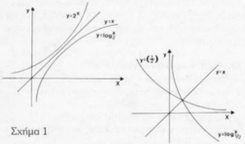
Πόσο καλά έχουμε κατανοήσει την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση;

Μπάμπης Τουμάσης

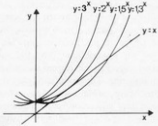
Μερικές φορές, όταν οι εμπειρίες μας σχετικά με μια έννοια είναι περιορισμένες και δεν καλύπτουν όλες τις πλευρές της, δημιουργούνται παρανοήσεις και εσφαλμένες εντυπώσεις οι οποίες περιορίζουν τη δυνατότητα πλήρους κατανόησης και αξιοποίησης της έννοιας αυτής. Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μια τέτοια περίπτωση που έχει σχέση με την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση και τις ιδιότητές τους. Ένα ερώτημα που είναι πιθανόν να υποβληθεί σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές σε μια τάξη μαθηματικών Γ΄ Λυκείου –και έχει στην πραγματικότητα υποβληθεί– είναι το εξής:

"Πόσα κοινά σημεία έχουν άραγε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = \log_a x$;" Η πιο συνηθισμένη απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι "κανένα" ή "ένα". Στην απάντηση αυτή οδηγείται κάποιος από τα παραπλανητικά σχήματα που περιλαμβάνονται συνήθως στα διάφορα βιβλία σχετικά με τις δυο αυτές συναρτήσεις, όπως, για παράδειγμα, δείχνει το σχήμα 1.



Σχήμα 1

Το γεγονός ότι δε δίνεται έμφαση στον τρόπο που μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών συναρτήσεων γις τις διάφορες τιμές του α ($a > 0$, $a \neq 1$), καλλιεργεί εσφαλμένες εντυπώσεις σχετικά με τη συμπεριφορά τους. Το σχήμα 2 δείχνει πως μεταβάλλεται, για παράδειγμα, η εκθετική συνάρτηση $y = a^x$ για τις διάφορες τιμές του $a > 1$. Όσο η τιμή του α μεγαλώνει, τόσο η γραφική παράσταση πλησιάζει τον άξονα y΄y. Για τιμή του α πολύ κοντά στο 1 η γραφική παράσταση φαίνεται να τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = x$ σε δυο σημεία. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι οι δυο αυτές συναρτήσεις, η εκθετική και η λογαριθμική, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Σχήμα 2

Παρακάτω θα απαντήσουμε στο ενδιαφέρον αυτό ερώτημα επιστρατεύοντας όλα σχεδόν τα βασικά εργαλεία της σχολικής Ανάλυσης.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπο $F(x) = a^x - x$ και $G(x) = \log_a x - a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αρχικά θα διακρίνουμε δυο βασικές περιπτώσεις οι οποίες επηρεάζουν τη μονοτονία της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης, δηλαδή, $a > 1$ και $a < 1$.

- $a > 1$

Στην περίπτωση αυτή θα αποδείξουμε ότι τα κοινά σημεία των $y = a^x$ και $y = \log_a x$ συμπίπτουν με τα κοινά σημεία των $y = a^x$ και $y = x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$. Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι οι ρίζες των F και G συμπίπτουν στο $(0, +\infty)$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_1 > 0$ είναι μια ρίζα της F, δηλαδή, $a^{x_1} = x_1$ (1).

Τότε $G(x_1) = \log_a x_1 - a^{x_1} \overset{(1)}{=} \log_a a^{x_1} - a^{x_1} = x_1 - a^{x_1} \overset{(1)}{=} 0$.

Αντιστρόφως: Έστω $x_1 > 0$ είναι μια ρίζα της G, δηλαδή, $\log_a x_1 = a^{x_1}$ (2). Τότε από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι $x_1 = a^{a^{x_1}}$ (3).
Εάν $a^{x_1} > x_1$, αφού $a > 1$, θα έχουμε ότι $a^{a^{x_1}} > a^{x_1}$ απ' όπου με βάση την (3) έχουμε: $x_1 > a^{x_1}$, άτοπο. Ομοίως εάν $a^{x_1} < x_1$, τότε $a^{a^{x_1}} < a^{x_1}$ απ' όπου με βάση την (3) έχουμε: $x_1 < a^{x_1}$, άτοπο.

Επομένως, $a^{x_1} = x_1$, δηλαδή $F(x_1) = 0$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την F στο $(0, +\infty)$.

$F'(x) = a^x \ln a - 1$. Εάν ρ είναι μια ρίζα της $F'(x) = 0$, τότε θα έχουμε $a^\rho \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a^\rho = \dfrac{1}{\ln a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \rho \ln a = \ln \frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow \rho = \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a}.$$

Οπότε για $x > \rho$, $F'(x) > 0$ και για $x < \rho$, $F'(x) < 0$. Επομένως η F για $x = \rho$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $F(\rho)$.

