0^{t-1} f(u)du\right)=\int_0^{-1} f(u)du=-\int_{-1}^{0} f(u)du=-(-2)=2$.

(*)Ενδιαφέρον παρουσιάζει η άσκηση όταν δεν γνωρίζουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f . Ας δούμε τροποποιημένο το πρώτο ερώτημα της άσκησης καθώς και τη λύση του.

Τροποποιημένο ερώτημα: Έστω η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)=1+x\int_1^x f(x-t)dt$ με $x\in\mathbf{R}$ και $\int_{-1}^{0} f(x)dx=-2$. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$.

Λύση:

Για $\mathbf{u = x - t}$ έχουμε ότι $\mathbf{du = -dt}$.

Για $\mathbf{t = 1 \to u = x - 1}$, ενώ για $\mathbf{t = x \to u = 0}$,οπότε η $\mathbf{f(x) = 1 + x\int_1^x f(x - t)dt}$ γίνεται

$$\mathbf{f(x) = 1 + x\int_{x-1}^{0} f(u)(-du) = 1 + x\int_{0}^{x-1} f(u)du}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{1+x\int_0^{x-1}f(u)du-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x\int_0^{x-1}f(u)du}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(D'LH)}{=}}}$$
$$\mathbf{= \lim_{x\to1}\left(\int_0^{x-1}f(u)du + xf(x-1)\right) = f(0)}$$

Επομένως $\mathbf{f'(1) = f(0)}$. Ακόμα, $\mathbf{f(0) = 1 + 0\int_0^{-1} f(u)du = 1}$, άρα $\mathbf{f'(1) = 1}$.

Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x_0 = 1}$ είναι $\mathbf{\omega = \frac{\pi}{4}}$.

ΘΕΜΑ 143

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω ο μιγαδικός $\mathbf{z \neq i}$ και η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f : R \to R}$ που είναι γνησίως αύξουσα, ώστε: $\mathbf{|z-i|f(x) + |z+i|f(1-x) = |z-i| + |z+i|}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Ε1. Να δείξετε ότι $\mathbf{|z-i| = |z+i|}$.

Ε2. Να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.

Ε3. Να λύσετε την ανίσωση $\mathbf{f(x) > 1}$.

Ε4. Να δείξετε ότι $\mathbf{\int_0^1 f(x)dx = 1}$.

Ε5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{\int_0^{2x} f(t)dt = 1 - xf(x)}$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

Πηγή: <u>Γ. Μπαϊλάκης (εκδόσεις Σαββάλας)</u>

Λύση:

Ε1. Αν $\mathbf{|z-i| = \alpha \in R, |z+i| = \beta \in R}$ τότε θα ισχύει

$$\mathbf{\alpha f(x) + \beta f(1-x) = \alpha + \beta, x \in R, \alpha, \beta \in R}$$

Βάζοντας όπου $\mathbf{x}$ το $\mathbf{1-x}$ έχουμε $\mathbf{\alpha f(1-x) + \beta f(x) = \alpha + \beta, x \in R}$, οπότε θα ισχύει και $\mathbf{\alpha f(1-x) + \beta f(x) = \alpha f(x) + \beta f(1-x) \Leftrightarrow (\beta - \alpha)f(x) = (\beta - \alpha)f(1-x), x \in R}$

Αν $\mathbf{\alpha \neq \beta}$, έχουμε ότι $\mathbf{f(x) = f(1-x), x \in R}$.

Για $\mathbf{x = 1}$ δίνει $\mathbf{f(0) = f(1)}$ **άτοπο**, γιατί η $\mathbf{f}$ γνήσια αύξουσα,

άρα αναγκαία $\mathbf{\alpha = \beta}$ δηλαδή $\mathbf{|z-i| = |z+i|}$.

Ε2. Από $\mathbf{|z-i| = |z+i|}$ η εικόνα του $\mathbf{z}$ σημείο της μεσοκαθέτου του $\mathbf{AB}$ με

$A(0,1), B(0,-1)$ άρα σημείο του $x'x$ άρα πραγματικός.

Ε3. Αφού $|z-i|=|z+i|$ και λόγω $z\neq i$,από την αρχική θα ισχύει $f(x)+f(1-x)=2, x\in R$.

Για $x=\frac{1}{2}$ θα ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ οπότε η ανίσωση

$f(x)>1\Leftrightarrow f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ διότι η f γνήσια αύξουσα.

Ε4. Ισχύει $f(x)+f(1-x)=2\Rightarrow\int_0^1\big(f(x)+f(1-x)\big)dx=\int_0^1 2dx\Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=[2x]_0^1$

Θέτουμε $1-x=u$, οπότε $dx=-du$. Επίσης για $x=0$ έχουμε $u=1$, ενώ για $x=1$ έχουμε $u=0$, τότε $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_1^0 -f(u)du=\int_0^1 f(u)du$

Επομένως η $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=[2x]_0^1$ γίνεται $2\int_0^1 f(x)dx=2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=1$.

Ε5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^{2x} f(t)dt-1+xf(x), x\in[0,\frac{1}{2}]$.

Η h συνεχής στο $[0,\frac{1}{2}]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον

$h(0)=\int_0^0 f(t)dt-1+0f(0)=-1<0$ και

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 f(t)dt-1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

Οπότε από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\frac{1}{2})$ τέτοιο ώστε

$h(\xi)=0\Leftrightarrow\int_0^{2\xi} f(t)dt=1+\xi f(\xi)$.

Άρα η εξίσωση $\int_0^{2x} f(t)dt=1+xf(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

ΘΕΜΑ 144 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει $\int_e^x \frac{f(t)}{x}dt=f(x)-1$. Να βρείτε:

Ε1. Τον τύπο της f .

Ε2. Την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται απο την αρχή των αξόνων.

Ε3. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη C_f τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (ε).

Ε4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{f(x)}{f(t)}dt.$

Ε5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{1}{(x^2-x)f(t)}dt.$

Λύση:

Ε1. Έχουμε ,

$$\int_e^x\frac{f(t)}{x}dt=f(x)-1\Rightarrow\frac{1}{x}\int_e^x f(t)dt=f(x)-1\Rightarrow\int_e^x f(t)dt=xf(x)-x.$$

Η f παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής , συνεπώς η συνάρτηση $\int_e^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση έχουμε,

$$\left(\int_e^x f(t)dt\right)'=(xf(x)-x)'\Rightarrow f(x)=f(x)+xf'(x)-1\Rightarrow xf'(x)=1.$$

Οπότε για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=(\ln x)'\Rightarrow$

$f(x)=\ln x+c, x>0, c\in R$ (1) .

Για $x=e$, από την αρχική σχέση λαμβάνουμε $f(e)=1$.

Άρα για $x=e$, από την (1) ,βρίσκουμε $c=0$.

Συνεπώς έχουμε $f(x)=\ln x, x>0.$ Που επαληθεύει την αρχική σχέση

Ε2. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$ έχει εξίσωση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\Rightarrow y-\ln x_o=\frac{1}{x_o}(x-x_o)$. (ε)

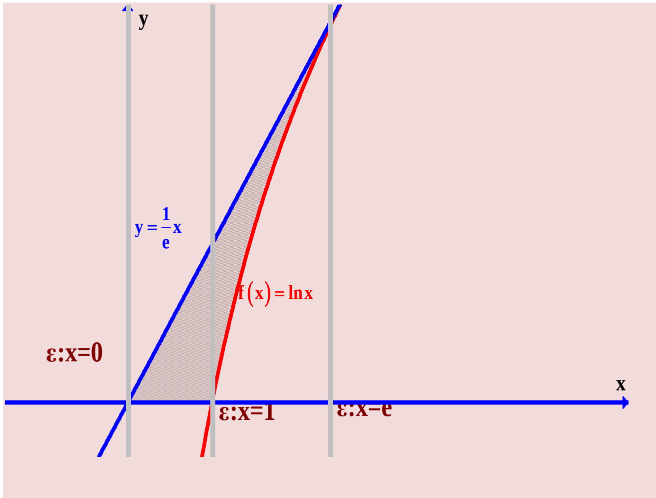
Θέλουμε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα

$O(0,0)\in(\varepsilon)\Rightarrow -\ln x_o=\frac{1}{x_o}(-x_o)\Rightarrow x_o=e$.

Η εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η εφαπτομένη στο σημείο $A(e,\ln e)=(e,1)$ και έχει εξίσωση $y=\frac{1}{e}x$ ή $g(x)=\frac{1}{e}x$.

Έχουμε $f(x)=\ln x, x>0,$ ακόμα $f'(x)=\frac{1}{x}, x>0$ και $f''(x)=-\frac{1}{x^2}, x>0$.

Επειδή για κάθε $x>0$ ισχύει $f''(x)<0$, έχουμε πως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$. Οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάντα κάτω από την εξίσωση της εφαπτομένης, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Το ζητούμενο εμβαδόν μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους εμβαδά. Στο χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x=1$ και την εφαπτομένη, καθώς και στο χωρίο που περικλείεται από την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφική παράσταση της f στο σημείο $(e,1)$, τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x=1$. Έτσι έχουμε,



$$E=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^e\left(g(x)-f(x)\right)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{e}xdx+\int_1^e\left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2e}-x\ln x+x\right]_1^e=\frac{e-2}{2}\text{ τ.μ.}$$

Ε3. Έστω $T(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$ που είναι παραγωγίσιμη με

$T'(x)=-\frac{1}{x(\ln x)^2}<0$, όποτε για κάθε $x\in(0,\pi)$ η T είναι γνησίως φθίνουσα

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και για κάθε t με $x\le t\le x^2$ θα είναι:

$T(x)\ \ge T(t)\ \ge T(x^2)\Rightarrow T(x^2)\ \le T(t)\ \le T(x)$(*)

$$\int_x^{x^2}T(x^2)dt\le\int_x^{x^2}T(t)dt\le\int_x^{x^2}T(x)dt\Rightarrow(x^2-x)T(x^2)\le\int_x^{x^2}T(t)dt\le(x^2-x)T(x)\Rightarrow$$

$$\frac{(x^2-x)}{\ln x^2}\le\int_x^{x^2}T(t)dt\le\frac{(x^2-x)}{\ln x}\Rightarrow\frac{(x^2-x)}{2\ln x}\le\int_x^{x^2}T(t)dt\le\frac{(x^2-x)}{\ln x}(1)$$

Από (1) έχουμε $\frac{(x^2-x)}{2\ln x}\le\int_x^{x^2}T(t)dt\le\frac{(x^2-x)}{\ln x}\Rightarrow\frac{x^2-x}{2}\le\int_x^{x^2}\ln x\frac{1}{f(t)}dt\le x^2-x\Rightarrow$

$\frac{x^2-x}{2}\le\int_x^{x^2}\frac{f(x)}{f(t)}dt\le x^2-x$.

Είναι $\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x)}{2}=0,\lim_{x\to1}(x^2-x)=0$

άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x\to1^+}\int_x^{x^2}\frac{f(x)}{f(t)}dt=0$.

(*) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

ισχύει $f(x)\le g(x)$ έχουμε $f(x)-g(x)\le 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\le 0 \Rightarrow$

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Ε4. Από **Ε3.** έχουμε

$$\frac{(x^2-x)}{2\ln x}\le \int_x^{x^2} T(t)dt \le \frac{(x^2-x)}{\ln x} \Rightarrow \frac{1}{2\ln x}\le \int_x^{x^2}\frac{1}{(x^2-x)f(t)}dt \le \frac{1}{\ln x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{2\ln x}=+\infty, \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x}=+\infty$,

από κριτήριο παρεμβολής θα είναι: $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{1}{(x^2-x)f(t)}dt.$

ΘΕΜΑ 145 — Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις f,g ορισμένες και συνεχείς στο R με

$\int_{\int_x^1 f(t)dt}^{\int_0^x f(t)dt} g(t)dt > 0$ για κάθε $x\in R-\{0,1\}$ με $g(x)+g(2-x)=2$ και

$g(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$.

Ε1. Να δείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt > \int_x^1 f(t)dt$ για κάθε $x\in R-\{0,1\}$.

Ε2. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)dt=0$.

Ε3. Να δείξετε ότι $f(1)=0$ και $f(0)=0$.

Ε4. Αν η f παραγωγίσιμη , να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\int_x^1 f(t)dt=f(x)f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Ε5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_x^1 f(t)dt = xf(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Ε6. Αν η f παραγωγίσιμη , να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=-xf'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Ε7. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $g(x)$ με τον άξονα $x'x$ από $x=0$ μέχρι $x=2$.

Πηγή:Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Επειδή g συνεχής και για κάθε $x\in R$ ισχύει $g(x)\ne 0$, από συνέπεια του θεωρήματος **Bolzano,** η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.
Όμως, για $x=1$ ισχύει $2g(1)=2 \Leftrightarrow g(1)=1>0$ θα είναι $g(x)>0, x\in R$.

Τώρα αν $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $G(x)=\int_x^1 f(t)dt$, θα ισχύει σύμφωνα με την υπόθεση

$\int_{G(x)}^{F(x)} g(t)dt > 0\ x \neq 0,1.$

Αν υπάρχει $x_0 \in R-\{0,1\}$ ώστε $F(x_0)=G(x_0)$ τότε το $\int_{G(x_0)}^{F(x_0)} g(t)dt = 0$ **άτοπο**

Αν υπάρχει $x_0 \in R-\{0,1\}$ ώστε $F(x_0)<G(x_0)$ επειδή $g(x)>0, x\in R$ θα ισχύει ότι

$\int_{G(x_0)}^{F(x_0)} g(t)dt < 0,$ **άτοπο,** άρα θα ισχύει $F(x)>G(x)$, $x\in R-\{0,1\}$.

Ε2. Επειδή τώρα ισχύει $F(x)>G(x)$, $x\in R-\{0,1\}$ και οι $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,

$G(x)=\int_x^1 f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο R, άρα και συνεχείς , θα ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0} F(x) \geq \lim\limits_{x\to 0} G(x),$ δηλαδή ότι $F(0)\geq G(0) \Leftrightarrow 0 \geq \int_0^1 f(x)dx$

και ακόμη $\lim\limits_{x\to 1} F(x) \geq \lim\limits_{x\to 1} G(x),$ δηλαδή ότι $F(1)\geq G(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \geq 0.$

Οπότε αναγκαία , $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Ε3. Αν $h(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$ λόγω των (**Ε1**), (**Ε2**) θα ισχύει ότι

$h(x)\geq 0, x\in R$.Αφού $h(1)=h(0)=0$, θα παρουσιάζει ακρότατα στα $x_1=0, x_2=1$

και αφού είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2f(x)$, από θεώρημα **Fermat**, θα είναι

$h'(0)=h'(1)=0$ άρα $f(0)=f(1)=0$.

Ε4. $f(x)\int_1^x f(t)dt = f(x)f'(x) \Leftrightarrow 2f(x)G(x)+2f(x)f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$2f(x)G(x)+2f(x)f'(x)=0 \Leftrightarrow 2G'(x)G(x)+2f(x)f'(x)=0 \Leftrightarrow (G^2(x)+f^2(x))'=0.$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=G^2(x)+f^2(x), x\in[0,1]$ αυτή
είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων,με
$H'(x)=2G(x)G'(x)+2f(x)f'(x) \Leftrightarrow H'(x)=-2f(x)G(x)+2f(x)f'(x).$
Ακόμα, $H(0)=H(1)=0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle**, η $H'(x)=0$ θα έχει
ρίζα στο $(0,1)$ δηλαδή $-2f(x)G(x)+2f(x)f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\int_1^x f(t)dt = f(x)f'(x).$

Ε5. $\int_1^x f(t)dt - xf(x)=0 \Leftrightarrow G(x)+xf(x)=0 \Leftrightarrow$

$(x)'G(x)+xG'(x)=0 \Leftrightarrow \left(xG(x)\right)'=0.$

Θεωρώντας τώρα τη συνάρτηση $K(x)=xG(x), x\in[0,1]$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $K'(x)=G(x)+xG'(x)=\int_1^x f(t)dt - xf(x)$ και $K(1)=K(0)=0$,σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle**, η εξίσωση $K'(x)=\int_1^x f(t)dt - xf(x)=0$ θα έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Ε6. $2f(x)+xf'(x)=0 \Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$(x^2)'f(x)+x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2f(x)\right)'=0$

Θεωρώντας την συνάρτηση $\alpha(x)=x^2f(x), x\in[0,1]$ είναι παραγωγίσιμη με $\alpha'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$ με $\alpha(0)=\alpha(1)=0$, άρα από θεώρημα **Rolle** , η εξίσωση $\alpha'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=0$, θα έχει ρίζα στο $(0,1)$, ισοδύναμα $2f(x)+xf'(x)=0$.

Ε7. Το ζητούμενο εμβαδόν, αφού $g(x)>0, x\in R$ θα είναι

$$E=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2[2-g(2-x)]dx=\int_0^2 2dx-\int_0^2 g(2-x)dx \Leftrightarrow E=4-\int_0^2 g(2-x)dx$$

Για $u=2-x$ είναι $du=-dx$. Όταν $x=0\rightarrow u=2,\ x=2\rightarrow u=0.$

Το $\int_0^2 g(2-x)dx$ γίνεται $\int_2^0 g(u)(-du)=\int_0^2 g(u)du=E$

Άρα $E=4-E \Leftrightarrow 2E=4 \Leftrightarrow E=2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 146

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Έστω η πραγματική συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο R με $\int_1^{x^2}\frac{f(tx)}{x|x|}dt \geq x^2-1$ για κάθε $x\in R-\{0\}$.

Ε1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\alpha(x)=\int_x^{x^3} f(t)dt$ παραγωγίζεται.

Ε2. Να δείξετε ότι $f(1)=1$ και $f(-1)=-1$.

Ε3. Να βρείτε την παράγωγο της $\alpha(x)$ στο $x=0$ και να δείξετε ότι $f(0)=0$.

Ε4. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής .

Πηγή:Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Είναι $\alpha(x)=\int_x^0 f(t)dt+\int_0^{x^3} f(t)dt=\int_0^{x^3} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε και η $\int_0^{x^3} f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο R,ως σύνθεση παραγωγίσιμων. Επομένως και η $\alpha(x)$ παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με $\alpha'(x)=3x^2 f(x^3)-f(x)$.

Ε2. Για $u=tx$ έχουμε $du=xdt$. Όταν $t=1\to u=x, t=x^2\to u=x^3$

Για $x\neq 0$, το $\int_1^{x^2}\frac{f(tx)}{x|x|}dt=\int_1^{x^2}\frac{f(tx)}{x^2|x|}xdt=\int_x^{x^3}\frac{f(u)}{x^2|x|}du=\frac{1}{x^2|x|}\int_x^{x^3}f(u)du=\frac{1}{x^2|x|}\alpha(x).$

Επομένως σύμφωνα με την υπόθεση ισχύουν τα εξής:

Για $x>0$, $\frac{1}{x^3}\alpha(x)-x^2+1\geq 0\Leftrightarrow \alpha(x)-x^5+x^3\geq 0\,(1)$

Ενώ για $x<0$, $-\frac{1}{x^3}\alpha(x)-x^2+1\geq 0\Leftrightarrow -\alpha(x)-x^5+x^3\leq 0\Leftrightarrow \alpha(x)+x^5-x^3\geq 0\,(2)$

Αν τώρα $\beta(x)=\alpha(x)-x^5+x^3$ ισχύει λόγω του (1) ότι $\beta(x)\geq 0$,
επειδή η β είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\beta'(x)=\alpha'(x)-5x^4+3x^2$.
Και $\beta(1)=\alpha(1)=0$, στο $x_1=1$ η συνάρτηση β παρουσιάζει ακρότατο.
Σύμφωνα με το θεώρημα **Fermat,** θα είναι $\beta'(1)=\alpha'(1)-5+3=0\Leftrightarrow \alpha'(1)=2$
δηλαδή $3f(1)-f(1)=2\Leftrightarrow f(1)=1$

Ομοίως ,για την $\gamma(x)=\alpha(x)+x^5-x^3$ ισχύει ότι $\gamma(x)\geq 0, x\in(-\infty,0)$.
Η γ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $\gamma'(x)=\alpha'(x)+5x^4-3x^2$. Επίσης,
$\gamma(-1)=\alpha(-1)=0$, άρα ισχύει $\gamma(x)\geq\gamma(-1), x\in(-\infty,0)$. Οπότε η συνάρτηση γ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_2=-1$. Από το θεώρημα **Fermat,** θα ισχύει ότι
$\gamma'(-1)=\alpha'(-1)+5-3=0\Leftrightarrow \alpha'(-1)=-2$,
οπότε $3f(-1)-f(-1)=-2\Leftrightarrow f(-1)=-1$.

