

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού τους γινομένου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(μονάδες 5)

B. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ είναι η προβολή του διανύσματος \vec{v} πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

(μονάδες 10)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα των εξετάσεων τη λέξη «**Σωστό**» αν η πρόταση είναι σωστή ή «**Λάθος**» αν η πρόταση είναι λανθασμένη

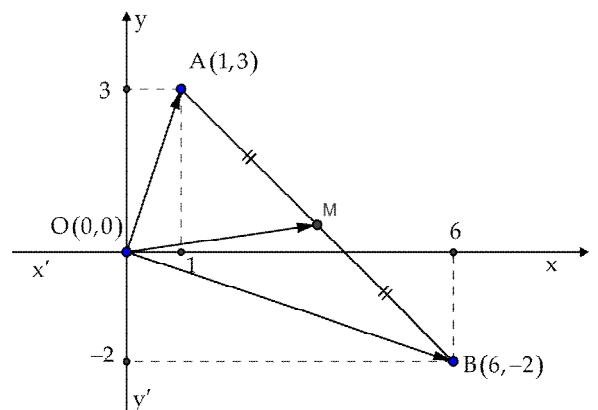
1. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα τότε για το εσωτερικό τους γινόμενο ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
2. Η απόσταση d του σημείου $M(x_1, y_1)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$ δίνεται από τον τύπο: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$
3. Έστω (C) κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2, \rho > 0$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο του. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του κύκλου στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ δίνεται από το τύπο: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
4. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$. Τότε ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta} = (-B, A)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στην (ε) είναι το $\vec{\eta} = (-A, -B)$.
5. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και $\hat{\omega} = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

(μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(6,-2)$. Αν M είναι το μέσο του AB τότε

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M
(μονάδες 5)
2. Να βρεθεί ο συντελεστής του διανύσματος \vec{OM}
(μονάδες 8)
3. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OAB$ όπου O είναι η αρχή του ορθοκανονικού συστήματος
(μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι $(\varepsilon_\lambda): y = (\lambda - 1)x + 4$ και $(\varepsilon'_\lambda): (3 - \lambda)x - y + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να δειχθεί ότι:

a) Οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

(μονάδες 3)

b) Οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο B του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

(μονάδες 7)

2.

a) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

(μονάδες 5)

b) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο 2a):

i) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που προκύπτουν από τις (ε_λ) και (ε'_λ)

(μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές τους στις ευθείες αυτές

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0: (1)$, με $k \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C_k) για κάθε $k \in \mathbb{R}$ με $k \neq \frac{1}{2}$ και να βρείτε συναρτήσει του k το κέντρο του και την ακτίνα του

(μονάδες 10)

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων (C_k) για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

(μονάδες 7)

3. Να αποδείξετε ότι οι (C_k) διέρχονται από σταθερό σημείο M του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες

(μονάδες 8)

Καλή εισηγή

Λ. Αιδηψού

Τρίτη 24 Μαΐου 2011

Ο Διευθυντής

Ο εισηγητής

Στάθης Κούτρας

Προτεινόμενες λύσεις

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού τους γινομένου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(μονάδες 5)

Απάντηση:

α) Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τον αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$

β) Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

B. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{v}$ δύο διανύσματα με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, όπου $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ είναι η προβολή του διανύσματος \vec{v} πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

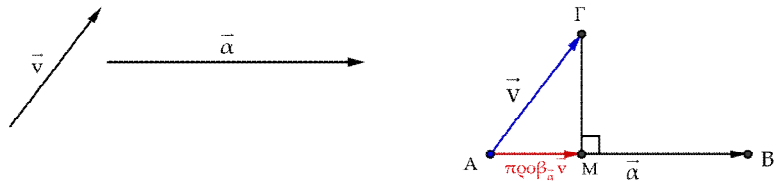
(μονάδες 10)

Απόδειξη

$$i) \quad \text{Αν } \vec{v} = \vec{0} \text{ τότε η σχέση } \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \vec{0} \stackrel{\text{εξ ορισμού}}{=} 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} \stackrel{\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \vec{0}}{=} \vec{\alpha} \cdot \vec{0} \stackrel{\text{εξ ορισμού}}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = 0}$$

ii) Αν και $\vec{v} \neq \vec{0}$ τότε:

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα θεωρούμε διάνυσμα $\overline{AB} = \vec{\alpha}$, $\overline{AG} = \vec{v}$ και $GM \perp AB$ οπότε είναι $\overline{AM} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$ και



$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AG} = \overline{AB} \cdot (\overline{AM} + \overline{MG}) \stackrel{\text{επιμεριστική}}{=} \overline{AB} \cdot \overline{AM} + \overline{AB} \cdot \overline{MG} \stackrel{\overline{AB} \perp \overline{MG} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{MG} = 0}{=} \overline{AB} \cdot \overline{AM} + 0$$

$$\stackrel{\overline{AB} = \vec{\alpha}, \overline{AM} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}}{\Rightarrow} \boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}}$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα των εξετάσεων τη λέξη «**Σωστό**» αν η πρόταση είναι σωστή ή «**Λάθος**» αν η πρόταση είναι λανθασμένη

6. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο διανύσματα τότε για το εσωτερικό τους γινόμενο ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ (Λάθος)

7. Η απόσταση d του σημείου $M(x_1, y_1)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0$ ή $B \neq 0$ δίνεται από τον τύπο: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ (Λάθος)

8. Έστω (C) κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2, \rho > 0$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο του. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του κύκλου στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ δίνεται από το τύπο: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ (Σωστό)

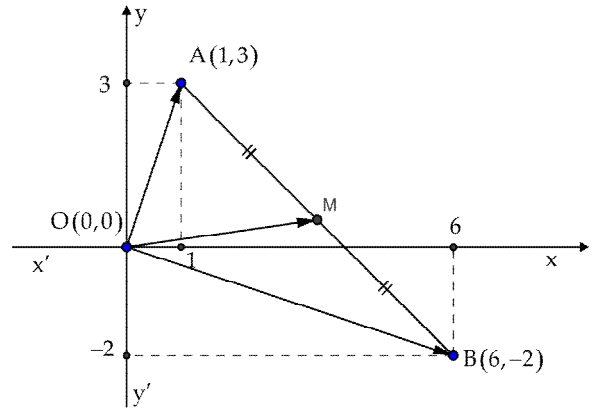
9. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0, A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$. Τότε ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta} = (-B, A)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στην (ε) είναι το $\vec{\eta} = (-A, -B)$. (Σωστό)
10. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και $\hat{\omega} = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι η γωνία που σχηματίζουν τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ (Σωστό)

(μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(6,-2)$. Αν M είναι το μέσο του AB τότε

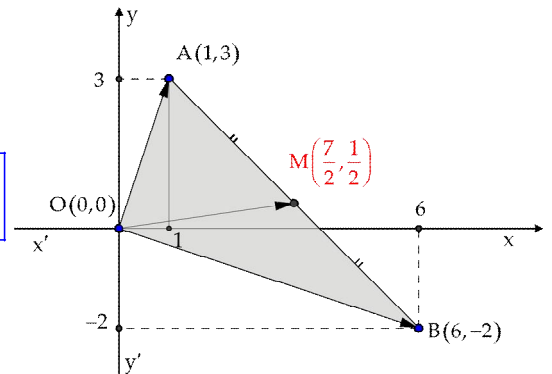
4. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M (μονάδες 5)
5. Να βρεθεί ο συντελεστής του διανύσματος \overline{OM} (μονάδες 8)
6. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OAB$ όπου O είναι η αρχή του ορθοκανονικού συστήματος (μονάδες 12)



Λύση

1. Αν $M(x_M, y_M)$ τότε είναι γνωστό ότι:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1+6}{2} \\ y_M = \frac{3+(-2)}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$



2. Επειδή

$$M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overline{OM} = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda_{\overline{OM}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\overline{OM}} = \frac{1}{7}}$$

3. Είναι $A(1,3) \Rightarrow \overline{OA} = (1,3)$ και $B(6,-2) \Rightarrow \overline{OB} = (6,-2)$ οπότε

$$\det(\overline{OA}, \overline{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 6 \Rightarrow \dots \det(\overline{OA}, \overline{OB}) = -20 \quad \text{και}$$

$$(\text{OAB}) = \frac{1}{2} |\det(\overline{OA}, \overline{OB})| \stackrel{\det(\overline{OA}, \overline{OB}) = -20}{\Rightarrow} (\text{OAB}) = \frac{1}{2} |-20| \Rightarrow \boxed{(\text{OAB}) = 10\tau, \mu}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι $(\varepsilon_\lambda): y = (\lambda - 1)x + 4$ και $(\varepsilon'_\lambda): (3 - \lambda)x - y + \lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

3. Να δειχθεί ότι:

c) Οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

Λύση

Ισχύει: $4 = (\lambda - 1) \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow \dots 4 = 4$ δηλαδή οι συντεταγμένες του $A(0,4)$ επαληθεύουν την εξίσωση της $(\varepsilon_\lambda): y = (\lambda - 1)x + 4$ για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το σημείο $A(0,4)$

(μονάδες 3)

d) Οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από σταθερό σημείο B του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

Λύση

Θεωρούμε την εξίσωση της (ε'_λ) ως προς λ . Έχουμε:
 $(3 - \lambda)x - y + \lambda = 0 \Leftrightarrow 3x - \lambda x - y + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda x - \lambda = 3x - y \Leftrightarrow \boxed{(x - 1) \cdot \lambda = 3x - y} : (1)$

Εξετάζουμε αν υπάρχει (x_0, y_0) ώστε η (1) να είναι ταυτότητα ως προς λ .

