

μέρος πρώτο

Γενική μορφή πολωνύμου: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$

Το $a_n \in \mathbb{R}$ σημαίνει ότι οι συντελεστές δεν περιέχουν την μεταβλητή x .

Όροι του $P(x)$: $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_2 x^2, a_1 x^1, a_0$

Σταθερός όρος του $P(x)$: a_0

Συντελεστές του $P(x)$: $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$

Σταθερό πολωνύμο: $P(x) = c \in \mathbb{R}$ ($P(x) = a_0$) [= αριθμος σταθερος]

Μηδενικό πολωνύμο: $P(x) = 0$

Αριθμητική τιμή πολωνύμου για $x=a$: ο αριθμός $P(a)$

[αντικατάσταση στο $P(x)$ όπου $x = a$]

Ρίζα πολωνύμου β : λύση της εξίσωσης $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(\beta) = 0$

[ο αριθμός που το μηδενίζει]

Βαθμός πολωνύμου:

- Αν το πολωνύμο δεν είναι σταθερό, είναι η μεγαλύτερη εμφανιζόμενη δύναμη της μεταβλητής x με μη μηδενικό συντελεστή

- Αν το πολωνύμο είναι σταθερό

- και μη μηδενικό τότε έχει βαθμό 0 : $P(x) = c \neq 0$ βαθμού μηδέν

- και μηδενικό τότε δεν ορίζεται βαθμός : $P(x) = 0$ δεν ορίζεται βαθμός

Ισότητα πολωνύμων:

Δυο πολωνύμα είναι ίσα όταν - έχουν ίδιο βαθμό

- ίσους τους ομοβάθμιους συντελεστές

Ένα πολωνύμο είναι το μηδενικό όταν όλοι οι συντελεστές του είναι μηδενικοί.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

Κάθε πολωνύμο έχει

-> σταθερό ορό $P(0) = a_0$

-> άθροισμα συντελεστών $P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$

Πράξεις με πολωνύμα

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\pm$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ = ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\otimes$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ = ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ (επιμεριστικές κι αναγωγή όμοιων ορών)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\div$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ = ΙΣΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΙΣΩΣ ΟΧΙ

$$\text{πχ. } \frac{x^3 - x}{3x + 3} = \frac{x(x^2 - 1)}{3(x+1)} = \frac{x(x-1)\cancel{(x+1)}}{3\cancel{(x+1)}} = \frac{x^2 - x}{3} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \text{ πολωνύμο}$$

$$\frac{5x + 5}{x^2 - x} = \frac{5(x+1)}{(x^2 - 1)} = \frac{5\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{5}{x-1} \text{ όχι πολωνύμο}$$

Το μη μηδενικό **άθροισμα** δύο πολωνύμων έχει βαθμό το πολύ ίσο με το μέγιστο των βαθμών των δυο πολωνύμων. [$\text{αν } P, Q \text{ έχουν βαθμό } 2, 3 \Rightarrow P + Q \text{ έχει βαθμό } \leq 3$]

Το **γινόμενο** δύο μη μηδενικών πολωνύμων έχει βαθμό ίσο με το άθροισμα των βαθμών των δυο πολωνύμων. [$\text{αν } P, Q \text{ έχουν βαθμό } 2, 3 \Rightarrow P \cdot Q \text{ έχει βαθμό } 5 = 2 + 3$]

Παραμετρική Βαθμού Πολυωνύμου

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x^2 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda$.

Να υπολογιστεί ο βαθμός του για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου λ .

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον μεγιστοβάθμιο όρο:

$$\text{Αν } \lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda \neq 0 & \text{και } \lambda - 2 \neq 0 & \text{και } \lambda + 2 \neq 0 \\ & \lambda \neq 2 & \lambda \neq -2 \end{matrix}$$

το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού.

Αν $\lambda = 0 \Rightarrow P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$ για το πολυώνυμο $P(x)$ δεν ορίζεται βαθμός

Αν $\lambda = 2 \Rightarrow P(x) = 0x^3 + 0x^2 + 8x + 2 = 8x + 2$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού

Αν $\lambda = -2 \Rightarrow P(x) = 0x^3 + 8x^2 + 0x - 2 = 8x^2 - 2$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού

Μηδενικό - Ισότητα - Ρίζα - Τιμή

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x^2 - \gamma x + x - \delta$, $Q(x) = 2x^3 + \delta x^2 - 3x + \gamma$.

α) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό;

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ είναι ίσα;

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 0 και το $Q(x)$ τιμή 5 για $x=1$;

[Εναλλακτική διατύπωση :Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ το πολυώνυμο x διαιρεί το $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : x-1$ είναι 5;]

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό αν όλοι οι συντελεστές του είναι μηδενικοί.

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 2x^2 - \gamma x + x - \delta = \alpha x^3 + (\beta - 2)x^2 + (1 - \gamma)x + (-\delta)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2 \\ 1 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1 \\ -\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0 \end{cases}$$

β) Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ είναι ίσα όταν είναι ιδίου βαθμού και όλοι οι ομοβάθμιοι συντελεστές τους είναι ίσοι.

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha x^3 + (\beta - 2)x^2 + (1 - \gamma)x + (-\delta) = 2x^3 + \delta x^2 - 3x + \gamma \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 2 = \overset{\delta=-4}{\delta} \Rightarrow \beta - 2 = -4 \Rightarrow \beta = -2 \\ 1 - \gamma = -3 \Rightarrow \gamma = 4 \\ -\delta = \overset{\gamma=4}{\gamma} \Rightarrow -\delta = 4 \Rightarrow \delta = -4 \end{cases}$$

γ) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 0 $\Leftrightarrow P(0) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha 0^3 + (\beta - 2)0^2 + (1 - \gamma)0 + (-\delta) = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 0 - \delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$$

Το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει τιμή 5 για $x=1 \Leftrightarrow Q(1) = 5$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 + \delta \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + \gamma = 5 \Leftrightarrow 2 + \delta - 3 + \gamma = 5 \Leftrightarrow \overset{\delta=0}{2} + 0 - 3 + \gamma = 5 \Leftrightarrow \gamma = 6$$

$\alpha, \beta \in R$ (γιατί δεν συμμετέχουν στις πράξεις, δεν έχουμε κάποιο παραπάνω δεδομένο)

μέρος δεύτερο

Η **διαίρεση πολυωνύμων** $\Delta(x)$, $\delta(x)$ γίνεται όταν “βαθμός $\Delta(x) \geq$ βαθμός $\delta(x)$ ” και $\delta(x) \neq 0$. Συμπληρώνουμε με μηδενικά όσους ορούς του διαιρετή λείπουν.

Τελειώνει όταν “βαθμός $\nu(x) <$ βαθμός $\delta(x)$ ή $\nu(x) = 0$ ”.

Ταντότητα διαίρεσης πολυωνύμων : $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$

$$\begin{array}{r|l} \Delta(x) & \delta(x) \\ \hline \nu(x) & \pi(x) \end{array}$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\div$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ = ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\Leftrightarrow$ Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΟΥΣ ΕΙΝΑΙ ΤΕΛΕΙΑ

Σχήμα Horner με το $x = \alpha$:

Χρησιμοποιεί σαν πιο σύντομος τρόπος αντί για την διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$.

Συμπληρώνουμε με μηδενικά όσους όρους του διαιρετέου λείπουν.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - \alpha \\ \hline \nu = P(\alpha) & \pi(x) \end{array}$$

Στους συντελεστές του πηλίκου ξεκινάμε μια δύναμη μικρότερη από τον βαθμό του διαιρετή. Το υπόλοιπο στο σχήμα Horner με το $x = \alpha$ ισούται με το $P(\alpha)$.