Ε3. Είναι $\alpha'(0)=-f(0)$. Τώρα , για $x>0$ ισχύει ότι
$\alpha(x)-x^5+x^3\geq 0\Leftrightarrow \alpha(x)\geq x^5-x^3\Leftrightarrow \alpha(x)-\alpha(0)\geq x^5-x^3$
και τελικά $\frac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\geq x^4-x^2$ θα ισχύει $\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\geq 0$ άρα $\alpha'(0)\geq 0$.
Για $x>0$ ισχύει ότι, $\alpha(x)+x^5-x^3\geq 0\Leftrightarrow \alpha(x)\geq -x^5+x^3\Leftrightarrow \alpha(x)-\alpha(0)\geq -x^5+x^3$.
Τελικά , $\frac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\leq -x^4+x^2$. Οπότε $\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha(x)-\alpha(0)}{x}\leq 0$,άρα $\alpha'(0)\leq 0$.
Τελικά $\alpha'(0)=0$, επομένως $f(0)=0$.

Ε4. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$, οπότε σύμφωνα με **ΘΜΤ** ,θα υπάρχουν $x_1 \in (-1,0), x_2 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και $f'(x_1)=f'(x_2)=1$. Οπότε σύμφωνα με το **Rolle**, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$. Άρα η $\mathbf{f}$ έχει ένα πιθανό σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 147

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $3f(x)-\int_{-2x}^{x} f\left(\dfrac{x-t}{3}\right)dt = x^3-6x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f}$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι $1-1$.

Ε4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης της f, τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{2}{e^2}, x=2$.

Πηγή: <u>Βασίλης Παπαδάκης, (εκδόσεις Σαββάλας)</u>

Λύση:

Ε1. Θέτουμε $\dfrac{x-t}{3}=u$, έχουμε $dt=-3du$. Για $t=-2x \Rightarrow u=x$ και για $t=x\Rightarrow u=0$. Οπότε $\displaystyle\int_{-2x}^{x} f\left(\frac{x-t}{3}\right)dt=\int_{x}^{0}-3f(u)du=\int_{0}^{x}3f(u)du.$

Επομένως η σχέση $3f(x)-\displaystyle\int_{-2x}^{x} f\left(\frac{x-t}{3}\right)dt=x^3-6x+6$ γίνεται ,

$$3f(x)-\int_0^x 3f(u)du=x^3-6x+6 \Leftrightarrow 3f(x)=3\int_0^x f(u)du+x^3-6x+6 .$$

Έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $\displaystyle\int_0^x f(u)du$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,η x^3-6x+6 παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,οπότε η $3\displaystyle\int_0^x f(u)du+x^3-6x+6$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγισίμη στο $\mathbb{R}$.

Ε2. Για $x=0$ έχουμε $3f(0)=6 \Leftrightarrow f(0)=2$.
Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε

$$3f'(x)=3f(x)+3x^2-6 \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=x^2-2 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}(x^2-2)$$

$$\left(f'(x)e^{-x}\right)'=e^{-x}x^2-2e^{-x} \quad (1).$$

Σημείωση: Μετά την αφαίρεση του αόριστου ολοκληρώματος από την ύλη της Γ΄ Λυκείου, δουλεύουμε με την εύρεση παράγουσας.

Έχουμε ότι

$$\int_0^x e^{-t}t^2dt-2\int_0^x e^{-t}dt=-\int_0^x\left(e^{-t}\right)'t^2dt-2\int_0^x e^{-t}dt=-\left[e^{-t}t^2\right]_0^x+\int_0^x 2te^{-t}dt-2\int_0^x e^{-t}dt=$$

$$-\left[e^{-t}t^2\right]_0^x-\int_0^x 2t\left(e^{-t}\right)'dt-2\int_0^x e^{-t}dt=-\left[e^{-t}t^2\right]_0^x-\left[2te^{-t}\right]_0^x+2\int_0^x e^{-t}dt-2\int_0^x e^{-t}dt=$$

$$-\left[e^{-t}t^2\right]_0^x-\left[2te^{-t}\right]_0^x+2\int_0^x e^{-t}dt-2\int_0^x e^{-t}dt=-\left[e^{-t}t^2\right]_0^x-\left[2te^{-t}\right]_0^x=-e^{-x}x^2-2xe^{-x}$$

Οπότε μια παράγουσα της $e^{-x}(x^2-2)$ είναι η $-e^{-x}x^2-2xe^{-x}$.

Οπότε η **(1)** γίνεται, $\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(-e^{-x}x^2-2xe^{-x}\right)' \Rightarrow$

$f(x)e^{-x}=-e^{-x}x^2-2xe^{-x}+c, x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $c=2$, οπότε $f(x)e^{-x}=-e^{-x}x^2-2xe^{-x}+2 \Leftrightarrow f(x)=-x^2-2x+2e^x$, που επαληθεύει την αρχική σχέση. Άρα $f(x)=2e^x-x^2-2x, x\in\mathbb{R}$.

Ε3. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^x-2x-2, x\in\mathbb{R}$.
Προσδιορίζουμε το πρόσημο της f', εξετάζοντας την f' ως προς τη μονοτονία.
Έχουμε οτι η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2e^x-2, x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-2=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^x-2>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Επομένως από το διπλανό πίνακα, έχουμε οτι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή $f'(0)=0$. Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι $f'(x)\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

Ε4. Θέτουμε $u=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(u)$ και έχουμε $dx=f'(u)du$.

Για $x=\frac{2}{e^2} \Rightarrow f(u)=\frac{2}{e^2} \Rightarrow f(u)=f(-2) \overset{1-1}{\Rightarrow} u=-2.$

Για $x=2 \Rightarrow f(u)=2 \Rightarrow f(u)=f(0) \overset{1-1}{\Rightarrow} u=0.$

Έχουμε $E=\int_{\frac{2}{e^2}}^{2}|f^{-1}(x)|dx=\int_{-2}^{0}|f^{-1}(f(u))|f'(u)du=\int_{-2}^{0}|u|f'(u)du=-\int_{-2}^{0}u(2e^u-2u-2)du=$

$-2\int_{-2}^{0}ue^u du+2\int_{-2}^{0}u^2du+2\int_{-2}^{0}udu=-2\left[ue^u\right]_{-2}^{0}+2\int_{-2}^{0}e^u du+2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[u^2\right]_{-2}^{0}=$

$-2\left[ue^u\right]_{-2}^{0}+2\left[e^u\right]_{-2}^{0}+2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[u^2\right]_{-2}^{0}=$

$-4e^{-2}+2-2e^{-2}+\frac{16}{3}-4=\frac{16}{3}-2-6e^{-2}=\left(\frac{10}{3}-6e^{-2}\right)$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 148

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ έτσι ώστε $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}-2\int_1^x\frac{1}{t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ για κάθε $x>0$.

Ε1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την $f'(x)$ συναρτήσει της $f(x)$.

Ε2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln x+x^2f(x)$ με $x>0$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Να βρείτε τον τύπο της f για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ε4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Ε5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(k)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=k$ με $k\in(0,1)$.

Ε6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{k\to 0^+}E(k)$.

Λύση:

Ε1. Θέτουμε $\frac{x}{t}=u\Leftrightarrow t=\frac{x}{u}$ και έχουμε $dt=-\frac{x}{u^2}du$.

Για $t=1\Rightarrow u=x$, για $t=x\Rightarrow u=1$.

Οπότε $\int_1^x\frac{1}{t}f\left(\frac{x}{t}\right)dt=\int_x^1\frac{u}{x}f(u)\frac{-x}{u^2}du=\int_1^x\frac{f(u)}{u}du$.

Επομένως, $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}-2\int_1^x\frac{f(u)}{u}du, x>0$.

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η $\frac{f(u)}{u}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $\int_1^x\frac{f(u)}{u}du$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, η $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Επομένως η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^3}-\frac{2f(x)}{x}, x>0$.

Ε2. Η $g(x)=\ln x+x^2 f(x), x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{1}{x}+2xf(x)+x^2 f'(x)=\frac{1}{x}+2xf(x)+x^2\left(-\frac{1}{x^3}-\frac{2f(x)}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$g'(x)=\frac{1}{x}+2xf(x)-\frac{1}{x}-2xf(x)=0$. Επομένως η $\mathbf{g}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Για $x=1$ έχουμε $f(1)=0$. Επειδή η $\mathbf{g}$ είναι σταθερή, έχουμε πως για κάθε $x>0$ ισχύει $g(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Επομένως, $g(x)=c\Leftrightarrow \ln x+x^2 f(x)=c \overset{x=1}{\Rightarrow} c=0$

Άρα $\ln x+x^2 f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{-\ln x}{x^2}, x>0$

Επομένως $f(x)=\frac{-\ln x}{x^2}, x>0$ που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε4. <u>Εύρεση κατακόρυφης ασύμπτωτης</u>

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{-\ln x}{x^2}\right)=+\infty$. Άρα η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

<u>Εύρεση πλάγιο -οριζόντιας ασύμπτωτης</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\ln x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-1}{x}}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)=0.$$

Άρα ο άξονας $x'x$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Β τρόπος

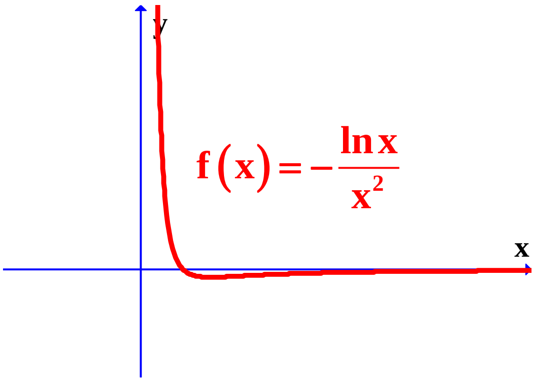
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\frac{\ln x}{x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\ln x}{x^3}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\frac{1}{x}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{3x^3}\right)=0.$$

άρα $\lambda=0$

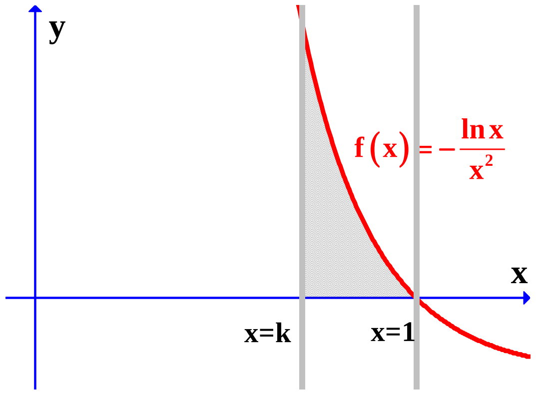
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)\overset{\lambda=0}{=}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\ln x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\frac{1}{x}}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)=0=\beta.$$

άρα $\beta=0$

Οπότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta \overset{\lambda=\beta=0}{=} 0x+0=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f. Για ασύμπτωτες, δες το σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ε5. Για κάθε $x\in(0,1]$ έχουμε $f(x)\geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν (δες σχημα 2), είναι το $E(\kappa)=\int_\kappa^1 |f(x)|dx=\int_\kappa^1 f(x)dx=$

$$=-\int_\kappa^1 \frac{\ln x}{x^2}dx=\int_\kappa^1\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x dx=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_\kappa^1-\int_\kappa^1\frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_\kappa^1+\left[\frac{1}{x}\right]_\kappa^1=-\frac{\ln\kappa}{\kappa}+1-\frac{1}{\kappa}.$$

Ε6. Έχουμε $E(\kappa)=-\frac{\ln\kappa}{\kappa}+1-\frac{1}{\kappa}=\frac{\kappa-1-\ln\kappa}{\kappa}$ άρα

$$\lim_{\kappa\to0^+}E(\kappa)=\lim_{\kappa\to0^+}\left(\frac{\kappa-1-\ln\kappa}{\kappa}\right)=\lim_{\kappa\to0^+}\left(\frac{1}{\kappa}(\kappa-1-\ln\kappa)\right)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ 149

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2f(t)}{t}\right)dt.$$

Ε1. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x>0.$

Ε2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Ε3. Αν $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$, τότε να βρεθούν τα $\lim_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

Ε4. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^3+\beta x^2-\ln x}{x^2}\right)=0.$$

Πηγή: Θ. Ξένος (εκδόσεις Ζήτη)

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\frac{1}{t^3}-\frac{2f(t)}{t}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών και συνεπώς η $\int_1^x\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2f(t)}{t}\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Τότε $f'(x)=\left(\int_1^x\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2f(t)}{t}\right)dt\right)'\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2f(x)}{x}\Rightarrow f'(x)x^2+2xf(x)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow\left(f(x)x^2\right)'=(\ln x)'\Rightarrow f(x)x^2=\ln x+c, x\in(0,+\infty), c\in R$.

Από την αρχική σχέση έχουμε $f(1)=0$ και συνεπώς

$f(x)x^2=\ln x\Rightarrow f(x)=\frac{\ln x}{x^2}, x>0$. Που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε2. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$.

Τότε $f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{e}$ και $f'(x)>0\Rightarrow x<\sqrt{e}$ και $f'(x)<0\Rightarrow x>\sqrt{e}$.

Επιπλέον η f συνεχής. Έτσι, από το διπλανό πίνακα, έουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{e}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e},+\infty)$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	O.M	$\searrow$	

Για το σύνολο τιμών της έχουμε:

$A_1=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),f(\sqrt{e})]=(-\infty,\frac{1}{2e}]$ και

$A_2=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\sqrt{e})]=(0,\frac{1}{2e}]$.

Τελικά $f(A)=A_1\cup A_2=(-\infty,\frac{1}{2e}]\cup(0,\frac{1}{2e}]=(-\infty,\frac{1}{2e}]$.

Ε3. Για το πρόσημο της f έχουμε ότι $f(x)>0\Leftrightarrow x>1$ και $f(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$. Τότε,

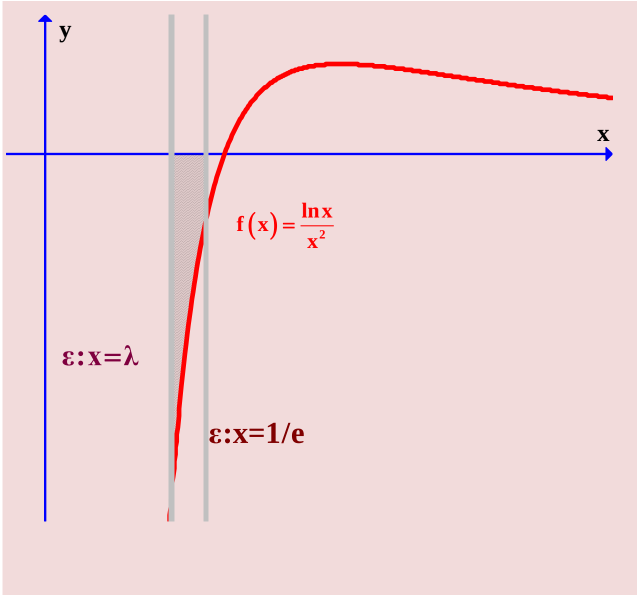
☑ Για $0<\lambda<\frac{1}{e}$ έχουμε

$$E=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\left(-f(x)\right)dx=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x dx=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}}-\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x^2}dx \Leftrightarrow$$

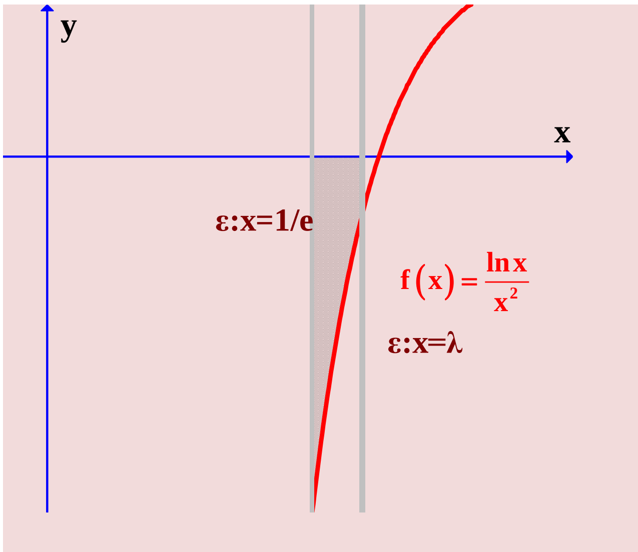
$$E=-e-\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\left[\frac{1}{x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}}=-e-\frac{\ln\lambda}{\lambda}+e-\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$E=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}.$$



☑ Για $\frac{1}{e}<\lambda<1$ έχουμε

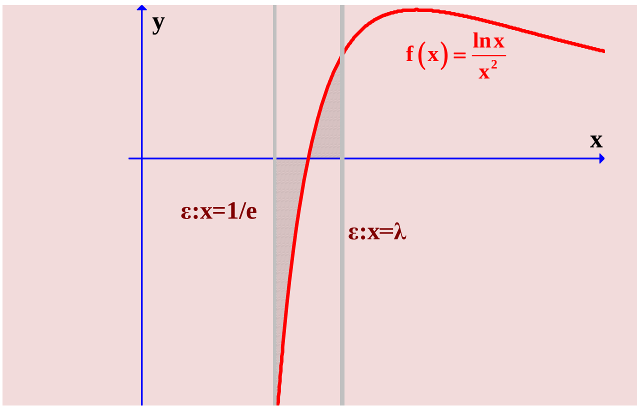
$$E=\int_{\frac{1}{e}}^{\lambda}\left(-f(x)\right)dx=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}f(x)dx=\frac{\ln\lambda}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}.$$



☑ Τέλος για $\lambda>1$ έχουμε

$$E=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-f(x)\right)dx+\int_{1}^{\lambda}f(x)dx=$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)dx+\int_{1}^{\lambda}\frac{\ln x}{x^2}dx=$$



$$=\left[\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_{1}^{\lambda}=1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}+1=2-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}.$$

Δηλαδή συνολικά $E(\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda},\ 0<\lambda<\dfrac{1}{e}\\ \dfrac{\ln\lambda}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda},\ \dfrac{1}{e}<\lambda<1\\ 2-\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda},\lambda\geq 1\end{cases}$.

Για τα όρια έχουμε, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(-\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}\right)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\lambda}(-\ln\lambda-1)\right)=+\infty$ και

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(2-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(2-\frac{\ln\lambda+1}{\lambda}\right)=2$$

αφού $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{\ln\lambda+1}{\lambda}\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{(\ln\lambda+1)'}{(\lambda)'}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}=0.$

Ε4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\alpha x+\beta)\right)$.