Για να είναι η (1) ταυτότητα ως προς λ πρέπει και αρκεί

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου } \boxed{B(1,3)}$$

επαληθεύουν την εξίσωση της (ε'_λ) για κάθε τιμή του λ οπότε οι ευθείες (ε'_λ) διέρχονται από το σταθερό σημείο $\boxed{B(1,3)}$

(μονάδες 7)

4.

c) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

(μονάδες 5)

Λύση

Για να είναι οι ευθείες παράλληλες (αν έχουν συντελεστές διεύθυνσης) πρέπει να είναι ίσοι.

Η ευθεία $(\varepsilon_\lambda): y = (\lambda - 1)x + 4$ είναι της μορφής $y = ax + b$ οπότε έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_\lambda} = a \Rightarrow \boxed{\lambda_{\varepsilon_\lambda} = \lambda - 1}$ και η $(\varepsilon'_\lambda): (3 - \lambda)x - y + \lambda = 0$ είναι της μορφής

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 3 - \lambda, B = -1 \neq 0$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_{\varepsilon'_\lambda} = -\frac{A}{B} \stackrel{A=3-\lambda, B=-1}{\Rightarrow} \lambda_{\varepsilon'_\lambda} = -\frac{3 - \lambda}{-1} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\varepsilon'_\lambda} = 3 - \lambda}$. Οπότε για να είναι οι ευθείες παράλληλες

πρέπει: $\lambda_{\varepsilon_\lambda} = \lambda_{\varepsilon'_\lambda} \Leftrightarrow \lambda - 1 = 3 - \lambda \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

d) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο 2a):

iii) Να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ευθειών που προκύπτουν από τις (ε_λ) και (ε'_λ)

(μονάδες 7)

Λύση

Για $\lambda = 2$ έχουμε: $(\varepsilon_2): y = x + 4$ και $(\varepsilon'_2): -x - y + 2 = 0$. Για να βρούμε τη μεταξύ τους απόσταση θεωρούμε το σημείο $A(0,4) \in (\varepsilon_2)$ (αφού για κάθε λ πραγματικό οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το $A(0,4)$ όπως δείξαμε στο 1a) και βρίσκουμε την απόσταση του από την (ε'_2) . Αν με $d(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)$ συμβολίσουμε την απόσταση των $(\varepsilon_2), (\varepsilon'_2)$ και $d(A, \varepsilon'_2)$ την απόσταση του $A(0,4)$ από την (ε'_2) τότε προφανώς

$$d(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) = d(A, \varepsilon'_2) = \frac{|0 - 4 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{d(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) = \sqrt{2}}$$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές τους στις ευθείες αυτές

(μονάδες 3)

Λύση

Αν E είναι το ζητούμενο εμβαδόν προφανώς είναι

$$E = [d(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)]^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow \boxed{E = 2\tau.μ}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4κx - 2y + 4κ = 0 : (1)$, με $κ \in \mathbb{R}$

4. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο $(C_κ)$ για κάθε $κ \in \mathbb{R}$ με $κ \neq \frac{1}{2}$ και να βρείτε συναρτήσει του $κ$ το κέντρο του και την ακτίνα του

(μονάδες 10)

Λύση

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = -4κ, B = -2, \Gamma = 4κ$ οπότε έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4κ)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 4κ = 16κ^2 + 4 - 16κ = 4(4κ^2 - 4κ + 1) = 4\left(κ - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \quad \text{για}$$

κάθε $κ \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ οπότε η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \xrightarrow{A=-4κ, B=-2} \boxed{K = (2κ, 1)} \quad \text{και} \quad \text{ακτίνα}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \xrightarrow{A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\left(κ - \frac{1}{2}\right)^2} \rho = \frac{\sqrt{4\left(κ - \frac{1}{2}\right)^2}}{2} \Rightarrow \rho = \frac{2\left|κ - \frac{1}{2}\right|}{2} \Rightarrow \boxed{\rho = \left|κ - \frac{1}{2}\right|}$$

5. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων (C_κ) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(μονάδες 7)

Λύση

Επειδή $y_\kappa = 1$ σταθερό τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση $y = 1$ εξαιρουμένου του σημείου $(1,1)$ που προκύπτει από το $K = (2\kappa, 1)$ για $\kappa = \frac{1}{2}$

6. Να αποδείξετε ότι οι (C_κ) διέρχονται από σταθερό σημείο M του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες

(μονάδες 8)

Λύση

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει ζεύγος (x_0, y_0) (το οποίο θα αποτελεί και τις συντεταγμένες του σταθερού σημείου M από το οποίο θα διέρχονται όλοι οι (C_κ) ώστε η εξίσωσή τους να έχει λύση για κάθε επιτρεπτή τιμή της παραμέτρου κ . Έχουμε:

$$x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2y + 4\kappa = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 4\kappa x - 4\kappa \Leftrightarrow 4(x-1)\kappa = x^2 + y^2 - 2y \quad (2).$$

Για να έχει η (2) λύσεις για κάθε $\kappa \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (δηλαδή άπειρες λύσεις) πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 4(x-1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1) \text{ άρα οι κύκλοι}$$

(C_κ) διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(1,1)$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Καλό καλοκαίρι

Στάθης Κούτρας