Ταντότητα διαίρεσης από σχήμα Horner: $\Delta(x) = \pi(x)(x - \alpha) + \nu$

Θεωρήματα:	Ισοδύναμες Εκφράσεις
1. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x - \alpha$ είναι το $P(\alpha)$ 2. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \alpha \Leftrightarrow \alpha$ ρίζα του $P(x)$, δηλ. $P(\alpha) = 0$	- το $P(x)$ έχει παράγοντα το $Q(x)$ - $P(x) = Q(x) \pi(x)$ - το $P(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $Q(x)$ - το $P(x)$ έχει διαιρετή το $Q(x)$ - το $Q(x)$ διαιρεί το $P(x)$ - η διαίρεση $P(x) : Q(x)$ είναι τέλεια - το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$ είναι μηδέν $\begin{array}{r l} P(x) & Q(x) \\ \hline 0 & \end{array}$

Ερμηνεύοντας το

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - \alpha \\ \hline P(\alpha) & \end{array}$$

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 4$ αφήνει υπόλοιπο 3.

Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 6$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - 4 \\ \hline 3 & \\ \downarrow & \\ P(4) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x + 6 \\ \hline 0 & \\ \downarrow & \\ P(-6) & \end{array}$$

Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 5.

Το $x - 8$ διαιρεί το $P(x)$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x + 2 \\ \hline 5 & \\ \downarrow & \\ P(-2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x - 8 \\ \hline 0 & \\ \downarrow & \\ P(8) & \end{array}$$

Για να βρούμε το $P(a)$ σε ένα πολυώνυμο:

- κάνουμε αντικατάσταση στην $P(x)$ όπου x το a
- κάνουμε Horner με το a και είναι το υπόλοιπο
- κάνουμε διαίρεση με το $x-a$ και είναι το υπόλοιπο

Πολλαπλότητα ρίζας πολυωνύμου p λέμε την μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο παράγοντας $(x - \rho)$ στην παραγοντοποιημένη μορφή του πολυωνύμου

πχ. Αν $Q(x) = x^2(x+3)(x-1)^3(x+7)^4(x-5)^6(x^2+1)(2x^2+3)^2$

λέμε ότι το $Q(x)$ έχει ρίζες το 0 πολλαπλότητας 2 (διπλή ρίζα)

-3	>>	1 (μονή ρίζα)
1	>>	3 (τριπλή ρίζα)
-7	>>	4 (τετραπλή ρίζα)
5	>>	6 (εξαπλή ρίζα)

Στην πράξη η πολλαπλότητα ρίζας ενός πολυωνύμου μας δηλώνει πόσα "διαδοχικά" σχήματα Horner μηδενίζει η ρίζα ρ . Πχ. ρίζα πολλαπλότητας 3 θα μηδενίζει 3 "διαδοχικά" Horner.

Κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει το πολύ n διαφορετικές πραγματικές ρίζες

πχ. ένα πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού έχει το πολύ 5 διαφορετικές πραγματικές ρίζες (δηλ. μέχρι και 5 ρίζες)

Το υπόλοιπο διαίρεσης $P(x) : (ax + \beta)$ είναι το $v = P\left(-\frac{\beta}{a}\right)$

Απόδειξη

Αφού ο διαιρέτης είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι σταθερό πολυώνυμο δηλαδή

$$v(x) = v, \text{ άρα } P(x) = \pi(x) \cdot (ax + \beta) + v \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{\beta}{a}\right) = \pi\left(-\frac{\beta}{a}\right) \cdot 0 + v \Rightarrow v = P\left(-\frac{\beta}{a}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax + \beta \\ \hline & \\ & \\ & P\left(-\frac{\beta}{a}\right) \end{array}$$

πχ. $\begin{array}{r|l} P(x) & 2x+5 \\ \hline & \\ & P\left(-\frac{5}{2}\right) \end{array}$

$\begin{array}{r|l} P(x) & 3x-2 \\ \hline & \\ & P\left(\frac{2}{3}\right) \end{array}$

$\begin{array}{r|l} P(x) & 4x-3 \\ \hline & \\ & P\left(\frac{3}{4}\right) \end{array}$

Ισχύουν

$$\begin{array}{c} \begin{array}{r|l} P(x) & (x-\alpha)(x-\beta) \\ \hline 0 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} P(x) & x-\beta \\ \hline 0 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & \pi(x) \quad x-\beta \\ & 0 \end{array} \\ \\ \begin{array}{r|l} P(x) & (x-\alpha)^2 \\ \hline 0 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & \pi(x) \quad x-\alpha \\ & 0 \end{array} \end{array}$$

Τέλεια Διαίρεση με διαιρέτη τριώνυμο με $\Delta > 0$

3. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ να έχει παράγοντα το $Q(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

[Εναλλακτική διατύπωση: ... ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $(x-2)$ και $(x+2)$]

α' τρόπος: Με Διαίρεση Πολυωνύμων

Αρκεί το υπόλοιπο στην διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$ να είναι μηδέν
Κάνουμε διαίρεση και μηδενίζουμε ό,τι υπόλοιπο βρούμε.