Για να προσδιορίσουμε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,αρκεί να βρούμε την ασύμπτωτη στο $+\infty$

Έχουμε λοιπόν,

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

ΘΕΜΑ 150

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ καθώς και η συνεχής συνάρτηση f : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Επίσης, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

Έστω $F(x)=\displaystyle\int_0^{xg(x)}f\left(\frac{t}{g(x)}\right)dt$.

Ε1. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $F(x)=g(x)\displaystyle\int_0^x f(u)du$.

Ε2. Να βρεθεί η συνάρτηση F, αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=e^{x}$.

Ε3. Αν για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $F(x)\geq x$, να δείξετε ότι $g(0)f(0)=1$.

Ε4. Να δείξετε ότι ισχύει $F(1)g(2)<F(2)g(1)$.

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

Λύση:

Ε1. Με $\mathbf{u=\frac{t}{g(x)}}$ έχουμε ότι $\mathbf{du=\frac{1}{g(x)}dt}$ και αντίστοιχα για $\mathbf{t=0}$ έχουμε $\mathbf{u=0,}$ ενώ για $\mathbf{t=xg(x)}$ έχουμε $\mathbf{u=x}$

Οπότε η $\mathbf{F(x)=\int_0^{xg(x)} f\left(\frac{t}{g(x)}\right)dt=g(x)\int_0^{xg(x)} f\left(\frac{t}{g(x)}\right)\left(\frac{1}{g(x)}\right)dt=g(x)\int_0^x f(u)du}$.

Ε2. Έχουμε $\mathbf{f(x)=e^{-x},g(x)=e^{x}}$. Οπότε,

$\mathbf{F(x)=e^x\int_0^x \frac{1}{e^t}dt=e^x[-e^{-t}]_0^x=-e^x(e^{-x}-1)=-1+e^x}$. Άρα $\mathbf{F(x)=e^x-1,x\in R.}$

Ε3. Έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{F(x)\ge x\Leftrightarrow g(x)\int_0^x f(u)du\ge x.}$

Επειδή για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{g(x)>0}$ έχουμε $\mathbf{\int_0^x f(u)du\ge\frac{x}{g(x)}}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x)=\int_0^x f(u)du-\frac{x}{g(x)},x\in R}$. Έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{h(x)\ge 0.}$ Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση $\mathbf{\int_0^x f(u)du}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Ακόμα, η $\mathbf{\frac{x}{g(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως η $\mathbf{h(x)=\int_0^x f(u)du-\frac{x}{g(x)},x\in R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{h'(x)=f(x)-\frac{g(x)-xg'(x)}{g^2(x)},x\in R}$.

Ακόμα $\mathbf{h(0)=0}$. Οπότε για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{h(x)\ge h(0)}$, επομένως από το θεώρημα **Fermat**, θα ισχύει $\mathbf{h'(0)=0}$ άρα $\mathbf{f(0)-\frac{g(0)}{g^2(0)}=0\Leftrightarrow}$

$$\mathbf{\frac{f(0)g^2(0)-g(0)}{g^2(0)}=0\Leftrightarrow f(0)g^2(0)-g(0)=0\Leftrightarrow g(0)\big(f(0)g(0)-1\big)=0\overset{g(0)\neq 0}{\Leftrightarrow}}$$
$\mathbf{f(0)g(0)=1}$.

Ε4. Επειδή τώρα $\mathbf{\frac{F(x)}{g(x)}=\int_0^x f(t)dt}$ και $\mathbf{\left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)'=f(x)>0.}$ Η $\mathbf{\frac{F(x)}{g(x)}}$ είναι γνήσιως αύξουσα στο $\mathbf{R,}$ άρα θα ισχύει ότι $\mathbf{\frac{F(2)}{g(2)}>\frac{F(1)}{g(1)}\Leftrightarrow F(2)g(1)>F(1)g(2).}$

ΘΕΜΑ 151

Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής

Έστω η συνάρτηση $f:\left[0,\sqrt{2\pi}\right]\to R$ με την ιδιότητα $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x^2$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$ και η συνάρτηση $g:[0,\sqrt{2\pi}]\to R$ με $g(x)=\frac{f(x)}{x}, x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$ η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,\sqrt{2\pi})$. Επίσης είναι $f'(\sqrt{\pi})=f(\sqrt{\pi})=0.$

Ε1. Να βρείτε την $g'(0)$.

Ε2. Να δείξετε ότι: $f'(x)\le\frac{\eta\mu x^2}{2x}$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2\pi}\right)$.

Ε3. Να δείξετε ότι: $\int_0^{\sqrt{\pi}} xf(x)dx=-\frac{1}{6}$.

Λύση:

Ε1. Η g' έχει συνεχή παράγωγο, έχουμε

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\left(g(x)\right)'=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\lim_{x\to0}\left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right)\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\left(\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{xf''(x)}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ε2. Για κάθε $t\in(0,\sqrt{2\pi})$ έχουμε,

$$f''(t)=\sigma\upsilon\nu t^2\Leftrightarrow 2tf''(t)=2t\sigma\upsilon\nu t^2\Leftrightarrow\int_{\sqrt{\pi}}^{x}2tf''(t)dt=\int_{\sqrt{\pi}}^{x}2t\sigma\upsilon\nu t^2\Leftrightarrow$$

$$\left[2tf'(t)\right]_{\sqrt{\pi}}^{x}-\int_{\sqrt{\pi}}^{x}2f'(t)dt=\left[\eta\mu t^2\right]_{\sqrt{\pi}}^{x}\Leftrightarrow 2xf'(x)-2\sqrt{\pi}f'(\sqrt{\pi})-2\left[f(x)\right]_{\sqrt{\pi}}^{x}=\eta\mu x^2-\eta\mu\pi\Leftrightarrow$$

$$2xf'(x)-2f(x)=\eta\mu x^2\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=\frac{\eta\mu x^2}{2}.$$

Για κάθε $x\in(0,\sqrt{2\pi})$ έχουμε $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{\eta\mu x^2}{2x^2}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x^2}{2x^2}=0\Leftrightarrow\eta\mu x^2=0\overset{x\in(0,\sqrt{2\pi})}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{\pi}$$ και

Έχουμε $0<x<\sqrt{\pi}\Rightarrow 0<x^2<\pi\Rightarrow\eta\mu x^2>0\Rightarrow g'(x)>0$

και $\sqrt{\pi}<x<\sqrt{2\pi}\Rightarrow\pi<x^2<2\pi\Rightarrow\eta\mu x^2<0\Rightarrow g'(x)<0$

Έτσι, σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα, από τον οποίο έχουμε, ότι η $\mathbf{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{\pi}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\pi},\sqrt{2\pi}]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=\sqrt{\pi}$ με τιμή $g(\sqrt{\pi})=0$.

x	0		$\sqrt{\pi}$		$\sqrt{2\pi}$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	‖	$\nearrow$	Ο.Μ	$\searrow$	‖

Επομένως για κάθε $x\in(0,\sqrt{2\pi})$ έχουμε $g(x)\le g(\sqrt{\pi})\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\le 0 \overset{x\in(0,\sqrt{2\pi})}{\Leftrightarrow} f(x)\le 0.$

Όμως έχουμε ότι $2xf'(x)-\eta\mu x^2=2f(x)$, οπότε

$$f(x)\le 0\Leftrightarrow 2f(x)\le 0\Leftrightarrow 2xf'(x)-\eta\mu x^2\le 0\Leftrightarrow 2xf'(x)\le \eta\mu x^2 \overset{x\in(0,\sqrt{2\pi})}{\Leftrightarrow} f'(x)\le\frac{\eta\mu x^2}{2x}.$$

Ε3. Έχουμε $2xf'(x)-2f(x)=\eta\mu x^2\Leftrightarrow 2xf(x)=2x^2f'(x)-x\eta\mu x^2$. Οπότε,

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}2xf(x)dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}2x^2f'(x)dx-\int_0^{\sqrt{\pi}}x\eta\mu x^2dx=\left[2x^2f(x)\right]_0^{\sqrt{\pi}}-\int_0^{\sqrt{\pi}}4xf(x)dx+\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu x^2\right]_0^{\sqrt{\pi}}\Leftrightarrow$$

$$6\int_0^{\sqrt{\pi}}xf(x)dx=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu x^2\right]_0^{\sqrt{\pi}}\Leftrightarrow 6\int_0^{\sqrt{\pi}}xf(x)dx=\frac{1}{2}(-1-1)\Leftrightarrow$$

$$6\int_0^{\sqrt{\pi}}xf(x)dx=-1\Leftrightarrow\int_0^{\sqrt{\pi}}xf(x)dx=-\frac{1}{6}.$$

ΘΕΜΑ 152

Προτείνει ο χρήστης erxmer

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt & ,x\ne 0\\ \ln 2 & ,x=0\end{cases}$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{g(x)}{\ln 2}\le f(2x)$ όταν $x>0$ και

$f(2x)\le\dfrac{g(x)}{\ln 2}\le f(x)$ όταν $x<0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

Ε3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Πηγή: Β. Βασιλείου (εκδόσεις Ε.Ο.Σ.Κ)

Λύση:

Ε1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για $x>0$ έχουμε $x<t<2x$, επειδή f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα ισχύει $f(x)<f(t)<f(2x)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{t}<\frac{f(t)}{t}<\frac{f(2x)}{t}$. Οπότε, ολοκληρώνοντας (*) θα ισχύει ότι $\int_x^{2x}\frac{f(x)}{t}dt<\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<\int_x^{2x}\frac{f(2x)}{t}dt$. Επομένως, έχουμε

$$f(x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt<\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<f(2x)\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\Leftrightarrow f(x)[\ln t]_x^{2x}<\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<f(2x)[\ln t]_x^{2x}\Leftrightarrow$$

$$f(x)\ln 2<\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<f(2x)\ln 2\,.$$

Επίσης για $x<0$ ισχύει ότι $2x<t<x<0$, επειδή f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbf{R}$, θα ισχύει $f(2x)<f(t)<f(x)\Leftrightarrow\frac{f(2x)}{t}>\frac{f(t)}{t}>\frac{f(x)}{t}$. Οπότε, ολοκληρώνοντας θα ισχύει

$$\int_{2x}^{x}\frac{f(2x)}{t}dt>\int_{2x}^{x}\frac{f(t)}{t}dt>\int_{2x}^{x}\frac{f(x)}{t}dt\Leftrightarrow f(2x)\int_{2x}^{x}\frac{1}{t}dt>\int_{2x}^{x}\frac{f(t)}{t}dt>f(x)\int_{2x}^{x}\frac{1}{t}dt\Leftrightarrow$$

$$f(2x)[\ln|t|]_{2x}^{x}>\int_{2x}^{x}\frac{f(t)}{t}dt>f(x)[\ln|t|]_{2x}^{x}\Leftrightarrow -f(2x)\ln 2>\int_{2x}^{x}\frac{f(t)}{t}dt>-f(x)\ln 2\Leftrightarrow$$

$$f(2x)\ln 2<\int_{x}^{2x}\frac{f(t)}{t}dt<f(x)\ln 2.$$

(*) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\le g(x)$ έχουμε

$$f(x)-g(x)\le 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)dx\le 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)\le\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Ε2. Επειδή για $x>0$ ισχύει $f(x)\ln 2<g(x)<f(2x)\ln 2$

έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)\ln 2)=\lim\limits_{x\to 0^+}(f(2x)\ln 2)\overset{f\text{ συνεχης}}{\underset{\text{στο }0}{=}}f(0)\ln 2\overset{f(0)=1}{=}\ln 2.$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\ln 2.$

Επίσης, για $x<0$ ισχύει $f(2x)\ln 2<g(x)<f(x)\ln 2.$

Όμοια δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\ln 2$, άρα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\ln 2=g(0)$, που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=0.$

Ε3. Η $g(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{2x}\frac{f(t)}{t}dt-\int_0^{x}\frac{f(t)}{t}dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, αφού η $\frac{f(t)}{t}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, με $g'(x)=2\frac{f(2x)}{2x}-\frac{f(x)}{x}=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.

Επομένως για $x>0$ επειδή $2x>x$ και $f(2x)>f(x)$ (f γνήσιως αύξουσα) θα ισχύει $g'(x)>0$. Άρα η g είναι γνήσιως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ενώ για $x<0$ επειδή $2x<x$ και $f(2x)<f(x)$ (f γνήσια αύξουσα) θα ισχύει $g'(x)>0$

Επομένως η g είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0)$

Έτσι, σχηματίζουμε τον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Επίσης η g συνεχής στο $x_0=0$, άρα η g γνήσιως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 153

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Ε2. Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα σημείο καμπής του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

Ε3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$.

Ε4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, $C_{f^{-1}}$.

Λύση:

Ε1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα η συνάρτηση $\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{4}{1+f^2(x)}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\frac{4}{1+f^2(x)}>0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-\frac{8f(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2}$.

Ε2. Επειδή $f'(x)=\frac{4}{1+f^2(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{8f(x)f'(x)}{(1+f^2(x))^2}=0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=0=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\dfrac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}>0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} -8f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)<0=f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0$. Ομοίως προκύπτει ότι $f''(x)<0 \Leftrightarrow x>0$.

Επομένως, από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Στο σημείο $M(0,f(0))=M(0,0)$ παρουσιάζει σημείο καμπής.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ	$\cap$

Ε3. Έχουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)>0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Επίσης $f(0)=0$, άρα η $x=0$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για $x<0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<0$, ενώ για $x>0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$.

$$f'(x)=\frac{4}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x)+f'(x)f^2(x)=4 \Rightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{1}{3}f^3(x)\right)=(4x)' \Rightarrow f(x)+\frac{1}{3}f^3(x)=4x+c.$$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)+\frac{1}{3}f^3(0)=4\cdot 0+c \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c=0$. Οπότε $f(x)+\frac{1}{3}f^3(x)=4x$.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμες στο $B=A\cap f(A)$. (*)

$$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{3}f^3(x)=x+\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 4x=x+\frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 12x=3x+x^3 \Leftrightarrow$$

$$x^3-9x=0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0$$

Άρα $x=0$ ή $x=3$ ή $x=-3$.

Οπότε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(3,3), O(0,0), B(-3,-3)$.

(*) Έστω το $x_0\in B$ ρίζα την εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$. Θα δείξουμε ότι το x_0 είναι ρίζα και της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x$, δηλαδή $f^{-1}(x_0)=x_0$. Έχουμε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$. (1)

Έστω ότι $f^{-1}(x_0)\neq x_0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0)<x_0$ ή $f^{-1}(x_0)>x_0$.

Αν $f^{-1}(x_0)<x_0$ (2), τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f\left(f^{-1}(x_0)\right)<f(x_0) \Leftrightarrow x_0<f(x_0)$ που από (1),(2) είναι **άτοπο.**

Αν $f^{-1}(x_0)>x_0$ (3), τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f\left(f^{-1}(x_0)\right)>f(x_0) \Leftrightarrow x_0>f(x_0)$ που από (1),(3) είναι **άτοπο.**

Επομένως, $f^{-1}(x_0)=x_0$.

Έστω ότι το $x_0 \in B$ ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x,$ δηλαδή $f^{-1}(x_0)=x_0$ τότε $f\left(f^{-1}(x_0)\right)=f(x_0) \Leftrightarrow x_0=f(x_0).$ Οπότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0).$ Άρα οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμες στο $B=A\cap f(A).$

Ε4. Ψάχνουμε το εμβαδόν $E=\int_{-3}^{3}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx$

Προσδιορίζουμε τη σχετική θέση των $C_f, C_{f^{-1}}$. Επειδή η f κοίλη στο $[0,+\infty)$ και τέμνει την $y=x$ στα σημεία $A(3,3), O(0,0)$ έχουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω απο την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$, ενώ η f^{-1} θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$. Έτσι από τη συμμετρία των αντίστροφων συναρτήσεων ως προς την $y=x$ (δες σχήμα), έχουμε $E=\int_{-3}^{3}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx=2\int_{-3}^{3}\left|f^{-1}(x)-x\right|dx.$

Θα δείξουμε, ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Θεωρώ $g(x)=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}, x\in\mathbb{R}$, η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}>0.$
Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)>0$, έχουμε ότι η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R},$ οπότε και $1-1.$
Έχουμε ότι η g έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x), \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty).$

Επίσης, επειδή $\frac{f(x)}{4}+\frac{f^3(x)}{12}=x$, έχουμε ότι $g(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x).$
Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το $\mathbb{R}.$ Έχουμε.

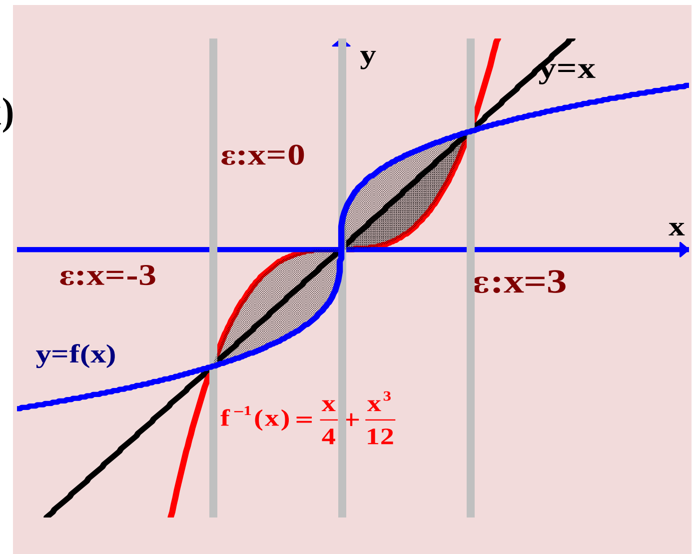
$$\frac{f(x)}{4}+\frac{f^3(x)}{12}=x \Leftrightarrow \frac{f(f^{-1}(x))}{4}+\frac{f^3(f^{-1}(x))}{12}=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}, x\in\mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή αφού

$$f^{-1}(-x)=\frac{-x}{4}+\frac{(-x)^3}{12}=-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}=-f^{-1}(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

οπότε από τη συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων (δες σχήμα), έχουμε πως



$$E=2\int_{-3}^{3}\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=4\int_{0}^{3}\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=4\int_{0}^{3}\left(x-f^{-1}(x)\right)dx=4\int_{0}^{3}\left(x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}\right)dx=$$

$$=4\int_{0}^{3}\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^3}{12}\right)dx=4\left[\frac{3x^2}{8}-\frac{x^4}{48}\right]_0^3=4\left(\frac{3^3}{8}-\frac{3^4}{48}\right)=4\left(\frac{27}{8}-\frac{27}{16}\right)=\frac{4\cdot 27}{16}=\frac{27}{4}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 154

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$
- $\int_0^x f(t)dt+\int_2^{2-x} g(t)dt\ge x^2-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι:οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0,2)$.

Ε2. $f(0)+f(2)=g(0)+g(2)$.

Ε3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(2-x_0)$.

Ε4. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+g'(2-\xi)=2$.

Λύση:

Ε1. Θεωρούμε $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in\mathbb{R}$ και $G(x)=\int_0^x g(t)dt, x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $F(0)=G(0)=0$ και $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt=G(2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=F(x)-G(x), x\in[0,2]$.

Η H είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η H είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$H(0)=H(2)=0$, οπότε από θεώρημα **Rolle** υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε
$H'(x_1)=0\Leftrightarrow F'(x_1)-G'(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)-g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=g(x_1)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$. Για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(\alpha)<f(\beta)$.

Και $\alpha<\beta\overset{g\downarrow}{\Rightarrow}g(\alpha)>g(\beta)\Rightarrow -g(\alpha)<-g(\beta)$. Με πρόσθεση των παραπάνω έχουμε, $h(\alpha)<h(\beta)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια λύση. Όμως για $x_1\in(0,2)$, έχουμε $h(x_1)=0$, επομένως η x_1 μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x)=0$.

