ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ Λ. ΑΙΔΗΨΟΥ *ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 2012-2013*

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: *ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ*

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\log_a\left(\theta_1\theta_2\right)=\log_a\theta_1+\log_a\theta_2$ για κάθε $\theta_1,\theta_2\in\left(0,+\infty\right)$ και $0<a\neq 1$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to R, A\subseteq R$ ονομάζεται άρτια και πότε περιττή

Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό της κάθε ερώτησης από τις παρακάτω και δίπλα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν
2) Αν σε γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει: $D=0$ και $D_x^2+D_y^2\neq 0$ τότε αυτό είναι αδύνατο, με D την ορίζουσα του συστήματος και D_x,D_y τις ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν στη στήλη των συντελεστών των x,y αντικαταστήσουμε τη στήλη των σταθερών όρων του συστήματος αντίστοιχα.
3) Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[2\pi,2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$
4) Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $\left[0,+\infty\right)$
5) Τα αντίθετα τόξα έχουν ίσα συνημίτονα
6) Ισχύει: $\log_a\theta_1-\log_a\theta_2=\log_a\left(\theta_1-\theta_2\right)$, με $\theta_1>\theta_2>0$ και $0<a\neq 1$
7) Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=a$, με $x,a\in R$ έχει **πάντοτε** ρίζα
8) Η συνάρτηση $f\left(x\right)=a^x, a>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της
9) Η περίοδος της συνάρτησης $f\left(x\right)=\varepsilon\varphi x, x\in R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$ έχει περίοδο $\frac{\pi}{2}$
10) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\left(x\right)=\log x^{2\nu}$, με $\nu\in N^*$ είναι το R^*

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f\left(x\right)=x^3-6$ και $g\left(x\right)=6x^2-11x$

i) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής τους

Μονάδες 15

ii) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση της g

Μονάδες 10

<u>Θέμα 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημ(2x-π)-1$

i) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f καθώς και οι θέσεις του μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα

Μονάδες 10

ii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία με εξίσωση $y=1$ των οποίων οι τετμημένες ανήκουν στο διάστημα $[-π,π]$

Μονάδες 10

iii) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x)=2013$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 5

<u>Θέμα 4ο</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-1}$

i) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους

Μονάδες 5

ii) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 10

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(g(x))=0$

Μονάδες 10

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1) ***Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα***
2) ***Κάθε μέθοδος επιστημονικά τεκμηριωμένη γίνεται αποδεκτή***

Αιδηψός Πέμπτη , 23 Μαΐου 2013

Η Διευθύντρια   Ο Εισηγητής

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\log_a(\theta_1\theta_2)=\log_a\theta_1+\log_a\theta_2$ για κάθε $\theta_1,\theta_2\in(0,+\infty)$ και $0<a\neq 1$

Μονάδες 10

Απάντηση

Είναι $\theta_1=a^{\log_a\theta_1}:(1)$, $\theta_2=a^{\log_a\theta_2}:(2)$ και $\theta_1\theta_2=a^{\log_a(\theta_1\theta_2)}:(3)$

Από $(1)\cdot(2)\Rightarrow\theta_1\theta_2=a^{\log_a\theta_1}\cdot a^{\log_a\theta_2}\Rightarrow\boxed{\theta_1\theta_2=a^{\log_a\theta_1+\log_a\theta_2}}:(4)$ ¨

Από $a^{\log_a(\theta_1\theta_2)}=a^{\log_a\theta_1+\log_a\theta_2}$ και επειδή η συνάρτηση $f(x)=a^x$ είναι «1-1» θα ισχύει:

$\boxed{\log_a(\theta_1\theta_2)=\log_a\theta_1+\log_a\theta_2}$

Β. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to R,A\subseteq R$ ονομάζεται άρτια και πότε περιττή

Μονάδες 5

Απάντηση

Η συνάρτηση $f:A\to R,A\subseteq R$ ονομάζεται άρτια αν και μόνο αν για κάθε $x\in A$ ισχύει: $-x\in A$ και $f(-x)=f(x)$

Η συνάρτηση $f:A\to R,A\subseteq R$ ονομάζεται περιττή αν και μόνο αν για κάθε $x\in A$ ισχύει: $-x\in A$ και $f(-x)=-f(x)$

Γ. Να γράψετε στην κόλλα των εξετάσεων τον αριθμό της κάθε ερώτησης από τις παρακάτω και δίπλα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

11) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν **(ΛΑΘΟΣ)**
12) Αν σε γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει: $D=0$ και $D_x^2+D_y^2\neq 0$ τότε αυτό είναι αδύνατο, με D την ορίζουσα του συστήματος και D_x,D_y τις ορίζουσες που προκύπτουν από την D αν στη στήλη των συντελεστών των x,y αντικαταστήσουμε τη στήλη των σταθερών όρων του συστήματος αντίστοιχα. **(ΣΩΣΤΟ)**
13) Η συνάρτηση $f(x)=ημx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[2\pi,2\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ **(ΛΑΘΟΣ)**
14) Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ **(ΛΑΘΟΣ)**
15) Τα αντίθετα τόξα έχουν ίσα συνημίτονα **(ΣΩΣΤΟ)**
16) Ισχύει: $\log_a\theta_1-\log_a\theta_2=\log_a(\theta_1-\theta_2)$, με $\theta_1>\theta_2>0$ και $0<a\neq 1$ **(ΛΑΘΟΣ)**
17) Η εξίσωση $συνx=a$, με $x,a\in R$ έχει **πάντοτε** ρίζα **(ΛΑΘΟΣ)**
18) Η συνάρτηση $f(x)=a^x,a>1$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της **(ΣΩΣΤΟ)**
19) Η περίοδος της συνάρτησης $f(x)=εφx,x\in R-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$ έχει περίοδο $\frac{\pi}{2}$ **(ΛΑΘΟΣ)**
20) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\log x^{2v}$, με $v\in N^*$ είναι το R^* **(ΣΩΣΤΟ)**