$ \begin{array}{r} \cancel{x^5} + 0x^4 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta \\ \underline{\cancel{x^5} + 4x^3} \\ \phantom{\cancel{x^5} + 0x^4} - x^3 - x^2 + \alpha x \\ \phantom{\cancel{x^5} + 0x^4} \underline{ - 4x^2} \\ \phantom{\cancel{x^5} + 0x^4} + (\alpha + 4)x + \beta \\ \phantom{\cancel{x^5} + 0x^4} \underline{ - 4} \\ \phantom{\cancel{x^5} + 0x^4} - 4 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - 4 \\ \hline x^3 + x - 1 \end{array} $
--	--

$$(\alpha + 4)x + (\beta - 4) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4 = 0 \\ \beta - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$$\text{Τελικά } P(x) = (x^2 - 4)\pi(x) \Rightarrow P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta = (x^2 - 4)(x^3 + x - 1)$$

β' τρόπος: Δύο Horner (διαδοχικά) με τις ρίζες του διαιρέτη.

Αρκεί το $P(x)$ να έχει παράγοντες το $(x-2)$ και το $(x+2)$, δηλαδή το $(x-2)$ να διαιρεί το $P(x)$ και το $(x+2)$ να διαιρεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$

$$\begin{cases} P(x) = (x-2)A(x) \\ A(x) = (x+2)B(x) \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x-2)(x+2)B(x)$$

$ \begin{array}{r} P(x) \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x-2 \\ \hline A(x) \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x+2 \\ \hline B(x) \end{array} $
---	---	---

Δηλαδή ένα Horner στο $P(x)$ με το 2 και δεύτερο Horner στο παραπάνω πηλίκο με το -2.

$ \begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta \\ 1 \quad 0 \quad -3 \quad -1 \quad \alpha \quad \beta \quad 2 \\ \underline{2 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 2\alpha + 4} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha + 2 \quad 2\alpha + 4 + \beta = 0 \\ (x-2)(x^4 + 2x^3 + x^2 + x + \alpha + 2) \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + x^2 + x + \alpha + 2 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha + 2 \quad -2 \\ \underline{-2 \quad 0 \quad -2 \quad 2} \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad a + 4 = 0 \\ (x+2)(x^3 + 0x^2 + x - 1) \end{array} $	$ \begin{cases} 2\alpha + 4 + \beta = 0 \\ \alpha + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 4 \end{cases} $
--	---	--

$$\begin{aligned} \text{Τελικά } P(x) &= x^5 - 3x^3 - x^2 + ax + \beta = (x-2)(x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x + a - 6) = (x-2)(x+2)(x^3 - x - 1) \\ P(x) &= (x^2 - 4)(x^3 + x - 1) \end{aligned}$$

Αλλιώς θα μπορούσαμε να κάνουμε δυο Horner στο $P(x)$ ένα με το 2 κι ένα με το -2.

γ' τρόπος: Με αντικατάσταση

[καλύτερος τρόπος]

Αρκεί το $P(x)$ να έχει παράγοντες το $(x-2)$ και το $(x+2)$,
δηλαδή το $P(x)$ να έχει ρίζες το 2 και -2 $\Rightarrow P(2) = P(-2) = 0$

$$\begin{array}{c|c} P(x) & x-2 \\ \hline 0 & \\ \downarrow & \\ P(2) & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} P(x) & x+2 \\ \hline 0 & \\ \downarrow & \\ P(-2) & \end{array}$$

$$\begin{cases} P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 - 2^2 + a \cdot 2 + \beta = 32 - 24 - 4 + 2a + \beta = 2\alpha + \beta + 4 \\ P(-2) = (-2)^5 - 3(-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + \beta = -32 + 24 - 4 - 2\alpha + \beta = -2\alpha + \beta - 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(2)=P(-2)=0 &\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + 4 = 0 \\ -2\alpha + \beta - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ -2\alpha + \beta = 12 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (-4, 4) \end{aligned}$$