Δηλαδή, οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0,2)$.

Β΄ τρόπος για την απόδειξη της μοναδικότητας:

Για $x<x_1$ έχουμε

$$\begin{cases} x<x_1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x_1)=g(x_1) \\ x<x_1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x)>g(x_1)=f(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \{g(x)>g(x_1)=f(x_1)>f(x)$$

Για $x>x_1$ έχουμε

$$\begin{cases} x>x_1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_1)=g(x_1) \\ x>x_1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x)<g(x_1)=f(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \{g(x)<g(x_1)=f(x_1)<f(x)$$

Επομένως η $x=x_1\in(0,2)$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)-g(x)=0$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_2^{2-x} g(t)dt-x^2+2x, x\in R.$

Έχουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $k(x)\geq 0$. Ακόμα $k(0)=0$ και

$$k(2)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^0 g(t)dt=\int_0^2 f(t)dt-\int_0^2 g(t)dt=0.$$

Επομένως από θεώρημα **Fermat** έχουμε ότι $k'(0)=0$ και $k'(2)=0.$

Έχουμε $k'(x)=f(x)-g(2-x)-2x+2, x\in R$

$k'(0)=0\Leftrightarrow f(0)-g(2)+2=0$ (1) και $k'(2)=0\Leftrightarrow f(2)-g(0)-2=0,$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε

$f(0)-g(2)+f(2)-g(0)=0\Leftrightarrow f(0)+f(2)=g(0)+g(2).$

Ε3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $s(x)=f(x)-g(2-x), x\in[0,2].$

Η s είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$s(0)=f(0)-g(2)\overset{(1)}{=}-2<0$ και $s(2)=f(2)-g(0)\overset{(2)}{=}2>0.$

Επομένως από θεώρημα **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $s(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-g(2-x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(2-x_0).$

Ε4. Η s είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η s είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $s'(\xi)=\dfrac{s(2)-s(0)}{2-0}\overset{(1),(2)}{=}\dfrac{2-(-2)}{2}=2.$ Όμως

$s'(x)=f'(x)+g'(2-x)$, οπότε $s'(\xi)=2\Leftrightarrow f'(\xi)+g'(2-\xi)=2.$

ΘΕΜΑ 155

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[0,1]$ και η συνάρτηση

$g(x)=\int_0^{f(x)}\sqrt{-t^2-t+2}dt$ με $\int_0^1 f(x)dx=0.$ Να δείξετε ότι:

Ε1. $f^2(x)\leq -f(x)+2.$

Ε2. **Υπάρχει** $\xi \in (0,1]$ **ώστε** $\int_0^{\xi} f^2(t)dt = 6\xi - \xi^2 - 3.$

Ε3. **Υπάρχει** $x_0 \in (0,1)$ **ώστε** $\int_0^{x_0^2} f(t)dt = 2x_0 f(x_0^2).$

Πηγή: <u>Τηλέγραφος Κώστας</u>

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\sqrt{-t^2 - t + 2}$ ορίζεται και είναι συνεχής για $t \in [-2,1]$ και αφού το $0 \in [-2,1]$ για να ορίζεται η $g(x) = \int_0^{f(x)} \sqrt{-t^2 - t + 2}dt$ πρέπει και αρκεί για $x \in [0,1]$ να ισχύει ότι $-2 \le f(x) \le 1$ από όπου έχουμε $f(x) + 2 \ge 0, f(x) - 1 \le 0,$ άρα και $(f(x)+2)(f(x)-1) \le 0 \Leftrightarrow f^2(x) \le -f(x) + 2.$

Ε2. Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(x) = \int_0^x f^2(t)dt + x^2 - 6x + 3, x \in [0,1]$

Η h είναι συνεχής, ως πράξεις συνεχών με $h(0) = 3 > 0$ και $h(1) = \int_0^1 f^2(t)dt - 2 \le 0.$

γιατί από **(Ε1)** ισχύει ότι

$f^2(x) \le -f(x) + 2 \Leftrightarrow f^2(x) + f(x) - 2 \le 0$, ολοκληρώνοντας ισχύει ότι

$\int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \le 2$, αφού από υπόθεση ισχύει ότι

$\int_0^1 f(x)dx = 0.$

Έτσι αν $\int_0^1 f^2(x)dx = 2$ τότε $h(1) = 0$ και ρίζα είναι το 1 ,ενώ αν $\int_0^1 f^2(x)dx \ne 2$ τότε $\int_0^1 f^2(x)dx - 2 < 0$ και θα ισχύει $h(0)h(1) < 0$ και από θεώρημα **Bolzano** θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $h(\xi) = 0$. Άρα σε κάθε περίπτωση η $h(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(0,1].$

Ε3.
$$2xf(x^2) - \int_0^{x^2} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{2xf(x^2)e^x - e^x \int_0^{x^2} f(t)dt}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{e^x} \right)' = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{e^x}, x \in [0,1]$ που είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $\varphi'(x)=\dfrac{e^x f(x^2)2x-e^x\int_0^{x^2} f(t)dt}{e^{2x}}=\dfrac{2xf(x^2)-\int_0^{x^2} f(t)dt}{e^x}$

και ισχύει ότι $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, έτσι σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle** , υπάρχει

$x_0\in(0,1)$ ώστε $\varphi'(x_0)=0$ δηλαδή $2x_0 f(x_0{}^2)-\int_0^{x_0{}^2} f(t)dt=0.$

ΘΕΜΑ 156

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη για κάθε $x\ge 0$ συνάρτηση f με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$, με συνεχή πρώτη παράγωγο , για την οποία ισχύει

$$f\left(\int_0^1 [f(x)-4]dx\right)+6x=\int_0^x \frac{f'(x-t)}{e^t}dt \text{ για κάθε } x\ge 0 .$$

Να αποδείξετε ότι:

Ε1. $f\left(\int_0^1 [f(x)-4]dx\right)=0$.

Ε2. $f(x)=3x^2+6x$ με $x\in[0,+\infty)$.

Ε3. η f είναι αντιστρέψιμη.

Ε4. $\int_0^9 f^{-1}(x)dx=5$.

Πηγή:Σπυριδάκης Αντώνης

Λύση:

Ε1. Θέτοντας $x-t=u$, έχουμε $dt=-du$.

Ακόμα για $t=0\Rightarrow u=x$ και για $t=x\Rightarrow u=0$

Οπότε $\int_0^x \frac{f'(x-t)}{e^x}dt=\int_x^0 -\frac{f'(u)}{e^{x-u}}du=\int_0^x \frac{e^u f'(u)}{e^x}du=\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f'(u)du$.

Επομένως η σχέση γίνεται $f(\int_0^1 (f(x)-4)dx)+6x=\frac{1}{e^x}\int_0^x e^u f'(u)du \Leftrightarrow$

$e^x f(\int_0^1 (f(x)-4)dx)+6xe^x=\int_0^x e^u f'(u)du.$

Για $x=0$ έχουμε $e^0 f(\int_0^1 (f(x)-4)dx)=\int_0^0 e^u f'(u)du \Leftrightarrow f(\int_0^1 (f(x)-4)dx)=0.$

Ε2. Επειδή $f(\int_0^1 (f(x)-4)dx)=0$ έχουμε $\int_0^x e^u f'(u)du=6xe^x$.

Η $6xe^x$ παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ η $e^u f'(u)$ συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x e^u f'(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$. Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε $f'(x)e^x = 6e^x + 6xe^x \overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = 6+6x \Rightarrow f(x) = 6x+3x^2+c, c\in R.$
Για $x=0$ έχουμε $f(0)=c.$ Όμως $f(x)\geq 0,$ άρα $c\geq 0.$ Ακόμα έχουμε,

$$0 = f\left(\int_0^1 (f(x)-4)dx\right) = f\left(\int_0^1 (6x+3x^2+c-4)dx\right) = f\left(\left[3x^2+x^3+cx-4x\right]_0^1\right) \Leftrightarrow$$

$$0 = f\left((3+1+c-4)\right) = f(c).$$

Για $x=c$ έχουμε $f(c)=0 \Leftrightarrow 6c+3c^2+c=0 \Leftrightarrow c(3c+7)=0 \overset{c\geq 0}{\Leftrightarrow} c=0$.
Οπότε $f(x)=3x^2+6x, x\geq 0$,που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε3. Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε $f'(x)=6+6x>0$.
Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Έχουμε $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$.
Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$.
Επομένως η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

$$f(x)=y \Leftrightarrow 3x^2+6x=y \Leftrightarrow x^2+2x+1=\frac{y}{3}+1 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 = \frac{y+3}{3} \overset{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0}}{\Rightarrow} x+1=\sqrt{\frac{y+3}{3}} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{y+3}{3}}-1, y\geq 0$$

Επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+3}{3}}-1, x\geq 0$.

Ε4. Έχουμε, $\int_0^9 f^{-1}(x)dx = \int_0^9\left(\sqrt{\frac{x+3}{3}}-1\right)dx = [-x]_0^9 + \int_0^9\sqrt{\frac{x+3}{3}}dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^9 f^{-1}(x)dx = -9+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^9\sqrt{x+3}dx = -9+\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3}\right]_0^9 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f^{-1}(x)dx = -9+\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{12^3}-\sqrt{3^3})}{9} = -9+\frac{2\sqrt{3}(24\sqrt{3}-3\sqrt{3})}{9} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f^{-1}(x)dx = -9+\frac{42\cdot 3}{9} = -9+\frac{42}{3} = -9+14=5.$$

Β΄ τρόπος για το Ε4. Μπορεί να λύθεί και με την μέθοδο της αντικατάστασης, μπορείτε να δείτε τα θέματα **125** και **147**.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt, x\in\mathbb{R}.$

Ε1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η $f'(x)$.

Ε2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

Ε4. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z+i|=|\bar{z}+1|$, είναι η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

Ε5. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}$.

Πηγή: Μ.Τουμάσης - Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt=\int_{0}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt-\int_{0}^{-x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt$.

Επειδή η συνάρτηση $g(t)=\frac{e^{t^2}}{10^t+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών ,

έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{0}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η $h(x)=-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και η συνάρτηση $\int_{0}^{-x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση της $F(x)$ με την $-x$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=\left(\int_{0}^{x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt-\int_{0}^{-x}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt\right)'=\frac{e^{x^2}}{10^x+1}+\frac{e^{x^2}}{10^{-x}+1}.$$

Ε2. Έχουμε $f'(x)=\frac{e^{x^2}}{10^x+1}+\frac{e^{x^2}}{10^{-x}+1}>0$. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$, έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή προφανώς, $f(0)=\int_{0}^{0}\frac{e^{t^2}}{10^t+1}dt=0$, το $x_0=0$ είναι μια ρίζα της εξίσωση $f(x)=0$ η οποία είναι και μοναδική (λόγω της μονοτονίας).

Ε3. Έχουμε,

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}}{10^x+1}+\frac{e^{x^2}}{10^{-x}+1}=\frac{e^{x^2}}{10^x+1}+\frac{e^{x^2}}{\frac{1}{10^x}+1}=\frac{e^{x^2}}{10^x+1}+\frac{e^{x^2}\cdot 10^x}{10^x+1}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}+e^{x^2}\cdot 10^x}{10^x+1}=\frac{\left(10^x+1\right)\cdot e^{x^2}}{10^x+1}=e^{x^2}$$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f''(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$. Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}>0\overset{2e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow} x>0$.

Επειδή f συνεχής στο $[0,+\infty)$ έχουμε ότι η f κυρτή στο $[0,+\infty)$ και

$f''(x)<0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}<0\overset{2e^{x^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x<0$ και επειδή f συνεχής στο $(-\infty,0]$ ότι η f κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα,έτσι λόγω της εναλλαγής του προσήμου της δεύτερης παραγώγου εκατέρωθεν του $x_0=0$, προκύπτει ότι το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$

Ε4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $O(0,0)\in C_f$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\overset{f(0)=0,f'(0)=e^0=1}{\Rightarrow}(\varepsilon):y=x$.

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που ικανοποιεί τη σχέση

$|z+i|=|\bar{z}+1|\Leftrightarrow|z-(-i)|=|\overline{z+1}|\Leftrightarrow|z-(-i)|=|z+1|\Leftrightarrow|z-(-i)|=|z-(-1)|$

είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB με $A(0,-1)$ και $B(-1,0)$ η οποία προφανώς είναι η $(\varepsilon):y=x$.

Ε5. Με $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu 3x)=0$ και με συναρτήσεις $f,h(x)=\eta\mu 3x$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του

De L'Hospital και είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(\eta\mu 3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{3\sigma\upsilon\nu 3x}=\frac{e^0}{3\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{3}$ οπότε,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(\eta\mu 3x)'}=\frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ 158

Προτείνει ο Κώστας Τηλέγραφος

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ με f γνησίως φθίνουσα και η g με $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$.

Ε1. Να δειχτεί ότι η g γράφεται $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$

Ε2. Να δειχτεί ότι η g είναι συνεχής.

Ε3. Να δειχτεί ότι η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ αν $\mathbf{f'(0)\in R}$.

Ε4. Να δειχτεί ότι για κάθε $\mathbf{x>0}$ υπάρχει $\xi>0$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\int_0^x \frac{f(t)}{x}dt.$$

Ε5. Να μελετηθεί η $\mathbf{g}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε6. Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_1^{x_0} f(t)dt=-2x_0f(x_0)$.

Πηγή:Τηλέγραφος Κώστας

Λύση:

Ε1. Είναι για $u=xt$ το $du=xdt$ και ακόμη $t=0\to u=0, t=1\to u=x$.

Τώρα για $x\neq 0$ η $g(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^1 f(xt)(xdt)$ επομένως η $g(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(u)du$

και για $x=0$ είναι $g(0)=\int\limits_0^1 f(0)dt=f(0)$, άρα $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$.

Ε2. Είναι τώρα για $x\neq 0$,η $\mathbf{g}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών της $\mathbf{x}$ και της $\int\limits_0^x f(u)du$ ως παραγωγίσιμης αφού η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής. Επίσης για το $x=0$,

έχουμε $g(0)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x f(u)du}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)=g(0).$

Άρα η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής και στο $x=0$, οπότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbf{R}$.

Ε3. Για $x\neq 0$, η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\left(\frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}\right)'=\frac{xf(x)-\int\limits_0^x f(t)dt}{x^2}.$$

Για $x=0$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt-f(0)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x f(t)dt-xf(0)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0)$$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x=0$.

Επομένως $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{f'(0)}{2}, & x=0\end{cases}$

Ε4. Για την $F(t)=\int_0^t f(u)du$ που είναι συνεχής $[0,x]$ με $x>0$, παραγωγίσιμη $(0,x)$, με $F'(t)=f(t)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του **ΘΜΤ** ,άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{F(x)}{x}=\int_0^x \dfrac{f(u)}{x}du.$

Ε5. Για $x>0$ έχουμε $g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Από **(Ε4)** ισχύει $f(\xi)x=\int_0^x f(u)du$, οπότε έχουμε,

$g'(x)=\dfrac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x}<0$ γιατί είναι $\xi<x$ και f γνήσια φθίνουσα.

Άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Τώρα για $x<0$ έχουμε $g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x,0)$ ώστε $f(\xi)=\int_0^x \dfrac{f(u)}{x}du\Leftrightarrow xf(\xi)=\int_0^x f(t)dt$ ισχύει ότι

$g'(x)=\dfrac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x}>0.$ γιατί είναι $\xi>x$ και f γνήσια φθίνουσα.

Έτσι σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα, από τον οποίο έχουμε, ότι η g είναι γνήσιως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνήσιως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως στο $x_0=0$ θα έχει ολικό μέγιστο το $g(0)=f(0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	Ο.Μ	↘

Ε6. $\int_1^x f(t)dt=-2xf(x)\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt+2xf(x)=0\Leftrightarrow\int_1^x f(t)dt+2x\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2x}\int_1^x f(t)dt+\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}\right)^2}\int_1^x f(t)dt+\sqrt{x}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=0\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_1^x f(t)dt+\sqrt{x}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)'\int_1^x f(t)dt+\sqrt{x}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\int_1^x f(t)dt\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $q(x)=\sqrt{x}\int_1^x f(t)dt, x\in[0,1]$.

Η q είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$q'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_1^x f(t)dt+\sqrt{x}f(x)$.

Επίσης $q(0)=q(1)=0$, οπότε από θεώρημα **Rolle** υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0\in(0,1)$ ώστε $q'(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\int_1^{x_0} f(t)dt+\sqrt{x_0}f(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_1^{x_0} f(t)dt=-2x_0f(x_0)$.

ΘΕΜΑ 159

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)^7 dt$ με $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Ε1. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Ε3. Αν ο $n>1$ είναι ακέραιος, να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{f(1)}{n}$.

Λύση:

Ε1. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)^7 dt$ και για $u=\frac{\pi}{2}-t$ έχουμε $du=-dt$.

Ενώ για $t=0\rightarrow u=\frac{\pi}{2}, t=\frac{\pi}{2}\rightarrow u=0$ οπότε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\eta\mu(\frac{\pi}{2}-u)-\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-u))^7(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu u-\eta\mu u)^7 du$$

Έχουμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu u-\sigma\upsilon\nu u)^7 du=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα $f(\frac{\pi}{2})=0$.

Ε2. Επειδή η συνάρτηση $(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^7$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)^7 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, με $f'(x)=(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^7$.Εχουμε $f'(\frac{\pi}{4})=0$. Επίσης η $f'(x)$ παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, με $f''(x)=7(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^6>0,\ x\neq\frac{\pi}{4}$ ..Η f' είναι γνήσιως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Άρα για $x>\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow f'(x)>f'(\frac{\pi}{4})=0$. Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f' και μονοτονίας της f .

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	O.M	↘	O.E	↗	O.M

Έχουμε ότι η f γνήσιως αύξουσα στο $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ και για $x<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow f'(x)<f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Επομένως η f γνήσιως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{4}]$. Άρα στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με τιμή $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και στο $x=\frac{\pi}{4}$ ολικό ελάχιστο το $f(\frac{\pi}{4})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^7dx$.

Ακόμη επειδή ισχύει $f''(x)=7(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^6>0,\ x\neq\frac{\pi}{4}$ η f είναι κυρτή στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Ε3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε διαστήματα $\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},1\right]$ με ν ακέραιο και $\nu>1$,ικανοποιούνται οι υπόθέσεις του **ΘΜΤ** ,διότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε αυτά, άρα, υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{1}{n}\right), x_2\in\left(\frac{1}{n},1\right)$ ώστε να ισχύουν $f'(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=nf\left(\frac{1}{n}\right)$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(1)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{n}}=n\dfrac{f(1)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{n-1}$.

Επειδή f' είναι γνήσια αύξουσα και θα ισχύει ότι

$$x_1<x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x_1)<f'(x_2)\Leftrightarrow nf\left(\frac{1}{n}\right)<n\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{n}\right)}{n-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nf\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)<f(1)-f\left(\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow nf\left(\frac{1}{n}\right)<f(1).$$

ΘΕΜΑ 160

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:R \to R}$ για την οποία ισχύει

$\mathbf{f(x)=5x+1+\int_0^x f(u)(x-u)du}$, για κάθε $\mathbf{x \in R.}$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $\mathbf{f''(x)=f(x)}$, για κάθε $\mathbf{x \in R.}$

Ε2. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\int_0^x (f''(t)-f(t))e^t dt=0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R.}$

Ε3. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{(f'(x)-f(x))e^x=4.}$

Ε4. Να βρείτε τον τύπο της $\mathbf{f}$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι $\mathbf{1-1}$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση:

Ε1. $\mathbf{f(x)=5x+1+\int_0^x f(u)(x-u)du \Leftrightarrow f(x)=5x+1+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du.}$

Έχουμε $\mathbf{f(0)=1}$. Η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση $\mathbf{\int_0^x f(u)du.}$

παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Όμοια , η συνάρτηση $\mathbf{\int_0^x uf(u)du}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$

και η $\mathbf{5x+1}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Επομένως η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f'(x)=5+\int_0^x f(u)du.}$

Έχουμε $\mathbf{f'(0)=5}$. Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, η συναρτηση

$\mathbf{\int_0^x f(u)du}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Άρα η $\mathbf{f'}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{f''(x)=f(x).}$

Ε2. Είναι $\mathbf{\int_0^x (f''(t)-f(t))e^t dt \overset{f''(t)=f(t)}{=} \int_0^x (f''(t)-f(t))e^t dt=\int_0^x 0\cdot e^t dt=0}$.