Μονάδες 10

<u>Θέμα 2ο</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^3-6$ και $g(x)=6x^2-11x$

iii) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής τους

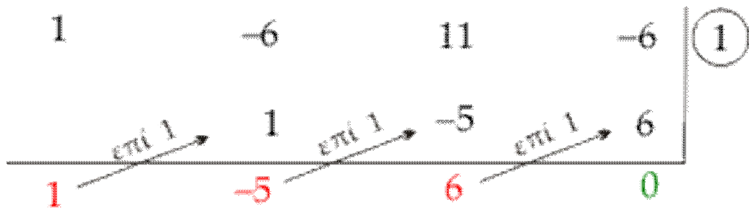
Μονάδες 15

Απάντηση

Τα ζητούμενα σημεία είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-6=6x^2-11x \Leftrightarrow \boxed{x^3-6x^2+11x-6=0} : (1)$

Θεωρούμε $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Οι πιθανές ρίζες της (1) είναι οι $1,2,3,6$. Εύκολα προκύπτει ότι: $P(1)=0$, οπότε το 1 είναι μια ρίζα. Εφαρμόζουμε το σχήμα του Horner για $x=1$ και έχουμε:



Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \boxed{x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3}$$

iv) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση της g

Μονάδες 10

Απάντηση

Φανερά ζητάμε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^3-6<6x^2-11x \Leftrightarrow \boxed{x^3-6x^2+11x-6<0} : (2) \Leftrightarrow \ldots \boxed{x \in (-\infty,1) \cup (2,3)}$

Θέμα 3^o

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu(2x-\pi)-1$

iv) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f καθώς και οι θέσεις του μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα

Μονάδες 10

Απάντηση

Είναι $\max f=2-1=1$ για $x\in R$ ώστε

$$\eta\mu(2x-\pi)=1\Leftrightarrow -\eta\mu 2x=1\Leftrightarrow \eta\mu 2x=-1\Leftrightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z}$$ και

$\min f=-2-1=-3$ για $x\in R$ ώστε

$$\eta\mu(2x-\pi)=-1\Leftrightarrow -\eta\mu 2x=-1\Leftrightarrow \eta\mu 2x=-1\Leftrightarrow 2x=2\lambda\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \boxed{x=\lambda\pi+\frac{\pi}{4},\lambda\in Z}$$

v) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία με εξίσωση $y=1$ των οποίων οι τετμημένες ανήκουν στο διάστημα $[-\pi,\pi]$

Μονάδες 10

Απάντηση

Ζητούνται οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$ στο διάστημα $[-\pi,\pi]$

Είναι $f(x)=1\Leftrightarrow\ldots\boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4}}:(1),k\in Z$. Με

$$x\in[-\pi,\pi]\Leftrightarrow -\pi\le x\le\pi\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}-\pi\le k\pi-\frac{\pi}{4}\le\pi\\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\begin{cases}-\frac{3}{4}\le k\le\frac{5}{4}\\ k\in Z\end{cases}\Rightarrow k=0,1$$ και

για $k=0$ από την (1) προκύπτει ότι $x=-\frac{\pi}{4}$ και για $k=1$ από την (1) προκύπτει ότι $x=\frac{3\pi}{4}$

οπότε τα ζητούμενα σημεία τομής είναι τα $M_1\left(-\frac{\pi}{4},1\right)$ και $M_2\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$

vi) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x)=2013$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

Επειδή $f(x)\le 1<2013$ για κάθε $x\in R$, η εξίσωση $f(x)=2013$ είναι αδύνατη στο R

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-1}$

iv) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους

Μονάδες 5

Απάντηση

Για το πεδίο ορισμού της f (έστω A_f) πρέπει $x>0 \Rightarrow \boxed{A_f=(0,+\infty)}$ και για το πεδίο ορισμού της g (έστω A_g) πρέπει $e^{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow e^{x}\neq 1 \overset{e^{t}\text{ ειναι "1–1"}}{\Leftrightarrow} x\neq 0 \Rightarrow \boxed{A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}$

v) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 10

Απάντηση

Πρέπει

$$\begin{cases} g(x)>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-1}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(e^{x}-1)(e^{x}-3)}{e^{x}-1}>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}-3>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}>3 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\overset{\ln t\text{ γνησιως αυξουσα}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln e^{x}>\ln 3 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\ln 3>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x>\ln 3}$$

vi) Να λυθεί η εξίσωση $f(g(x))=0$

Μονάδες 10

Απάντηση

$$f(g(x))=0 \Leftrightarrow \ln(g(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=1 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-1}=1 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}-4e^{x}+3=e^{x}-1 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Είναι

$$\begin{cases} e^{2x}-5e^{x}+4=0 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{x}-1)(e^{x}-4)=0 \\ x>\ln 3 \end{cases} \overset{e^{x}-1\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} e^{x}-4=0 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}=4 \\ x>\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=\ln 4}>\ln 3 \\ x>\ln 3 \end{cases}$$

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι $x=\ln 4$ και το ζητούμενο έχει βρεθεί

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