Εάν $F(\rho) > 0$ τότε η γραφική παράσταση της F δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ και επομένως η F δεν έχει ρίζες. Αυτό συμβαίνει συγκεκριμένα όταν $a^\rho - \rho > 0$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a}} > \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a} \ln a > \ln \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1/\ln a) > \ln \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln a} > \frac{\ln(1/\ln a)}{\ln a} \Leftrightarrow 1 > \ln(1/\ln a)$$

$$\Leftrightarrow e > \frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow \ln a > \frac{1}{e} \Leftrightarrow a > e^{\frac{1}{e}}.$$

Εάν $F(\rho) = 0 \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{e}}$, τότε η F έχει μια ρίζα, την e, αφού $\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$.

Εάν $F(\rho) < 0 \Leftrightarrow a < e^{\frac{1}{e}}$, η F έχει ελάχιστη τιμή για $x = \rho$ την $F(\rho) < 0$. Επειδή $F(0) = 1 > 0$ και $F(\rho) < 0$, σύμφωνα με το Θ. Bolzano η F έχει τουλάχιστο μία ρίζα x_1 στο $(0, \rho)$, η οποία θα είναι και μοναδική αφού η F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

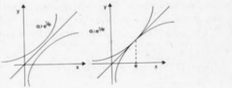
Για $x \in (\rho, +\infty)$ έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(a^x - x\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{a^x}{x} - 1\right) \quad (1)$$

Είναι όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x \ln a}{1} = +\infty$ (2) οπότε από (1) και (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty\,(+\infty - 1) = +\infty$

Σύμφωνα πάλι με το Θ. Bolzano η F θα έχει στο διάστημα $(\rho, +\infty)$ μια τουλάχιστο ρίζα, τη x_2, η οποία θα είναι και μοναδική αφού η F στο διάστημα αυτό είναι γν. αύξουσα.

Επειδή $F(e) = a^e - e < \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e - e = e - e = 0$, $x_1 \in (0, e)$, οπότε $x_1 < e < x_2$. Στο σχήμα 3 φαίνονται τα κοινά σημεία και στις τρεις περιπτώσεις.



Σχήμα 3

• $0 < a < 1$

Στην περίπτωση αυτή θα αρχίσουμε από τη μελέτη της μονοτονίας της G στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Έχουμε $G'x = \dfrac{1}{x\ln a} - a^x \ln a = \dfrac{1 - xa^x(\ln a)^2}{x\ln a}$.

Ισχύει $G'(x) \le 0 \Leftrightarrow 1 - xa^x(\ln a)^2 \ge 0 \Leftrightarrow xa^x(\ln a)^2 \le 1$

$$\Leftrightarrow xa^x \le \frac{1}{(\ln a)^2} \quad (1)$$

Θωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = xa^x$ l$(0, +\infty)$. Τότε $P'(x) = a^x + xa^x \ln a = a^x(1 + x\ln a)$. Ισχύει $P'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln a \ge 0 \Leftrightarrow x\ln a \ge -1 \Leftrightarrow x \le \dfrac{-1}{\ln a}$.

Ομοίως $P'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{-1}{\ln a}$.

Επομένως η P για $x = \dfrac{-1}{\ln a}$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή

$$P\left(\frac{-1}{\ln a}\right) = \frac{-1}{\ln a} \cdot a^{\frac{-1}{\ln a}} = \frac{-1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^{\frac{+1}{\ln a}}} =$$

$$= \frac{-1}{\ln a\, a^{\frac{+1}{\ln a}}} = \frac{-1}{e\ln a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{\ln a}} = y, y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = \ln y \Leftrightarrow \ln y = 1 \Leftrightarrow y = e\right)$$

Για να ισχύει η (1) θα πρέπει $xa^x \le \dfrac{-1}{e\ln a} \le \dfrac{1}{(\ln a)^2}$.

Αλλά $\dfrac{-1}{e\ln a} \le \dfrac{1}{(\ln a)^2} \Leftrightarrow \dfrac{-(\ln a)^2}{e\ln a} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{-\ln a}{e} \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln a \ge -e \Leftrightarrow a \ge e^{-e}$.

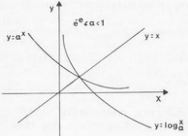
Επομένως, για $e^{-e} \le a < 1$ ισχύει $G'(x) < 0$ και η G είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Ισχύει επίσης ότι $\lim\limits_{x\to0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\log_a^x - a^x\right) =$ $= +\infty - 1 = +\infty$. Θα υπάρχει λοιπόν κάποιο x, πολύ κοντά στο 0, τέτοιο ώστε $G(x) > 0$. Και επειδή $G(1) = -a < 0$, σύμφωνα με το Θ. Bolzano η G θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$, η οποία θα είναι και μοναδική αφού στο διάστημα αυτό είναι γν. φθίνουσα.