Επομένως έχουμε ότι $\mathbf{\int_0^x (f''(t)-f(t))e^t dt=0}$.

Ε3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{g(x)=(f'(x)-f(x))e^x, x \in R.}$

Η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{g'(x)=(f''(x)-f'(x))e^x+(f'(x)-f(x))e^x \overset{f''(x)=f(x)}{=} 0.}$

Επομένως η $\mathbf{g}$ είναι σταθερή. Δηλαδή για κάθε $\mathbf{x \in R}$ έχουμε $\mathbf{g(x)=c, c \in R.}$

Για $\mathbf{x=0}$ έχουμε $\mathbf{g(0)=c \Leftrightarrow (f'(0)-f(0))e^0=c \Leftrightarrow c=4.}$

Οπότε $\mathbf{g(x)=4 \Leftrightarrow (f'(x)-f(x))e^x=4}$.

Ε4. Επειδή $\mathbf{(f'(x)-f(x))e^x=4}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=4e^{-2x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\left(-2e^{-2x}\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x}=-2e^{-2x}+c, c\in R.}$$

Για $\mathbf{x=0}$ έχουμε $\mathbf{\frac{f(0)}{e^0}=-2e^0+c \Leftrightarrow 1=-2+c \Leftrightarrow c=3}$.

Οπότε $\mathbf{f(x)=-2e^{-x}+3e^x}$. που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε5. Έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{f'(x)=2e^{-x}+3e^x}$.
Επομένως έχουμε πως για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f'(x)>0}$. Οπότε η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, άρα και $\mathbf{1-1}$.Συνεπώς αντιστρέφεται.
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $\mathbf{f}$, οπότε θα γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f^{-1}}$.
Έχουμε $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{-x}+3e^x\right)=-\infty}$ και $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2e^{-x}+3e^x\right)=+\infty}$.
Οπότε η $\mathbf{f}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$.

Έχουμε $\mathbf{f(x)=y \Leftrightarrow -2e^{-x}+3e^x=y \Leftrightarrow \frac{-2}{e^x}+3e^x=y \Leftrightarrow 3e^{2x}-ye^x-2=0}$.

Θέτουμε $\mathbf{e^x=t}$ και η σχέση γίνεται $\mathbf{3t^2-yt-2=0.}$ Έχουμε $\mathbf{\Delta=y^2+24>0}$. Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $\mathbf{t_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+24}}{6}}$. Οπότε $\mathbf{e^x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+24}}{6}}$.

Ομως για κάθε $\mathbf{x\in R}$ έχουμε $\mathbf{e^x>0}$, οπότε $\mathbf{e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+24}}{6}}$, διότι $\mathbf{\frac{y-\sqrt{y^2+24}}{6}<0}$. Επομένως $\mathbf{e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+24}}{6} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+24}}{6}\right)}$.

Άρα η αντίστροφη σύνάρτηση είναι η $\mathbf{f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+24}}{6}\right), x\in R}$.

ΘΕΜΑ 161 — Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to R}$ με $\mathbf{f(\beta)=2f(\alpha)}$ ώστε να ισχύει :
$\mathbf{f'(x)=2f^2(x)-4f(x)+4}$ για κάθε $\mathbf{x\in[\alpha,\beta]}$.Να δείξετε ότι:

Ε1. Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ε2. $\mathbf{f(\alpha)>0}$.

Ε3. Ισχύει $\mathbf{\int_\alpha^\beta f(x)dx<\ln 2}$.

Ε4. Αν $\mathbf{f(\alpha)>1}$, τότε:

α. Η $\mathbf{f}$ είναι κυρτή

β. Δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση της f, τρία διαφορετικά σημεία τα οποία να είναι συνευθειακά.

Πηγή: Θέμα 67 από την Συλλογή Επαναληπτικών Ασκήσεων του xgastone

Λύση:

Ε1. Η δοθείσα σχέση γράφεται, $f'(x)=f^2(x)+[f(x)-2]^2$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Ε2. $\alpha<\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)<2f(\alpha)\Rightarrow f(\alpha)>0.$

Ε3. Είναι $x\ge\alpha \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(\alpha)>0$. Άρα $f(x)>0$.

Τότε από την $f'(x)=f^2(x)+[f(x)-2]^2$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε

$$f'(x)>f^2(x)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}>f(x)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}-f(x)>0.$$

Άρα,

$$\int_\alpha^\beta\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-f(x)\right)dx>0\Rightarrow \int_\alpha^\beta\frac{f'(x)}{f(x)}dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx>0\Rightarrow [\ln f(x)]_\alpha^\beta>\int_\alpha^\beta f(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln f(\beta)-\ln f(\alpha)>\int_\alpha^\beta f(x)dx\Rightarrow \ln 2f(\alpha)-\ln f(\alpha)>\int_\alpha^\beta f(x)dx\Rightarrow \ln 2>\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ε4. **α.** Από την $f'(x)=f^2(x)+[f(x)-2]^2$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε

$$f''(x)=2f(x)f'(x)+2[f(x)-2]f'(x)=2f'(x)(2f(x)-2)=4f'(x)(f(x)-1).$$

Όμως για $x\in[\alpha,\beta]$ γνωρίζουμε ότι $f(\alpha)>1$. Επιπλέον, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, έχουμε $x\ge\alpha \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(\alpha)>1$.

Συνεπώς $f(x)-1>0$, οπότε $4f'(x)(f(x)-1)>0$. Άρα , για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f''(x)>0$, επομένως η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$.

β. Έστω ότι υπάρχουν 3 σημεία $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2)),\Gamma(x_3,f(x_3))$ της C_f με $\alpha\le x_1<x_2<x_3\le\beta$ που είναι συνευθειακά.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), επομένως εφαρμόζεται το **ΘΜΤ** στα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$, αφού $\alpha\le x_1<x_2<x_3\le\beta$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lambda_{AB} \quad\text{και}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\lambda_{B\Gamma}$$

Αλλά $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, **άτοπο,** γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$.

Άρα δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση της f, τρία διαφορετικά σημεία τα οποία να είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 162

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και με σύνολο τιμών το $[0,1]$.

Ε1. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)dt<1$.

Ε2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=2x-1$ έχει μοναδική λύση $x_0\in(0,1)$.

Ε3. Να βρείτε τον αριθμό x_0 του **(Ε2)** ερωτήματος αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=x_0$ είναι 0,5 τ.μ.

Ε4. Να δείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt<2x$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Λύση:

Ε1. Από την υπόθεση ισχύει $f(x)\le 1\Leftrightarrow (f(x)-1)\le 0, x\in[0,1]$.

Επειδή η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή αφού έχει σύνολο τιμών διάστημα, ολοκληρώνοντας θα ισχύει ότι $\int_0^1 (f(x)-1)dx<0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 dx\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<1$.

Ε2. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Ακόμα, η $-2x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, οπότε η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt-2x+1, x\in[0,1]$ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης, από **(Ε.1)**. έχουμε $g(1)=\int_0^1 f(t)dt-1<0$. Τέλος,

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt+1=1>0$, άρα ισχύει ότι $g(0)g(1)<0$.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του **Bolzano** θα έχει λύση στο $(0,1)$ και επειδή είναι και παραγωγίσιμη με $g'(x)=f(x)-2<0$, αφού $f(x)\le 1, x\in[0,1]$, θα είναι γνήσια φθίνουσα, άρα θα έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Ε3. Είναι το εμβαδόν $E=\int_0^{x_0}|f(x)|dx\overset{f(x)\ge 0}{=}\int_0^{x_0} f(x)dx=\frac{1}{2}$. Όμως, από **(Ε2)**

ισχύει $g(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} f(t)dt = 2x_0 - 1$, θα ισχύει ότι $2x_0 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4}$.

Ε4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Άρα η $h(\kappa) = \int_0^{\kappa} f(t)dt, \kappa \in [0,x], 0 \le x \le 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,x]$ με $0 < x < 1$, παραγωγίσιμη στο $(0,x)$, άρα σύμφωνα με το ΘΜΤ θα υπάρχει $\xi \in (0,x)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x)-h(0)}{x}$ ή $f(\xi) = \frac{h(x)}{x}$ και αφού $f(x) \le 1 < 2, x \in [0,1]$ θα ισχύει ότι $\frac{h(x)}{x} < 2 \Leftrightarrow h(x) < 2x$ για κάθε $x \in (0,1)$.

ΘΕΜΑ 163

Προτείνει ο Βασίλης Κακαβάς

Ε1. Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του $x > 0$ για την οποία ισχύει $x - x\ln x \ge 0$.

Ε2. Αν $f(x) = x - \lambda \ln x, x > 0$ με $\lambda > 0$, να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f, ώστε τα σημεία της f, να είναι όλα πάνω από τα σημεία της (ε) εκτός του σημείου επαφής.

Ε3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{\ln x} (e^t - et)dt$.

Ε4. Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι $\int_1^{\alpha} (e^t - et)dt > 1 - \frac{e}{2}$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $x - x\ln x \ge 0 \Rightarrow x(1-\ln x) \ge 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} \ln x \le 1 \Rightarrow x \le e$.

Άρα η μεγαλύτερη τιμή για την οποία ισχύει $x - x\ln x \ge 0$ είναι η $x = e$.

Ε2. Η συνάρτηση $f(x) = x - \lambda \cdot \ln x, x > 0$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 - \frac{\lambda}{x}$ και $f''(x) = \frac{\lambda}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Οπότε για κάθε $x > 0$, η f κυρτή και συνεπώς η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής της παράστασης, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση (εκτός από το σημείο επαφής).

Ε3. Η συνάρτηση $e^t - et$ είναι συνεχής στο R, ως διαφορά συνεχών.

Το $1\in\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\int_1^x (e^t-et)dt$ είναι το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση e^t-et είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η συνάρτηση $\int_1^x (e^t-et)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η $\ln x$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $F(x)=\int_1^{\ln x} (e^t-et)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_1^x (e^t-et)dt$ και $\ln x$. Έχουμε,

$$F'(x)=\left(\int_1^{\ln x}(e^t-et)dt\right)'=\left(e^{\ln x}-e\ln x\right)\frac{1}{x}=\frac{x-e\ln x}{x},x>0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-e\ln x, x>0$.
Η g έχει προφανή ρίζα $x=e$ και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$. Τότε $g'(x)>0\Rightarrow x>e$

Και $g'(x)<0\Rightarrow x<e$. Από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	Ο.Μ	$\nearrow$

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=e$ το $g(e)=e-e\ln e=0$
Άρα για κάθε $x>0$. ισχύει $g(x)\ge g(e)=0$.
Οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει $F'(x)\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=e$. Άρα, η F γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ε4. Για $\alpha>0$ έχουμε $\alpha>0\Rightarrow e^\alpha>e^0\Rightarrow e^\alpha>1\Rightarrow F(e^\alpha)>F(1)$ διότι η F γνησίως αύξουσα. Τότε,

$$F(e^\alpha)>F(1)\Rightarrow\int_1^{\ln e^\alpha}(e^t-et)dt>\int_1^{\ln 1}(e^t-et)dt\Rightarrow\int_1^{\ln e^\alpha}(e^t-et)dt>\int_1^{0}(e^t-et)dt$$

$$\Rightarrow\int_1^{\ln e^\alpha}(e^t-et)dt>\left[e^t-\frac{et^2}{2}\right]_1^0=1-0-\left(e-\frac{e}{2}\right)=1-\frac{e}{2}.$$

ΘΕΜΑ 164 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)=\int_0^x\frac{4}{f^2(t)+1}dt.$$

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$

Ε2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ έχει ένα σημείο καμπής, το οποίο και να βρείτε.

Ε3. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f^3(x)+3f(x)=12x}$.

Ε4. Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{f(x)=x}$.

Ε5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{\int_0^3 f(x)dx}$.

Λύση:

Ε1. Επειδή η $\mathbf{\dfrac{4}{f^2(x)+1}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, η $\mathbf{f(x)=\int_0^x \dfrac{4}{f^2(t)+1}dt}$ είναι παραγωγίσιμη με $\mathbf{f'(x)=\dfrac{4}{f^2(x)+1}}$ και η $\mathbf{f'}$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $\mathbf{f''(x)=-\dfrac{4(f^2(x)+1)'}{(f^2(x)+1)^2}=-\dfrac{8f(x)f'(x)}{(f^2(x)+1)^2}}$.

Ε2. Έχουμε ότι για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει $\mathbf{f'(x)=\dfrac{4}{f^2(x)+1}>0}$, οπότε η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

Ακόμα, $\mathbf{f''(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{8f(x)f'(x)}{(f^2(x)+1)^2}=0 \Leftrightarrow 8f(x)f'(x)=0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=0\,(1)}$.

Επειδή έχουμε $\mathbf{f(0)=0}$ και $\mathbf{f'(x)>0}$, η $\mathbf{x_0=0}$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{f(x)=0}$. Επομένως η εξίσωση $\mathbf{f''(x)=0}$ έχει μοναδική λύση την $\mathbf{x_0=0}$.

Επίσης επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, έχουμε για $\mathbf{x>0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0}$.

Ενώ για για $\mathbf{x<0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)=0}$.

Συνεπώς,

$$\mathbf{f''(x)>0 \Leftrightarrow -\dfrac{8f(x)f'(x)}{(f^2(x)+1)^2}>0 \Leftrightarrow -8f(x)f'(x)>0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)<0=f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0.}$$

Ομοίως προκύπτει πως $\mathbf{f''(x)<0 \Leftrightarrow x>0}$.

Έτσι, από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι κυρτή στο $\mathbf{(-\infty,0]}$ και κοίλη στο $\mathbf{[0,+\infty)}$. Παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $\mathbf{x_0=0}$ με τιμή $\mathbf{f(0)=0}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ	$\cap$

Επομένως το $\mathbf{O(0,0)}$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$.

Ε3. Από $f'(x)=\dfrac{4}{f^2(x)+1}$ θα ισχύει ότι $f^2(x)f'(x)+f'(x)=4$ ή ότι $3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=12$ άρα $(f^3(x)+3f(x))'=(12x)', x\in R$ επομένως ότι $f^3(x)+3f(x)=12x+c, c\in R$ και αφού $f(0)=0$, προκύπτει ότι $c=0$. Άρα και $f^3(x)+3f(x)=12x, x\in R.$

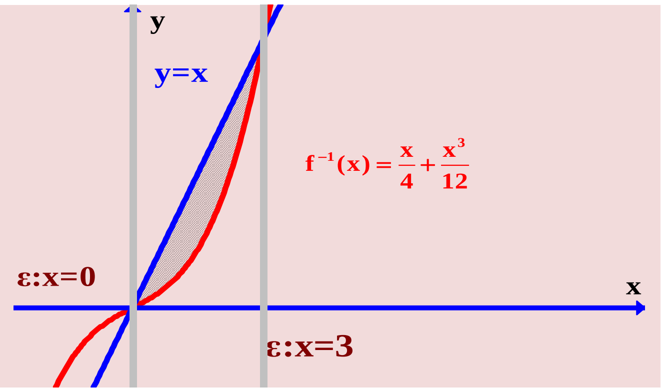
Ε4. Προφανής ρίζα της $f(x)=x$ είναι η $x=0,$ τώρα αν υπάρχει $x_0\neq 0$ ώστε να ισχύει $f(x_0)=x_0$ τότε από $f^3(x)+3f(x)=12x$ θα ισχύει ότι $f^3(x_0)+3f(x_0)=12x_0 \Leftrightarrow x_0^3+3x_0=12x_0 \Leftrightarrow x_0^3+9x_0=0$ που αφού $x_0\neq 0,$ προκύπτει ότι $x_0^2+9=0$ που είναι **άτοπο,** άρα μοναδική ρίζα της $f(x)=x$ είναι η $x=0.$

Ε5. Αν $g(x)=x^3+3x$ θα ισχύει από $f^3(x)+3f(x)=12x, x\in R$ ότι $g(f(x))=12x$ και επειδή $g'(x)=3x^2+3>0$ η g είναι γνήσια αύξουσα στο R άρα και αντιστρέψιμη και αφού το σύνολο τιμών της θα είναι $g(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x))=(-\infty,+\infty)$ το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το R έτσι αφού από $g(f(x))=12x$ θα έχουμε $f(x)=g^{-1}(12x)$ η f θα έχει σύνολο τιμών το σύνολο τιμών της g^{-1} που είναι το πεδίο ορισμού της g δηλαδή το R, έτσι αφού η f αντιστρέφεται (επειδή είναι γνήσια αύξουσα) με πεδίο ορισμού της f^{-1} το R από την $f^3(x)+3f(x)=12x, x\in R$ θα έχουμε ότι

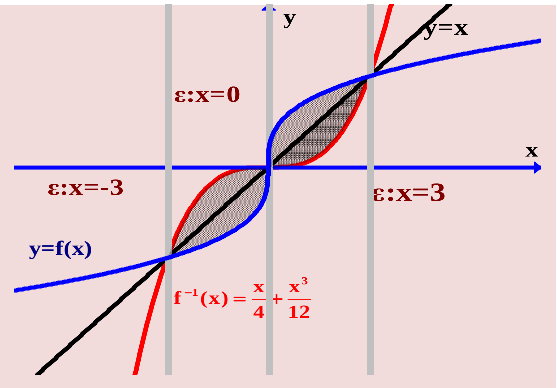
$f^3(f^{-1}(x))+3f(f^{-1}(x))=12f^1(x), x\in R$ ή

$$x^3+3x=12f^1(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x, x\in R.$$

Ε6. Προσδιορίζουμε τη σχετική θέση των $C_f, C_{f^{-1}}$. Επειδή η f κοίλη στο $[0,+\infty)$,έχουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω απο την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$, ενώ η γραφική παράσταση της f^{-1} θα βρίσκεται κάτω απο την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$. Το ζητούμενο εμβαδον φαίνεται στο σχήμα 1, ένω στο σχήμα 2 βλέπουμε την συμμετρία των $C_f, C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x.$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

$$E=4\int_0^3\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=4\int_0^3\left(x-f^{-1}(x)\right)dx=4\int_0^3\left(x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}\right)dx=4\int_0^3\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^3}{12}\right)dx=$$

$$4\left[\frac{3x^2}{8}-\frac{x^4}{48}\right]_0^3=4\left(\frac{3^3}{8}-\frac{3^4}{48}\right)=4\left(\frac{27}{8}-\frac{27}{16}\right)=\frac{4\cdot 27}{16}=\frac{27}{4}\text{τ.μ.}$$

Επομένως από τη συμμετρία έχουμε $\int_0^3 f(x)dx=\frac{E}{4}=\frac{27}{16}$τ.μ.

ΘΕΜΑ 165 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1=\alpha+if(\alpha)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος για **Rolle** τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε4. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_\alpha^x\frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο (α,β).

Λύση:

Ε1. $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}+i\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}-i\right|\Leftrightarrow|w+i|=|w-i|\Leftrightarrow|w+i|^2=|w-i|^2\Leftrightarrow$

$2i(w-\overline{w})=0\Leftrightarrow w=\overline{w}$, που ισχύει.

Β΄ τρόπος για το (Ε1)

$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow|\alpha+if(\alpha)+i(\beta+if(\beta))|=|\alpha+if(\alpha)-i(\beta+if(\beta))|\Leftrightarrow$

$|\alpha+if(\alpha)+i\beta-f(\beta)|=|\alpha+if(\alpha)-i\beta+f(\beta)|$.

Ακόμα, $|(\alpha-f(\beta))+i(f(\alpha)+\beta)|=|(f(\beta)+\alpha)+i(f(\alpha)-\beta)|\Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2}=\sqrt{(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2}\Leftrightarrow$

$(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2=(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2\Leftrightarrow$

$-2\alpha f(\beta)+2\beta f(\alpha)=2\alpha f(\beta)-2\beta f(\alpha)\Leftrightarrow\alpha f(\beta)=2f(\alpha)$.

Επομένως , $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

Ε2. $w \in R \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} = \overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow$
$\left(\alpha + if(\alpha)\right)\left(\beta - if(\beta)\right) = \left(\alpha - if(\alpha)\right)\left(\beta + if(\beta)\right) \Leftrightarrow \alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [\alpha,\beta], 0 < \alpha < \beta,$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $x \in (\alpha,\beta)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ ενώ $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta}$.

Όμως $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$.

Συνεπώς η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του **Rolle** στο $[\alpha,\beta]$.
Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}, \xi \in (\alpha,\beta).$$

Ε3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο ξ, του **(Ε2)**, είναι η $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}(x-\xi) \Leftrightarrow y = \frac{xf(\xi)}{\xi}$

Επειδή οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, έχουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε4. Θέτουμε $x + \alpha - t = u$, έχουμε $dt = -du$. Για $t = \alpha \Rightarrow u = x$ ενώ για $t = x \Rightarrow u = \alpha$. Επομένως, $\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt = -\int_x^\alpha \frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du = \int_\alpha^x \frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du.$

Έχουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $h(x) = \int_\alpha^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Επομένως και συνεχής, άρα $\lim_{x\to\alpha}\left(\int_\alpha^x g(u)du\right) = h(\alpha) = 0.$

Συνεπώς , έχουμε ότι $1 = \lim_{x\to\alpha}\int_a^x \frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du = \lim_{x\to\alpha}\frac{\int_\alpha^x g(u)du}{(x-\alpha)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to\alpha}\left(g(x)\right) = g(\alpha).$

Οπότε $g(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ και $\beta f(\alpha) = \alpha f(\beta) \Leftrightarrow f(\beta) = \beta.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x, x \in [\alpha,\beta].$

Η $\mathbf{h}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0$, $h(\beta)=f(\beta)-\beta=0$. Συνεπώς από θεώρημα **Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)-1=0\Leftrightarrow f'(x_0)=1$.

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

ΘΕΜΑ 166

Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$. Αν η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία $A(1,1),B\left(\frac{1}{2},2\right)$ και $g(x)=\int_2^{f(x)}\frac{1}{1-f(t)}dt$ τότε:

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x)$.

Ε2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $g(x)$.

Ε3. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $f(f(x))=x$, τότε να δείξετε ότι :

α. $f'(1)=-1$.

β. Υπάρχει $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_o)=\frac{2}{x_o-1}$.

γ. Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\frac{3}{2}$.

Λύση:

Ε1. Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)\neq 0$ και η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x>0$.

(*) Απόδειξη του σταθερού προσήμου στο **(Ε1)** του θέματος **121**.

Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε

$1>\frac{1}{2}\Rightarrow f(1)>f\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 1>2$, ***άτοπο.***

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Έστω $h(t)=\frac{1}{1-f(t)}$. Η $\mathbf{h}$ ορίζεται για κάθε $t>0$ με $f(t)\neq 1\Leftrightarrow f(t)\neq f(1)\overset{1-1}{\Rightarrow} t\neq 1$

Άρα $D_h=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $2\in(1,+\infty)$ επιβάλλεται το $f(x)\in(1,+\infty)$,

δηλαδή $f(x)>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x<1$. Έτσι $D_g=(0,1)$.

Ε2. Για κάθε $x\in(0,1)$ η συνάρτηση $\frac{1}{1-f(t)}$ είναι συνεχής στο $(0,1)$, οπότε η συνάρτηση του ολοκληρώματος $\int_2^x \frac{1}{1-f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x)=h(f(x))f'(x)=\frac{f'(x)}{1-f(f(x))}<0 \text{ γιατί}$$

$$f(x)>1\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(f(x))<f(1)\Leftrightarrow f(f(x))<1 \text{ και } f'(x)<0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Ε3. **α.** Για κάθε $x>0$ $f(f(x))=x\Rightarrow f'(f(x))f'(x)=1$

Για $x=1$ έχουμε $f'(f(1))\cdot f'(1)=1\Leftrightarrow (f'(1))^2=1 \overset{f'(x)<0}{\Rightarrow} f'(1)=-1.$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=f(x)+2x$, $x>0$.

Η F είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως παραγωγίσιμη.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$ με $F'(x)=f'(x)+2.$

$F(1)=3=F\left(\frac{1}{2}\right).$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα **Rolle**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq(0,1)$:

$$F'(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)=-2\Rightarrow \frac{f'(x_0)}{1-x_0}=\frac{2}{x_0-1}$$

$$\overset{f(f(x_0))=x_0}{\Rightarrow}\frac{f'(x_0)}{1-f(f(x_0))}=\frac{2}{x_0-1}\Rightarrow g'(x_0)=\frac{2}{x_0-1}.$$

γ. Η f' είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ και $f'(x_0)=-2<-\frac{3}{2}<-1=f'(1)$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, **Θ.Ε.Τ.**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_0,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\frac{3}{2}.$

ΘΕΜΑ 167

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:
$f(0)=1$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty).$

Ε1. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>e^x$.

Ε2. Αν για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt+2\alpha^x+e^x\geq 3$, να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Ε3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt+e^x=x+2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση:

Ε1. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $f'(x)>f(x)\Rightarrow f'(x)e^{-x}>f(x)e^{-x}\Rightarrow$ $f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}>0$, οπότε $\left(f(x)e^{-x}\right)'>0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-x}$ με $x\in[0,+\infty)$.
Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε
$x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Rightarrow f(x)e^{-x}>f(0)e^0$
$\Rightarrow f(x)e^{-x}>1\Rightarrow f(x)>e^x$.

Ε2. Για $x>0$ έχουμε

$$\int_0^x f(t)dt+2\alpha^x+e^x\geq 3\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\geq 3-2\alpha^x-e^x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\geq\frac{3-2\alpha^x-e^x}{x}.$$

Επειδή η f παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής. Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_0^x f(t)dt\right)=h(0)=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)\right)=f(0)$, αφού η f συνεχής.

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{3-2\alpha^x-e^x}{x}\right)\underset{D'LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-2\alpha^x\ln\alpha-e^x}{1}\right)=-2\ln\alpha-1$
Άρα $f(0)\geq -2\ln\alpha-1$ (1).
Για $x<0$ έχουμε,

$$\int_0^x f(t)dt+2\alpha^x+e^x\geq 3\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt\geq 3-2\alpha^x-e^x\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\leq\frac{3-2\alpha^x-e^x}{x}.$$

Επειδή η f παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής. Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, άρα και συνεχής. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\int_0^x f(t)dt\right)=h(0)=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)\right)=f(0)$,αφού η f συνεχής .

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{3-2\alpha^x-e^x}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D'LH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-2\alpha^x\ln\alpha-e^x}{1}\right)=-2\ln\alpha-1.$

Άρα $f(0)\le -2\ln\alpha-1.\ (2)$

Από (1), (2) έχουμε $f(0)=-2\ln\alpha-1.$Όμως $f(0)=1,$ οπότε

$-2\ln\alpha-1=1\Leftrightarrow -2\ln\alpha=2\Leftrightarrow \ln\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=e^{-1}=\dfrac{1}{e}.$

Ε3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=\int_0^x f(t)dt+e^x-x-2$ με $x\in[0,1].$

G συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών και επιπλέον

$G(0)=\int_0^0 f(t)dt+e^0-0-2=-1<0$ και

$G(1)=\int_0^1 f(t)dt+e-1-2=\int_0^1 f(t)dt+e-3$. Από το **(Ε.1)** έχουμε

$f(t)>e^t\Rightarrow \int_0^1 f(t)dt>\int_0^1 e^t dt=\left[e^t\right]_0^1=e-1\Rightarrow$

$\int_0^1 f(t)dt>e-1\Rightarrow \int_0^1 f(t)dt+e-3>2e-4>0$

Άρα $G(0)\cdot G(1)<0$,από το θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1)$

τέτοιο ώστε $G(x_1)=0\Rightarrow \int_0^{x_1} f(t)dt+e^{x_1}-x_1-2=0\Rightarrow \int_0^{x_1} f(t)dt+e^{x_1}=x_1+2.$

ΘΕΜΑ 168 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται κυρτή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\int_0^1 \dfrac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=\dfrac{f'(1)+f(1)-e}{e}$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>1$.

Ε3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1)=2$, να δείξετε ότι $1<\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{3}{2}$.

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_1^x \left[f(t)-\ln\left(f(t)\right)\right]dt, x\in[0,+\infty)$.

α. Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $e^{f(x)}>ef(x)$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 e^{f(x)-1}dx>\int_1^2 \ln\left(f(x)\right)dx$.

Πηγή: Β.Παπαδάκης (Η Επανάληψη, εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. $\int_0^1 \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=\int_0^1 \frac{f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)}{e^x}dx=$

$\int_0^1 \frac{f''(x)-f'(x)}{e^x}dx+\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx=\left[\frac{f'(x)}{e^x}\right]_0^1+\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]_0^1=$

$\left[\frac{f'(x)}{e^x}\right]_0^1+\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]_0^1=\frac{f'(1)}{e}-f'(0)+\frac{f(1)}{e}-f(0)$

Όμως $\int_0^1 \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=\frac{f'(1)+f(1)-e}{e}$, οπότε

$\frac{f'(1)}{e}-f'(0)+\frac{f(1)}{e}-f(0)=\frac{f'(1)+f(1)-e}{e}$.Άρα, $-f'(0)-f(0)=-1\overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow}f'(0)=0.$

Ε2. Επειδή η f είναι κυρτή, έχουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως για κάθε $x\geq 0$ έχουμε ότι $f'(x)\geq f'(0)=0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Οπότε για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)>f(0)=1$

Ε3. Από **(Ε2)** έχουμε

$f(x)>1\Rightarrow f(x)-1>0\Rightarrow\int_0^1 (f(x)-1)dx>0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx>1$

Έστω $0<x<1$. τότε η f είναι συνεχής στο $[0,x]$,παραγωγίσιμη στο $(0,x)$, οπότε από **ΘΜΤ** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}$.

Όμοια, η f είναι συνεχής στο $[x,1]$, παραγωγίσιμη στο $(x,1)$, οπότε από **ΘΜΤ** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{2-f(x)}{1-x}$.

Όμως $0<\xi_1<x<\xi_2<1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{x}<\frac{2-f(x)}{1-x}\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow}$

$(1-x)(f(x)-1)<x(2-f(x))\Leftrightarrow f(x)-1-xf(x)+x<2x-xf(x)\Leftrightarrow$
$f(x)-x-1<0\Leftrightarrow x+1-f(x)>0.$

Επομένως $\int_0^1 (x+1-f(x))dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)dx-\int_0^1 f(x)dx>0\Leftrightarrow$

$\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\frac{3}{2}$. Συνεπώς έχουμε $1<\int_0^1 f(x)dx<\frac{3}{2}$.

Ε4. **α.** $g(x)=\int_1^x \left[f(t)-\ln(f(t))\right]dt, x\in[0,+\infty).$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και $f(x)>1$, οπότε ορίζεται η $\ln(f(x))$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως η $f(t)-\ln(f(t))$ παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, οπότε και η $\int_1^x \left[f(t)-\ln(f(t))\right]dt$ παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, άρα η g παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)=f(x)-\ln(f(x)), x\ge 0$. Η $g'(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g''(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}=f'(x)\cdot\frac{f(x)-1}{f(x)}>0.$

Επομένως η g είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

β. Επειδή η g είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ έχουμε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Οπότε για $x>0$ έχουμε $g'(x)>g'(0)\Leftrightarrow f(x)-\ln(f(x))>f(0)-\ln(f(0))\Leftrightarrow$
$f(x)-\ln(f(x))>1\Leftrightarrow f(x)>1+\ln(f(x))\Leftrightarrow f(x)>\ln e+\ln(f(x))\Leftrightarrow$
$f(x)>\ln(ef(x))\Leftrightarrow e^{f(x)}>ef(x).$

γ. $e^{f(x)}>ef(x)\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{e}>f(x)\Leftrightarrow e^{f(x)-1}>f(x)\Leftrightarrow e^{f(x)-1}-f(x)>0.$

Επομένως $\int_1^2 \left(e^{f(x)-1}-f(x)\right)dx>0\Leftrightarrow \int_1^2 e^{f(x)-1}dx>\int_1^2 f(x)dx.$

Επίσης η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x\ge 0$, έχουμε $g'(x)\ge g'(0)=1$. Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έχουμε $1<2\overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(1)<g(2)\Rightarrow 0<\int_1^2 \left[f(x)-\ln(f(x))\right]dx\Rightarrow$

$0<\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 \ln(f(x))dx\Rightarrow \int_1^2 \ln(f(x))dx<\int_1^2 f(x)dx.$

Συνεπώς έχουμε $\int_1^2 \ln(f(x))dx<\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 e^{f(x)-1}dx.$

ΘΕΜΑ 169 — Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $x^2(f'(x)-1)=\ln x-1$ για κάθε $x>0$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\dfrac{\ln x}{x}, x>0$ ισούται με την ταυτοτική στο $(0,+\infty)$.

Ε2. Να βρείτε τον τύπο της f.

Ε3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^{\frac{1}{x+1}}\ge e^{1-x}$ όταν $x\ge 1$.

Ε4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=e$.

Πηγή: Μ.Τουμάσης - Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $x^2(f'(x)-1)=\ln x-1, (1)$. Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=f'(x)+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2f'(x)+1-\ln x}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{x^2f'(x)-(\ln x-1)}{x^2}\overset{(1)}{=}\frac{x^2f'(x)-x^2(f'(x)-1)}{x^2}=1.$$

Επειδή $g'(x)=1$ έχουμε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $g(x)=x+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=1$ έχουμε $g(1)=f(1)+\dfrac{\ln 1}{1}\Leftrightarrow g(1)=1.$

Επομένως, για $x=1$ έχουμε $c=0$. Άρα $g(x)=x, x>0$.

Ε2. Έχουμε $g(x)=x\Leftrightarrow f(x)+\dfrac{\ln x}{x}=x\Leftrightarrow f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}, x>0$, που επαληθεύει την αρχική σχέση.

Ε3. Θέλουμε να δείξουμε πως για κάθε $x\ge 1$ ισχύει

$$x^{\frac{1}{x+1}}\ge e^{1-x}\Leftrightarrow \ln(x^{\frac{1}{x+1}})\ge \ln e^{1-x}\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\ln x\ge(1-x)\ln e\Leftrightarrow$$

$$\ln x\ge(1-x)(1+x)\Leftrightarrow \ln x\ge 1-x^2\Leftrightarrow x^2-1+\ln x\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)+\ln x\ge 0$$

που ισχύει, διότι για κάθε $x\ge 1$ ισχύει $x-1\ge 0, x+1>0$ και $\ln x\ge 0$.

Οπότε για κάθε $x\ge 1$ έχουμε $x^{\frac{1}{x+1}}\ge e^{1-x}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$.

Ε4. Για κάθε $x\ge 1$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$ λόγω του **Ε3**.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

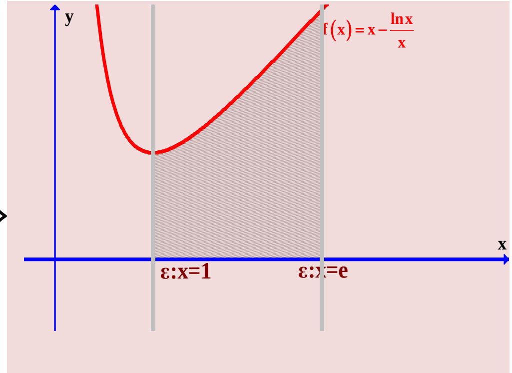
Επομένως για κάθε $x\ge 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)\ge f(1)=1.$

Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e-\int_1^e(\ln x)'\ln x dx=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e-\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^e\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)-\frac{1}{2}=\frac{e^2-2}{2}\text{ τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ 170

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln x, x>0$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)>0$.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε3. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{x+1}^{x+2}f(t)dt\right)=+\infty$.

Ε4. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}xf(t)dt\right)=0$.

Λύση:

Ε1. Για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)-\ln x=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

Έστω $g(x)=e^x-x-1, x\in\mathbb{R}$. Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με $g'(x)=e^x-1, x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$ και

$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$

Από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$, με τιμή $g(0)=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Άρα για κάθε $x>0$ έχουμε

$$g(x)>1\Leftrightarrow e^x-x-1>0\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{x}>1\Leftrightarrow\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)>0\Leftrightarrow f(x)>0.$$

Ε2. Είναι $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $x\left(e^x-1\right)>0$, επομένως το πρόσημο της f', εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xe^x-e^x+1, x\geq 0$. Η h παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=xe^x, x\geq 0$.

Επειδή για κάθε $x>0$ ισχύει $h'(x)>0$. Όμως η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, συνεπώς για κάθε $x>0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)>0$. Έτσι ,έχουμε $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x(e^x-1)}>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Για κάθε $x+1\leq t\leq x+2$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$f(x+1)\leq f(t)\leq f(x+2)\Rightarrow \int_{x+1}^{x+2} f(x+1)dt\leq \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\leq \int_{x+1}^{x+2} f(x+2)dt\Rightarrow$$

$$f(x+1)\leq \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\leq f(x+2).$$

Τότε έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty.$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) \overset{u=\frac{e^x-1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$

Άρα , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+2)=+\infty.$

Από το κριτήριο παρεμβολής , βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt=+\infty.$

Ε4. Για κάθε $x>0$ και $\dfrac{1}{x}\leq t\leq\dfrac{2}{x}$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα,

έχουμε $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq f(t)\leq f\left(\dfrac{2}{x}\right)\Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf\left(\frac{1}{x}\right)dt\leq \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf(t)dt\leq \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf\left(\frac{2}{x}\right)dt\Rightarrow$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf(t)dt\leq f\left(\frac{2}{x}\right)$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0^+} e^x=1.$

Οπότε, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to0^+} f(u)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln\left(\dfrac{e^u-1}{u}\right) \overset{w=\frac{e^u-1}{u}}{=} \lim\limits_{w\to1}\ln w=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{2}{x}\right)=0.$

Από κριτήριο παρεμβολής, βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} xf(t)dt=0.$

ΘΕΜΑ 171

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η $\mathbf{f}$ μια συνεχής συνάρτηση στο $[1,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\ge 1$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $G(x)=\int_1^x t^2 f(t)dt, x\ge 1$ και $H(x)=\int_1^x tf(t)dt, x\ge 1.$

Ε1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{G(x)}{H(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x)=xH(x)-G(x), x\ge 1.$ Να δείξετε οτι:

α. Για κάθε $x\ge 1$ ισχύει $P(x)\ge 0.$

β. Η συνάρτηση $\mathbf{P}$ είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Ε3. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{H(x)\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{G(x)\cdot(x-1)^2}$.