Ειδικά για $a = e^{-e}$, η μοναδική αυτή ρίζα θα είναι η $\frac{1}{e}$, αφού $G\left(\frac{1}{e}\right) = \log_{e^{-e}}\frac{1}{e} - \left(e^{-e}\right)^{\frac{1}{e}} =$

$$= -\log_{e^{-e}} e - e^{-1} = \frac{-\ln e}{\ln e^{-e}} - \frac{1}{e} = \frac{-1}{-e} - \frac{1}{e} = 0$$

Στο Σχήμα 4 φαίνεται το μοναδικό κοινό σημείο στην περίπτωση όπου $e^{-e} \leq a < 1$.



Σχήμα 4

Μας απομένει να μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία $0 < a < e^{-e}$. Παρατηρούμε ξανά ότι $G'(x) \leq 0 \Leftrightarrow xa^x - \frac{1}{(\ln a)^2} \leq 0$. Ισχύει επίσης ότι $\lim\limits_{x\to0^+} P(x) = \lim\limits_{x\to0^+} xa^x = 0$. Επομένως, υπάρχει ένας αριθμός λ, πολύ κοντά στο 0, με $0 < \lambda < \frac{-1}{\ln a}$, τέτοιος ώστε $\lambda a^\lambda < \frac{1}{(\ln a)^2}$ (1).

Ομοίως, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} xa^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x \ln\frac{1}{a}}$ υπάρχει ένας αριθμός μ, αρκετά μεγάλος με $\frac{-1}{\ln a} < \mu$, τέτοιος ώστε $\mu a^\mu < \frac{1}{(\ln a)^2}$ (2)

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση με τύπο $K(x) = xa^x - \frac{1}{(\ln a)^2}$ στο διάστημα $\left[\lambda, \frac{-1}{\ln a}\right]$. Για τη συνάρτηση αυτή ισχύουν $K(\lambda) = \lambda a^\lambda - \frac{1}{(\ln a)^2} \overset{(1)}{<} 0$

και $K\left(-\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{-1}{\ln a} a^{-\frac{1}{\ln a}} - \frac{1}{(\ln a)^2} =$

$= \frac{-1}{e\ln a} - \frac{1}{(\ln a)^2} = \frac{-\ln a - e}{e(\ln a)^2} > 0$. $\Big($Γιατί από $a < e^{-e}$ είναι $\ln a < -e\ln e$ οπότε $-e - \ln a > 0\Big)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ακριβώς μια ρίζα, ρ_1 της K με $\lambda < \rho_1 < -\frac{1}{\ln a}$ και $K(\rho_1) = 0$ (η K είναι γν. αύξουσα στο διάστημα $(0, -1/\ln a)$).

Θεωρούμε παρομοίως τη συνάρτηση με τύπο $K(x) = xa^x - \frac{1}{(\ln a)^2}$ στο διάστημα $\left[\frac{-1}{\ln a}, \mu\right]$.

Ισχύει $K(\mu) = \mu a^\mu - \frac{1}{(\ln a)^2} \overset{(2)}{<} 0$ και $K\left(-\frac{1}{\ln a}\right) > 0$.

Άρα πάλι σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ακριβώς μια ρίζα ρ_2 με $-\frac{1}{\ln a} < \rho_2 < \mu$ και $K(\rho_2) = 0$.

Επειδή $\rho_1 < -\frac{1}{\ln a} < \rho_2$ και $K\left(-\frac{1}{\ln a}\right) > 0$, θα ισχύει ότι $K(x) < 0 \Leftrightarrow x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$ και $K(x) > 0 \Leftrightarrow \rho_1 < x < \rho_2$. Δηλαδή, $G'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \rho_1$, ή $x > \rho_2$ και $G'(x) > 0 \Leftrightarrow \rho_1 < x < \rho_2$, όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της K.

Θα ξαναγυρίσουμε τώρα πάλι στην $F(x) = a^x - x$ $[0, +\infty)$, $0 < a < 1$. Ισχύει $F'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$, επομένως η F είναι γν. φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $F(0) = 1 > 0$ και $F(1) = a - 1 < 0$. Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano η F έχει μια ακριβώς ρίζα x_2 στο $(0, 1)$ με $F(x_2) = 0 \Leftrightarrow a^{x_2} = x_2$ (3). Η ρίζα όμως αυτή θα είναι και ρίζα της G, γιατί

$$G(x_2) = \log_a x_2 - a^{x_2} \overset{(3)}{=} \log_a a^{x_2} = x_2 - x_2 = 0.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η G έχει άλλες δυο ρίζες.