Πηγή: Γ.Μιχαηλίδης (εκδόσεις Διόφαντος)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $G(x)=\int_1^x t^2 f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ αφού η συνάρτηση $t^2 f(t)$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

Τότε $G'(x)=\left(\int_1^x t^2 f(t)dt\right)'=x^2 f(x)$. Αντίστοιχα η συνάρτηση $H(x)=\int_1^x tf(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$, αφού η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών. Τότε $H'(x)=\left(\int_1^x tf(t)dt\right)'=xf(x)$. Η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{G(x)}{H(x)}, x>1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Τότε ,

$$F'(x)=\left(\frac{G(x)}{H(x)}\right)'=\frac{G'(x)H(x)-G(x)H'(x)}{H^2(x)}=\frac{x^2 f(x)H(x)-G(x)xf(x)}{H^2(x)}\Leftrightarrow$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)(xH(x)-G(x))}{H^2(x)}=\frac{xf(x)}{H^2(x)}\left(x\int_1^x tf(t)dt-\int_1^x t^2 f(t)dt\right)\Leftrightarrow$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)}{H^2(x)}\int_1^x\left(xtf(t)-t^2 f(t)\right)dt=\frac{xf(x)}{H^2(x)}\left(x\int_1^x tf(t)dt-\int_1^x t^2 f(t)dt\right)\Leftrightarrow$$

$$F'(x)=\frac{xf(x)}{H^2(x)}\int_1^x\left(xtf(t)-t^2f(t)\right)dt \Leftrightarrow F'(x)=\frac{xf(x)}{H^2(x)}\int_1^x tf(t)(x-t)dt\ \ (1).$$

Από αρχική υπόθεση έχουμε $f(x)>0$ και συνεπώς $\frac{xf(x)}{H^2(x)}>0$ για κάθε $x>1.$.

Επιπλέον για $1\le t\le x$ έχουμε $tf(t)(x-t)\ge 0$ και συνεπώς και $\int_1^x tf(t)(x-t)dt\ge 0$.

Οπότε από την **(1)** έχουμε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $F'(x)\ge 0.$

Συνεπώς η $F(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty).$

Ε2. **α.** Η συνάρτηση $P(x)=xH(x)-G(x), x\ge 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων. Τότε ,

$$P'(x)=\left(xH(x)-G(x)\right)'=H(x)+xH'(x)-G'(x)\Leftrightarrow$$

$P'(x)=\int_1^x tf(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=\int_1^x tf(t)dt\ge 0$ για κάθε $x\ge 1$,αφού για $1\le t\le x$ έχουμε $tf(t)>0$. Συνεπώς $P'(x)\ge 0$ και άρα η $P(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Οπότε για κάθε $x\in[1,+\infty)$ έχουμε $x\ge 1\Rightarrow P(x)\ge P(1)=0.$

β. Η συνάρτηση $P'(x)=\int_1^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη αφού η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής. Τότε $P''(x)=\left(\int_1^x tf(t)dt\right)'=xf(x)>0$ για κάθε $x\ge 1.$

Άρα η P είναι κυρτή στο $[1,+\infty).$

Ε3. Έχουμε, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{H(x)\cdot\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{G(x)\cdot(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{H(x)}{G(x)}\,\frac{\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{(x-1)^2}\right)(2)$

Επιπλέον με χρήση **De L'Hospital** έχουμε ,

$$\lim_{x\to1^+}\frac{H(x)}{G(x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\int_1^x tf(t)dt}{\int_1^x t^2f(t)dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\int_1^x tf(t)dt\right)'}{\left(\int_1^x t^2f(t)dt\right)'}=\lim_{x\to1^+}\frac{xf(x)}{x^2f(x)}=1.$$ Και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\int_1^{x^2}\ln t\,dt\right)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x^2\cdot 2x}{2(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x\ln x}{x-1}=$$

$$=2\lim_{x\to1^+}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=2\lim_{x\to1^+}(\ln x+1)=2.$$

Τότε η (2) δίνει

$$\lim_{x\to1^+}\frac{H(x)\cdot\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{G(x)\cdot(x-1)^2}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{H(x)}{G(x)}\frac{\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{H(x)}{G(x)}\lim_{x\to1^+}\frac{\int_1^{x^2}\ln t\,dt}{(x-1)^2}=1\cdot2=2.$$

ΘΕΜΑ 172

Προτείνει ο Μάκης Χατζόπουλος

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x+1)=2x+f'(1-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=0$.

Ε1. Να δείξετε ότι $f(1+x)+f(1-x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

Ε2. Να βρείτε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{1-x}^{1+x} f(t)dt-\frac{x^3}{3}$.

Ε3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f'(x+1)=2x+f'(1-x)\Leftrightarrow f'(x+1)-f'(1-x)=2x\Rightarrow$
$\left(f(x+1)+f(1-x)\right)'=\left(x^2\right)'\Rightarrow f(x+1)+f(1-x)=x^2+c, c\in\mathbb{R}$.
Οπότε για $x=0$ έχουμε $2f(1)=c\Leftrightarrow c=0$. Επομένως $f(x+1)+f(1-x)=x^2$.

Ε2. $g(x)=\int_{1-x}^{x+1} f(t)dt-\frac{x^3}{3}=\int_0^{x+1} f(t)dt-\int_0^{1-x} f(t)dt-\frac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ είναι και συνεχής. Η $\mathbf{x+1}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^{x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Όμοια, επειδή η $\mathbf{1-x}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, έχουμε ότι και η συνάρτηση $\int_0^{1-x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Η $\frac{x^3}{3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.. Οπότε η $\mathbf{g}$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x)=f(x+1)+f(1-x)-2x=2x-2x=0.$

Επομένως για κάθε $x\in R$, έχουμε $g(x)=c, c\in R.$

Για $x=0$, έχουμε $g(0)=\int_1^1 f(t)dt-0^2=0.$ Συνεπώς $g(x)=0 \Leftrightarrow \int_{1-x}^{x+1} f(t)dt=\frac{x^3}{3}.$

Ε3. Για $x=2$ έχουμε $\int_{-1}^{3} f(t)dt=\int_{1-2}^{2+1} f(t)dt=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}.$

ΘΕΜΑ 173 — Προτείνει ο Μάκης Χατζόπουλος

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_2^x \sqrt{u^2-u}\,du$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f}$.

Ε2. Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Ε3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x)=\int_3^x\left(\int_2^t\left(e^t\sqrt{u^2-u}\right)du\right)dt$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ τέτοια ώστε

$$e^{\xi_1}f(\xi_1)+e^{\xi_2}(\xi_2)=\int_1^3 e^t f(t)dt.$$

Ε5. Να αποδείξετε ότι: $\int_3^x\left(e^{t-3}\frac{f(t)}{f(3)}\right)dt\geq x-3$ για κάθε $x\in(2,+\infty).$

Λύση:

Ε1. Για να ορίζεται η $\varphi(u)=\sqrt{u^2-u}$,πρέπει $u^2-u\geq 0$.

Έχουμε $u^2-u\geq 0\Leftrightarrow u\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.Η $\varphi(u)=\sqrt{u^2-u}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]\cup[1,+\infty).$

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της $\mathbf{f}$.

Έχουμε $f(x)=\int_2^x\sqrt{u^2-u}\,du.$ Το $2\in[1,+\infty)$, οπότε πρέπει και το $x\in[1,+\infty).$

Επομένως $D_f = x \in [1,+\infty)$.

Ε2. $f(x)=\int_2^x \sqrt{u^2-u}\,du,\ D_f = x\in[1,+\infty).$

Επειδή $f(2)=0$ η $x=2$ είναι μια λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

Επειδή η $\sqrt{u^2-u}$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, η συνάρτηση $\int_2^x \sqrt{u^2-u}\,du$ παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$.

Άρα η f παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $f'(x)=\sqrt{x^2-x}, x\in[1,+\infty)$.

Επειδή για κάθε $x\in[1,+\infty)$ έχουμε $f'(x)\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ με τιμή $f(1)=\int_2^1 \sqrt{u^2-u}\,du=-\int_1^2 \sqrt{u^2-u}\,du.$

Σημειώση: Το ακρότατο δεν μπορεί να υπολογιστει, σε αλλή περίπτωση,πρέπει να βρεθεί.

Συνεπώς η $x=2$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για $x>2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(2)=0$ και για $1\leq x<2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(2)=0.$

Ε3. $g(x)=\int_3^x\left(\int_2^t e^t\sqrt{u^2-u}\,du\right)dt=\int_3^x e^t\left(\int_2^t \sqrt{u^2-u}\,du\right)dt=\int_3^x e^t f(t)dt, x\geq 1.$

Η $f(t)$ συνεχής στο $[1,+\infty)$, η e^t συνεχής στο $[1,+\infty)$. Οπότε η συνάρτηση

$\int_3^x e^t f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $g'(x)=e^x f(x), x\geq 1.$

Από το **(Ε.2)** έχουμε ότι για κάθε $x\in[1,2)$ ισχύει $f(x)<0$, ενώ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ ισχύει $f(x)>0$. Επίσης, $f(2)=0$.

Επομένως για κάθε $x\in[1,2)$ έχουμε $g'(x)<0$, ενώ για κάθε $x\in(2,+\infty)$ ισχύει $g'(x)>0$.

Επομένως, από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η g γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	Ο.Ε	↗	

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, στη θέση

$x=2$ με τιμή $g(2)=\int_3^2 e^t f(t)dt=-\int_2^3 e^t f(t)dt$

.

Ε4. Έχουμε $g(x)=\int_3^x e^t f(t)dt=0, x\in[2,+\infty)$, $g'(x)=e^x f(x), x\in[2,+\infty)$ και

$g''(x)=e^x(f(x)+f'(x))$.

Η g συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(1,2)$

τέτοιο ώστε $g'(\xi_1)=\dfrac{g(2)-g(1)}{2-1}=g(2)-g(1)=\int_3^2 e^t f(t)dt-\int_3^1 e^t f(t)dt \Leftrightarrow$

$g'(\xi_1)=\int_1^3 e^t f(t)dt+\int_3^2 e^t f(t)dt=\int_1^2 e^t f(t)dt.$

Η g συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$, από ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2\in(2,3)$

τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=\dfrac{g(3)-g(2)}{3-2}=g(3)-g(2)=\int_3^3 e^t f(t)dt-\int_3^2 e^t f(t)dt \Leftrightarrow$

$g'(\xi_2)=0-\int_3^2 e^t f(t)dt=\int_2^3 e^t f(t)dt.$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$g'(\xi_1)+g'(\xi_2)=\int_1^2 e^t f(t)dt+\int_2^3 e^t f(t)dt \Leftrightarrow e^{\xi_1}f(\xi_1)+e^{\xi_2}f(\xi_2)=\int_1^3 e^t f(t)dt.$

Ε5. Έχουμε $g''(x)=e^x(f(x)+f'(x))$.

Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ έχουμε $g''(x)>0$. Άρα η g είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται πάντα κάτω από τη γραφική παράσταση της g με εξαίρεση το σημείο επάφης.

Έχουμε $g(3)=0$ και $g'(3)=e^3 f(3)$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(3,0)$ είναι η $y-g(3)=g'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=e^3 f(3)(x-3)$.

Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ ισχύει $g(x)\ge e^3 f(3)(x-3)\Leftrightarrow \int_3^x e^t f(t)dt\ge e^3 f(3)(x-3) \overset{f(3)>0}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{1}{e^3 f(3)}\int_3^x e^t f(t)dt\ge x-3\Leftrightarrow \int_3^x \dfrac{e^t f(t)}{e^3 f(3)}dt\ge x-3\Leftrightarrow \int_3^x \dfrac{e^{t-3}f(t)}{f(3)}dt\ge x-3.$

ΘΕΜΑ 174

Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3^x$ και $g(x)=-x^2+9x-5$.

Ε1. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$.

Ε2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-5x+6)=g(x)-4x$. .

Ε3. Να υπολογίσετε τα όρια : $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}$ και

$$B = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)-f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}.$$

Ε4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Ε5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{f(x)+1}dx$ με $\alpha\in R$.

Λύση:

Ε1. Είναι $g'(x)=-2x+9.$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο τυχαίο σημείο της $M(x_0,g(x_0))$ είναι $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από το $A(1,4)$ πρέπει να ισχύει

$4-g(x_0)=g'(x_0)(1-x_0)\Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=2$.

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$.

Μία στο σημείο $M(0,-5)$ με εξίσωση $y=9x-5$ και μία στο σημείο $M'(2,5)$ με εξίσωση $y=5x-1$.

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x^2-5x+6)-g(x)+4x=3^{x^2-5x+6}+x^2-5x+5.$$

Παρατηρούμε ότι $h(2)=h(3)=0$

Έχουμε $h'(x)=(2x-5)3^{x^2-5x+6}\ln3+2x-5=(2x-5)\left(3^{x^2-5x+6}\ln3+1\right)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow(2x-5)\left(3^{x^2-5x+6}\ln3+1\right)=0\Leftrightarrow2x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

$$h'(x)>0\Leftrightarrow(2x-5)\left(3^{x^2-5x+6}\ln3+1\right)>0\Leftrightarrow2x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Από το διπλανό πίνακα , έχουμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\frac{5}{2}$, με τιμή $h\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{401}{324}<0.$

και
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-5x+5)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}3^{x^2-5x+6}=\lim\limits_{u\to+\infty}3^u=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=+\infty$$

Θεωρούμε τα σύνολα $A_1=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και $A_2=\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Βρίσκουμε τα επιμέρους σύνολα τιμών, έχουμε

$$h\left(A_1\right)\overset{h\downarrow}{=}[h\left(\frac{5}{2}\right),\lim_{x\to\infty}h(x))=[-\frac{401}{324},+\infty) \text{ και } h\left(A_2\right)\overset{h\uparrow}{=}[h\left(\frac{5}{2}\right),\lim_{x\to\infty}h(x))=[-\frac{401}{324},+\infty).$$

Επειδή το $2\in A_1$ και $h(2)=0$, η $x=2$ ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$. Όμως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, επομένως η $x=2$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Επειδή το $3\in A_2$ και $h(3)=0$, η $x=3$ ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$. Όμως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2, επομένως η $x=3$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

Ε3. Έχουμε $f(x)=3^x$,οπότε $f(x+1)=3^{x+1}=3\cdot 3^x$.

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot3^x+5\cdot3^x-2^x}{3\cdot3^x+3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\cdot3^x-2^x}{4\cdot3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{4+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=2$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot3^x+5\cdot3^x-2^x}{3\cdot3^x+3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8\cdot3^x-2^x}{4\cdot3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{4\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}=-1$$

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=f(x)-g(x)=3^x+x^2-9x+5, x\in R$.
Η w είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R$, με $w'(x)=3^x\ln3+2x-9, x\in R$. Και η w' είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R$, με $w''(x)=3^x(\ln3)^2+2>0$.
Παρατηρούμε ότι $w(1)=w(2)=0$.
Θα δείξουμε ότι η $w(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.Έστω ότι η $w(x)=0$ έχει 3 ρίζες.
Τότε επειδή η w είναι παραγωγίσιμη στο R, είναι και συνεχής.
Ακόμα $w(\rho_1)=w(\rho_2)=w(\rho_3)=0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα **Rolle** στα διαστήματα των ριζών της η $w'(x)=0$ θα έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.
Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα **Rolle** στα διαστήματα των ριζών της w' βρίσκουμε ότι η $w''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, που είναι **άτοπο.** Άρα η $w(x)=0$ έχει ρίζες ακριβώς, οπότε οι C_f, C_g έχουν δύο κοινά σημεία τα $E(1,3)$ και $Z(2,9)$.

Ε5. Είναι $I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}dx$

Θέτοντας στο $\mathbf{I(\alpha)}$ όπου $\mathbf{x}$ το $\mathbf{-x}$ έχουμε $\mathbf{I(\alpha)=\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{x^2+1}{3^{-x}+1}(-1)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}\cdot 3^x dx.}$

Τότε , $\mathbf{2I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}dx+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}\cdot 3^x dx \Leftrightarrow}$

$$\mathbf{2I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(x^2+1\right)dx=2\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha\right)\Rightarrow I(\alpha)=\frac{\alpha^3}{3}+\alpha.}$$

ΘΕΜΑ 175

Προτείνει ο Χάρης Γ. Λάλας

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{f(0)=0}$ και

$\mathbf{F(x)=\int_0^x f(t)dt.}$

Ε1. Να εξετάσετε αν η $\mathbf{F(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Ε2. Να εξεταστεί η $\mathbf{F(x)}$ ως προς τη μονοτονία της.

Ε3. Να δείξετε ότι $\mathbf{F(x)\le 0.}$.

Ε4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{1+\int_0^{3x+1}f(t)dt=x+\int_0^{x+1}f(t)dt}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbf{(0,1)}$.

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε το $\mathbf{\int_0^x f(t)dt}$ παραγωγίσιμο στο $\mathbf{R}$, επομένως

η $\mathbf{F(x)=\int_0^x f(t)dt}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, με $\mathbf{F'(x)=f(x), x\in R.}$

Ε2. Έχουμε ότι $\mathbf{F(0)=0}$, οπότε η $\mathbf{x=0}$ λύση την εξίσωσης $\mathbf{F(x)=0}$.
Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{f(0)=0}$ και η $\mathbf{f}$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$,

Οπότε για $\mathbf{x<0\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0}$ ενώ για $\mathbf{x>0\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(x)<f(0)=0.}$

Επομένως για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε $\mathbf{F'(x)=f(x)<0}$ ενώ για κάθε $\mathbf{x<0}$ έχουμε $\mathbf{F'(x)=f(x)>0}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F΄(x)	+	0	-
F(x)	$\nearrow$	Ο.Μ	$\searrow$

Έτσι, από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η $\mathbf{F}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(-\infty,0]}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[0,+\infty)}$.
Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\mathbf{x=0}$ με τιμή $\mathbf{F(0)=0.}$

Ε3. Από το ερώτημα **(Ε2)** , έχουμε πως για κάθε $\mathbf{x\in R}$ ισχύει ότι
$\mathbf{F(x)\le F(0)\Leftrightarrow F(x)\le 0.}$

Ε4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{H(x)=1+\int_0^{3x+1}f(t)dt-x-\int_0^{x+1}f(t)dt.}$

Η $\mathbf{f(t)}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^{x+1} \mathbf{f(t)dt}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και η συνάρτηση $\int_0^{3x+1} \mathbf{f(t)dt}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, η $\mathbf{1-x}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, άρα η $\mathbf{H}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$,οπότε και συνεχής.

Ακόμα $\mathbf{H(0)=1+\int_0^1 f(t)dt-0-\int_0^1 f(t)dt=1>0}$ και

$$\mathbf{H(1)=1+\int_0^4 f(t)dt-1-\int_0^2 f(t)dt=\int_0^4 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{H(1)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt.}$$

Όμως για κάθε $\mathbf{x>0}$ έχουμε ότι $\mathbf{f(x)<0}$, οπότε $\mathbf{\int_2^4 f(x)dx<0}$. Άρα ,

$$\mathbf{H(1)=\int_2^4 f(t)dt<0.}$$

Επομένως , απο θεώρημα **Bolzano** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{H(\xi)=0}$. Επίσης $\mathbf{H'(x)=f(3x+1)-f(x+1)-1, x\in(0,1)}$.