Ισχύει $0 < \rho_1 < \frac{-1}{\ln a} < \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1^2 < \frac{1}{(\ln a)^2} < \rho_2^2$ (4)

Αλλά $\rho_1 a^{\rho_1} = \frac{1}{(\ln a)^2}$ (5) και

$\rho_2 a^{\rho_2} = \frac{1}{(\ln a)^2}$ (6) (ορισμός των ρ_1, ρ_2).

Από (4) και (5) έχουμε $\rho_1^2 < \rho_1 a^{\rho_1} \Leftrightarrow \rho_1 < a^{\rho_1}$ $\Leftrightarrow a^{\rho_1} - \rho_1 > 0 \Leftrightarrow F(\rho_1) > 0$.

Από (4) και (6) έχουμε $\rho_2^2 < \rho_2 a^{\rho_2} \Leftrightarrow \rho_2 > a^{\rho_2}$ $\Leftrightarrow a^{\rho_2} - \rho_2 < 0 \Leftrightarrow F(\rho_2) < 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η F στο $[\rho_1, \rho_2]$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Αυτή πρέπει να είναι και η μοναδική της ρίζα, η x_2. Επομένως $\rho_1 < x_2 < \rho_2$. Η ρίζα αυτή x_2 πρέπει όμως να είναι και η μοναδική ρίζα της G στο (ρ_1, ρ_2). Γιατί εάν υποθέσουμε ότι υπήρχε και δεύτερη, η $x'_2 \in (\rho_1, \rho_2)$, τότε από το Θ. Rolle θα είχαμε ότι η G΄ θα είχε και άλλη ρίζα στο (ρ_1, ρ_2), άτοπο αφού για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$, $G'(x) > 0$.

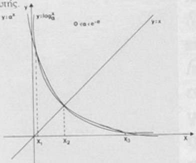
Θα αποδείξουμε τώρα ότι η G έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, \rho_1)$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\log_a^x - a^x\right) =$ $= +\infty - 1 = +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός κ, πολύ κοντά στο 0, έτσι ώστε $G(\kappa) > 0$. Εάν $G(\rho_1) < 0$, τότε η G στο διάστημα $[\kappa, \rho_1]$ θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano και επομένως θα έχει μια ρίζα στο $(0, \rho_1)$, η οποία θα είναι και η μοναδική αφού είναι γν. φθίνουσα σ' αυτό. Αυτό πράγματι συμβαίνει γιατί εάν υποθέσουμε ότι $G(\rho_1) > 0$, επειδή η G στο $[\rho_1, \rho_2]$ είναι γν. αύξουσα θα ισχύει ότι $\rho_1 < x < \rho_2$ ή $0 < G(\rho_1) < G(x)$, άτοπο γιατί η G έχει μια ρίζα, τη x_2, στο διάστημα (ρ_1, ρ_2). Επομένως $G(\rho_1) < 0$. Θα υπάρχει λοιπόν ρίζα, της G στο $(0, \rho_1)$ και έστω αυτή είναι η x_1.

Τότε θα ισχύει $G(x_1) = 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 = a^{x_1}$ (7) και

$$G\left(a^{x_1}\right) = \log_a a^{x_1} - a^{a^{x_1}} = $$
$$= x_1 - a^{a^{x_1}} \overset{(7)}{=} x_1 - a^{\log_a x_1} =$$
$$= x_1 - x_1 = 0.$$

Οπότε η $x_3 = a^{x_1}$ είναι ρίζα της G και δεδομένου ότι δεν μπορεί να ανήκει ούτε στο $(0, \rho_1)$ ούτε στο (ρ_1, ρ_2), θα ανήκει στο $(\rho_2, +\infty)$. Επομένως στην περίπτωση όπου $0 < a < e^{-e}$ η G έχει ακριβώς τρεις ρίζες, x_1, x_2, x_3, με $0 < x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2 < x_3$ Στο Σχήμα 5 φαίνονται τα τρία κοινά σημεία της περίπτωσης αυτής.



Συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = \log_a x$ είναι:

α) Κανένα όταν $a > e^{\frac{1}{e}}$.

β) Ακριβώς ένα, με τετμημένη $x = e$, όταν $a = e^{\frac{1}{e}}$

γ) Ακριβώς δύο, με τετμημένες x_1, x_2 $(x_1 < e < x_2)$, όταν $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$.

δ) Ακριβώς ένα όταν $e^{-e} \le a < 1$ $\left(\text{για } a = e^{-e}, x = \frac{1}{e}\right)$

ε) Ακριβώς τρία, με τετμημένες x_1, x_2, x_3, όταν $0 < a < e^{-e}$ (x_2 είναι η μοναδική ρίζα της $a^x = x$, $x_1 < x_2$ και $x_3 = a^{x_1} > x_2$).