Για κάθε $\mathbf{x\in(0,1)}$ έχουμε

$$\mathbf{x+1<3x+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x+1)>f(3x-1) \Rightarrow f(3x-1)-f(x-1)<0 \Rightarrow}$$

$\mathbf{f(3x-1)-f(x-1)-1<-1<0 \Rightarrow H'(x)<0.}$ Άρα η $\mathbf{H}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(0,1)}$, οπότε και η ρίζα μοναδική. Δηλαδή, υπάρχει μοναδικό $\mathbf{\xi\in(0,1)}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{H(\xi)=0 \Leftrightarrow 1+\int_0^{3\xi+1} f(t)dt=\xi+\int_0^{\xi+1} f(t)dt.}$$

ΘΕΜΑ 176

Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης

Ε1. Ας είναι $\mathbf{f:\Delta\to R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\mathbf{\Delta}$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\mathbf{\Delta}$. Να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι αύξουσα στο $\mathbf{\Delta}$ (αντίστοιχα φθίνουσα) όταν και μόνο όταν $\mathbf{f'(x)\geq 0}$, ($\mathbf{f'(x)\leq 0}$ αντίστοιχα) για κάθε $\mathbf{x}$ εσωτερικό σημείο του $\mathbf{\Delta}$.

Ε2. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{f,g:[0,\alpha]\to R}$ που είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν $\mathbf{\int_0^\alpha f(t)dt=\int_0^\alpha g(t)dt}$, $\mathbf{f}$ αύξουσα στο $\mathbf{[0,\alpha]}$ και $\mathbf{g}$ φθίνουσα στο $\mathbf{[0,\alpha]}$.
Να δείξετε ότι:

α. η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}, x\in(0,\alpha]$ είναι αύξουσα και η συνάρτηση

$G(x)=\dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x}$ είναι φθίνουσα.

β. ισχύει $\int_0^x f(t)dt \le \int_0^x g(t)dt$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$.

γ. για κάθε $x,y\in[0,\alpha]$ ισχύει $x\int_0^y g(t)dt \ge y\int_0^x f(t)dt$.

Λύση:

Ε1. $\Rightarrow$

Έστω οτι η f είναι αύξουσα. Τότε για κάθε $x_0, x\in\Delta$ με $x_0\ne x$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\ge 0.$

Δηλαδή $f'(x_0)\ge 0$. Όμως το x_0 τυχαίο σημείο του διαστήματος Δ, επομένως για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)\ge 0$.

$\Leftarrow$

Έστω ότι για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)\ge 0$.

Τότε για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ (όμοια αν $x_1>x_2$) έχουμε οτι:

Η f συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), οπότε από **ΘΜΤ** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Όμως $f'(x)\ge 0$, οπότε $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge 0$, συνεπώς η f είναι αύξουσα στο Δ.

Δουλεύουμε όμοια αν η f είναι φθίνουσα στο Δ.

Ε2. **α.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ οπότε η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$. Η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

Μελετάμε το πρόσημο του αριθμητή. Θέτουμε $\mathbf{H(x)=\int_0^x f(t)dt}$ με $\mathbf{x\in[0,\alpha]}$,

η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[0,\alpha]}$, οπότε η $\mathbf{H(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{[0,\alpha]}$,

από **ΘΜΤ** για την $\mathbf{H(x)}$ θα υπάρχει $\xi\in\mathbf{(0,x)}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{H'(\xi)=\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\frac{\int_0^x f(t)dt-0}{x}=f'(\xi)\Rightarrow\int_0^x f(t)dt=xf'(\xi)},$$

οπότε η παράγωγος είναι $\mathbf{F'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\dfrac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x}\ge 0}$,

διότι $\mathbf{f(\xi)\le f(x)}$ αφού ισχύει πως $\mathbf{0<\xi<x}$ με $\mathbf{f}$ αύξουσα.

Συνεπώς έχουμε πως $\mathbf{F'(x)\ge 0}$ άρα σύμφωνα με το ερώτημα (**Ε.1**) η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα στο $\mathbf{(0,\alpha]}$.

Ομοίως προκύπτει πως η $\mathbf{G}$ είναι φθίνουσα στο $\mathbf{(0,\alpha]}$.

β. Η σχέση $\mathbf{\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x g(t)dt}$ ισχύει για $\mathbf{x=0}$ ως ισότητα.

Επειδή η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα στο $\mathbf{(0,\alpha]}$ τότε θα ισχύει πως

$$\mathbf{0<x<\alpha\Rightarrow F(x)\le F(\alpha)\Leftrightarrow\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\le\frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}\ (1).}$$

Επειδή η $\mathbf{G}$ είναι φθίνουσα στο $\mathbf{(0,\alpha]}$ τότε θα ισχύει πως

$$\mathbf{0<x<\alpha\Rightarrow G(x)\ge G(\alpha)\Leftrightarrow\frac{\int_0^x g(t)dt}{x}\ge\frac{\int_0^\alpha g(t)dt}{\alpha}\ (2)}$$

και επειδή $\mathbf{\int_0^\alpha f(t)dt=\int_0^\alpha g(t)dt\Leftrightarrow\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}=\dfrac{\int_0^\alpha g(t)dt}{\alpha}\ (3)}$

λόγω των **(1)**,**(2)**,**(3)** θα έχουμε πως $\mathbf{\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\le\dfrac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}=\dfrac{\int_0^\alpha g(t)dt}{\alpha}\le\dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x}}$

$\mathbf{\Rightarrow\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}\le\dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x}\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x g(t)dt}$ για κάθε $\mathbf{x\in(0,\alpha]}$, αφού $\mathbf{x>0}$.

γ. Ζητείται να αποδειχθεί πως ισχύει $x\int_0^y g(t)dt \ge y\int_0^x f(t)dt \quad (4)$ για κάθε $x,y \in [0,\alpha]$.

Για $x=0$ ή $y=0$ ισχύει ως ισότητα.

Οπότε μένει να εξεταστεί για $0<x,y\le\alpha$.

Για $x,y>0$ η (4) $\Leftrightarrow \dfrac{x\int_0^y g(t)dt}{xy} \ge \dfrac{y\int_0^x g(t)dt}{xy} \Leftrightarrow \dfrac{\int_0^y g(t)dt}{y} \ge \dfrac{\int_0^x g(t)dt}{x} \Leftrightarrow G(y)\ge F(x)$

$0<y\le\alpha$ κι επειδή G φθίνουσα στο $[0,\alpha]$ έχουμε πως $G(y)\ge G(\alpha)$

$0<x\le\alpha$,επειδή F αύξουσα στο $[0,\alpha]$ έχουμε πως $F(x)\le F(\alpha)$

$$\int_0^\alpha f(t)dt = \int_0^\alpha g(t)dt \Leftrightarrow \frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha} = \frac{\int_0^\alpha g(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow G(\alpha)=F(\alpha)$$

έχουμε πως $G(y)\ge G(\alpha)=F(\alpha)\ge F(x)$ για κάθε $0<x,y\le\alpha$.

ΘΕΜΑ 177

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Θεωρούμε τη συνάρτηση f που έχει δεύτερη παράγωγο συνεχή στο διάστημα $[0,e]$ με $f(0)=0$.

Ε1. Να δειχθεί ότι $\int_0^e xf''(x)dx = ef'(e)-f(e)$.

Ε2. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,e)$ τέτοιο ώστε $\int_0^e xf''(x)dx = e\left[f'(e)-f'(\xi)\right]$.

Ε3. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1\in(\xi,e)$ τέτοιο ώστε $\int_0^e xf''(x)dx = ef''(\xi_1)(e-\xi)$.

Ε4. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2\in[0,e]$ τέτοιο ώστε $\int_0^x xf''(x)dx = e\xi_2 f''(\xi_2)$.

Λύση:

Ε1. $\int_0^e xf''(x)dx = \int_0^e x\left[f'(x)\right]'dx = \left[f'(x)\right]_0^e - \int_0^e f'(x)dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^e xf''(x)dx = ef'(e) - \left[f(x)\right]_0^e = ef'(e)-f(e)$$

Άρα $\int_0^e xf''(x)dx = ef'(e)-f(e)$, Οπότε, $f(e)=ef'(e)-\int_0^e xf''(x)dx$, (1).

Ε2. Η f είναι συνεχής στο $[0,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,e)$.

Από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(e)-f(0)}{e-0} \Rightarrow ef'(\xi)=f(e) \overset{(1)}{\Rightarrow} ef'(\xi)=ef'(e)-\int_0^e xf''(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^e xf''(x)dx = e[f'(e)-f'(\xi)].$$

Οπότε $(f'(e)-f'(\xi))=\dfrac{\int_0^e xf''(x)dx}{e}=\dfrac{ef'(e)-f(e)}{e}$. **(2).**

Ε3. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi,e]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ,e). Από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\xi,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=\dfrac{f'(e)-f'(\xi)}{e-\xi} \Leftrightarrow$

$$(e-\xi)f''(\xi_1)=f'(e)-f'(\xi) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (e-\xi)f''(\xi_1)=f'(e)-\frac{f(e)}{e} \Leftrightarrow$$

$$e(e-\xi)f''(\xi_1)=ef'(e)-f(e) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e(e-\xi)f''(\xi_1)=\int_0^e xf''(x)dx .$$

Ε4. Επειδή η f'' είναι συνεχής στο $[0,e]$,έχουμε ότι η $tf''(t)$ είναι συνεχής στο $[0,e]$ Άρα η συνάρτηση $\int_0^x tf''(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,e]$, συνεπώς η $g(x)=\int_0^x tf''(t)dt$ παραγωγίσιμη με $g'(x)=xf''(x)$. Η $g(x)=\int_0^x tf''(t)dt$ είναι και συνεχής στο $[0,e]$. Από **Θ.Μ.Τ** υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,e)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(e)-g(0)}{e-0} \Leftrightarrow \xi_2 f''(\xi_2)=\frac{\int_0^e tf''(t)dt-0}{e-0} \Leftrightarrow e\xi_2 f''(\xi_2)=\int_0^e xf''(x)dx.$$

ΘΕΜΑ 178

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Ε1. Η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την εφαπτομένη της στο $A(1,g(1))$.

Ε2. Αν $\alpha>1$ τότε $(\alpha-1)\int_0^1 f(t)dt<\int_1^\alpha f(t)dt.$

Ε3. Για κάθε $x \geq 1$ ισχύουν:

α. $\int_1^x\left[\int_1^u f(t)dt\right]du \ge (x-1)^2$.

β. $\int_1^x (x-t)f(t)dt \ge (x-1)^2$.

Λύση:

Ε1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R είναι και συνεχής. Οπότε έχουμε οτι η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R. Άρα η g παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R, έχουμε ότι η g' είναι παραγωγίσιμη στο R με $g''(x)=f'(x)$.
Όμως έχουμε πως για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)>0$, επομένως για κάθε $x\in R$ ισχύει $g''(x)>0$. Επομένως η g είναι κυρτή στο R.

Επίσης έχουμε $g'(1)=f(1)=2$ και $g(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,g(1))$ είναι η $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$.

Ε2. Για κάθε $\alpha>1$ η ζητούμενη ανισότητα γίνεται:

$$(\alpha-1)\int_0^1 f(t)dt<\int_1^\alpha f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)dt<\frac{\int_1^\alpha f(t)dt}{\alpha-1}\Leftrightarrow \int_0^1 g'(t)dt<\frac{\int_1^\alpha g'(t)dt}{\alpha-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [g(t)]_0^1<\frac{[g(t)]_1^\alpha}{a-1}\Leftrightarrow \frac{g(1)-g(0)}{1-0}<\frac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}.$$

Η g ως παραγωγίσιμη στο R είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$, $[1,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στα $(0,1),(1,\alpha)$.

Έτσι σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ** υπάρχουν $p\in(0,1)$ και $q\in(1,\alpha)$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$g'(p)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0} \quad \text{και} \quad g'(q)=\frac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}.$$

Η g' είναι γνησίως αύξουσα στο R, αφού $g''(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Τότε, $p<q \overset{g'\uparrow}{\Rightarrow} g'(p)<g'(q) \Rightarrow \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}<\dfrac{g(\alpha)-g(1)}{\alpha-1}$.

Ε3. **α.** Επειδή η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g είναι πάντα κάτω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο επάφής. Δηλάδή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)\geq 2x-2 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt\geq 2(x-1),(1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du-(x-1)^2, x\in\mathbb{R}.$

Έχουμε πως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $(x-1)^2$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,επομένως η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=\int_1^x f(t)dt-2(x-1)=g(x)-2(x-1)$. Συνεπώς για κάθε $x\geq 1$ έχουμε $h'(x)\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ακόμα $h(1)=0$, οπότε για κάθε $x\geq 1$ έχουμε

$$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du-(x-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow \int_1^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du\geq (x-1)^2.$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt-(x-1)^2, x\in\mathbb{R}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής. Οπότε έχουμε ότι η $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ακόμα η $\int_1^x tf(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $x\int_1^x f(t)dt$ και η $(x-1)^2$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$H'(x)=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)-2(x-1)=\int_1^x f(t)dt-2(x-1)\geq 0, \text{ από } (1).$$

Επομένως για κάθε $x\geq 1$ έχουμε $H'(x)\geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα η H είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε για κάθε $x\geq 1$ έχουμε

$$H(x)\ge H(1)\Leftrightarrow H(x)\ge 0\Leftrightarrow x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt-(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt\ge (x-1)^2.$$

ΘΕΜΑ 179

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\int_3^{x-2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t}\right)dt$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της D_f.

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε3. Να εξετάσετε αν η f έχει σημεία καμπής.

Ε4. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in D_f$ ισχύει $\int_1^3\sqrt{t^2+t}\,dt\ge f(x)+2\sqrt{2}$.

Ε5. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt{\xi^2-3\xi+2}\ge\frac{2\sqrt{2}+f(x)}{2}$$

Λύση:

Ε1. $f(x)=\int_3^{x-2}(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t})dt.$

Για να ορίζεται η $\sqrt{t^2+t}$ πρέπει $t^2+t\ge 0\Leftrightarrow t\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της f.

Έχουμε ότι η $\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$. Επειδή $3\in[0,+\infty)$, πρέπει και το $(x-2)\in[0,+\infty)$ δηλαδή $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=[2,+\infty)$.

Ακόμα $f(x)=\int_3^{x-2}(\sqrt{2}-\sqrt{t^2+t})dt=\left[\sqrt{2}t\right]_3^{x-2}-\int_3^{x-2}\sqrt{t^2+t}\,dt\Leftrightarrow$

$$f(x)=\sqrt{2}(x-2)-3\sqrt{2}-\int_3^{x-2}\sqrt{t^2+t}\,dt=\sqrt{2}x-5\sqrt{2}-\int_3^{x-2}\sqrt{t^2+t}\,dt,x\ge 2.$$

Ε2. Επειδή η $\sqrt{t^2+t}$ είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και η $x-2$ παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$, έχουμε ότι η συνάρτηση $\int_3^{x-2}\sqrt{t^2+t}\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$.

Επίσης η $\sqrt{2}(x-2)$ παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$, οπότε η f παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με $f'(x)=\sqrt{2}-\sqrt{(x-2)^2+x-2}=\sqrt{2}-\sqrt{x^2-3x+2},x\ge 2$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}-\sqrt{x^2-3x+2}=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=2\Leftrightarrow x^2-3x=0\overset{x\ge 2}{\Leftrightarrow}x=3$$

Ακόμα $f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{x^2-3x+2}>0 \Leftrightarrow x\in[2,3)$

Επομένως , από το διπλανό πίνακα, έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$.

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Μ	$\nearrow$	

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=3$ με τιμή

$$f(3)=-2\sqrt{2}-\int_3^1\sqrt{t^2+t}dt=-2\sqrt{2}+\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt .$$

Σημειώση: Το ακρότατο δεν μπορεί να υπολογιστει, σε αλλή περίπτωση,πρέπει να βρεθεί.

Ε3. $f''(x)=-\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$. Για κάθε $x\in[2,+\infty)$ έχουμε ότι $f''(x)<0$.

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$. Οπότε η f δεν έχει σημεία καμπής.

Ε4. $f(3)=-2\sqrt{2}+\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt$ και $f'(3)=0$. Οπότε η εφαπτομένη στο σημείο $A(3,f(3))$ είναι $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=f(3)\Leftrightarrow y=-2\sqrt{2}+\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt$

Επειδή η f κοίλη, έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται πάντα πάνω από τη γραφική παράσταση της f. Άρα

$$-2\sqrt{2}+\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt\ge f(x)\Leftrightarrow \int_1^3\sqrt{t^2+t}dt\ge f(x)+2\sqrt{2} .$$

Ε5. Η f συνεχής στο $[3,5]$, παραγωγίσιμη στο $(3,5)$. Οπότε από **ΘΜΤ** υπάρχει $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{0+2\sqrt{2}-\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt}{2}$$

Όμως $f'(\xi)=\sqrt{2}-\sqrt{\xi^2-3\xi+2}$ οπότε,

$$\sqrt{2}-\sqrt{\xi^2-3\xi+2}=\frac{2\sqrt{2}-\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}-2\sqrt{\xi^2-3\xi+2}=2\sqrt{2}-\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\xi^2-3\xi+2}=\frac{\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt}{2}.$$ Όμως από **(Ε4)** έχουμε $\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt\geq f(x)+2\sqrt{2}$,άρα

$$\sqrt{\xi^2-3\xi+2}=\frac{\int_1^3\sqrt{t^2+t}dt}{2}\geq\frac{f(x)+2\sqrt{2}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 180

Προτείνει ο Χάρης Γ. Λάλας

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ και η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq x$. Να δείξετε ότι :

Ε1. $|z_2|=\frac{1}{2}$.

Ε2. Η εξίσωση $f(x)=2020$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

Ε3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_0^x\left|z_1t+\frac{z_2}{2}\right|dt\geq\frac{x}{4}$.

Λύση:

Ε1. Επειδή η $|z_1t+z_2|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\cdot|2z_1x+z_2|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x\geq 0=g(0)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε από θεώρημα **Fermat**, έχουμε ότι για το εσωτερικό σημείο $x_0=0$ ισχύει $g'(0)=0$. Όμως, $g'(x)=f'(x)-1=2|z_1\cdot 2x+z_2|-1$ άρα

$g'(0)=0\Leftrightarrow 2|z_2|-1=0\Leftrightarrow|z_2|=\frac{1}{2}$.

Ε2. Επειδή $f'(x)=2|z_1\cdot 2x+z_2|>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό.

Ισχύει $f(x)\geq x>0\Leftrightarrow 0<\frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{x}$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ όμως $f(x)\geq x>0$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

και $f(0)=\int_0^0 |z_1\cdot t+z_2|dt=0.$

Άρα $f(\Delta)=(0,+\infty)$, επειδή το $2020\in(0,+\infty)$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, **Θ.Ε.Τ,** για τη συνεχή συνάρτηση f, υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2020.$

Ε3. Έχουμε, $f(x)=\int_0^{2x}|z_1\cdot t+z_2|dt\geq x$

κάνουμε αλλαγή μεταβλητής του ολοκληρώματος, θέτουμε $t=2u$ άρα $dt=2du$ και τα άκρα της ολοκλήρωσης γίνονται $t_1=2x\Rightarrow u_1=x$ και $t_2=0\Rightarrow u_2=0$, άρα

$f(x)=\int_0^{2x}|z_1\cdot t+z_2|dt=2\cdot\int_0^{x}|z_1\cdot 2u+z_2|du.$ Όμως για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\geq x,$

οπότε $2\cdot\int_0^{x}|z_1\cdot 2u+z_2|du\geq x\Leftrightarrow 4\cdot\int_0^{x}\left|z_1\cdot u+\frac{z_2}{2}\right|du\geq x\Leftrightarrow \int_0^{x}\left|z_1\cdot u+\frac{z_2}{2}\right|du\geq\frac{x}{4}$ για κάθε $x\in R$ που έπεται το ζητούμενο.