Τέλεια Διαίρεση με διαιρέτη τριώνυμο με $\Delta=0$

4. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + ax + \beta$ να έχει παράγοντα το $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

[Εναλλακτική διατύπωση: ... ώστε το $P(x)$ να έχει διπλή ρίζα το 1]

α' τρόπος: Με Διαίρεση Πολυωνύμων

Αρκεί το υπόλοιπο στην διαίρεση $P(x) : (x^2 - 2x + 1)$ να είναι μηδέν
Κάνουμε διαίρεση και μηδενίζουμε ό,τι υπόλοιπο βρούμε.

$$\begin{array}{c|c} P(x) & x^2 - 2x + 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^5} + 0x^4 - 3x^3 - x^2 + ax + \beta & x^2 - 2x + 1 \\ \hline \cancel{-x^5} + 2x^4 - x^3 & \\ \hline 2x^4 - 4x^3 - x^2 & \\ \hline \cancel{-2x^4} + 4x^3 - 2x^2 & \\ \hline - 3x^2 + ax + \beta & \\ \hline + 3x^2 - 6x + 3 & \\ \hline (\alpha - 6)x + (\beta + 3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} & \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 6 = 0 \\ \beta + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -3 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{Τελικά } P(x) = (x^2 - 2x + 1)\pi(x) \Rightarrow P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + ax + \beta = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 - 3)$$

β' τρόπος: Δύο Horner (διαδοχικά) με την διπλή ρίζα του διαιρέτη.

[καλύτερος τρόπος]

Αρκεί το 1 να είναι διπλή ρίζα του $P(x)$ δηλαδή το $(x-1)$ να διαιρεί το $P(x)$ και το $(x-1)$ να διαιρεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$

$$\begin{cases} P(x) = (x-1)A(x) \\ A(x) = (x-1)B(x) \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-1)B(x)$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-1 \\ \hline 0 & A(x) \\ & \hline & 0 & B(x) \end{array}$$

Δηλαδή ένα Horner $P(x)$ με το 1 και δεύτερο Horner στο πηλίκο του $P(x):(x-1)$ με το 1.

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0x^4 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & \\ 1 & 0 \quad -3 \quad -1 \quad \alpha \quad \beta \quad | 1 \\ \hline & 1 \quad 1 \quad -2 \quad -3 \quad \alpha-3 \\ 1 & 1 \quad -2 \quad -3 \quad \alpha-3 \quad | \alpha-3+\beta=0 \\ \hline & (x-2)(x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + \alpha-3) \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + \alpha - 3 & \\ 1 & 1 \quad -2 \quad -3 \quad \alpha-3 \quad | 1 \\ \hline & 1 \quad 2 \quad 0 \quad -3 \\ 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \quad -3 \quad | \alpha-6=0 \\ \hline & (x+2)(x^3 + 2x^2 + 0x - 3) \end{array} \quad \begin{cases} \alpha-3+\beta=0 \\ \alpha-6=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha=6 \end{cases} \end{cases}$$

Τέλεια Διαίρεση με διαιρέτη τριώνυμο με $\Delta < 0$

5. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ να έχει παράγοντα το $Q(x) = x^2 + 4$

[Εναλλακτική διατύπωση: ...ώστε για πολυώνυμο $K(x)$ να ισχύει $(x^2 + 4)K(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$]

Μόνος τρόπος: Με Διαίρεση Πολυωνύμων

Αρκεί το υπόλοιπο στην διαίρεση $P(x):(x^2 + 4)$ να είναι μηδέν.

Κάνουμε διαίρεση και μηδενίζουμε ό,τι υπόλοιπο βρούμε.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x^2+4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0x^4 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 + 4 \\ \hline \cancel{x^5} & \\ -4x^3 & \\ \hline -7\cancel{x^3} - x^2 + \alpha x & \\ +7\cancel{x^3} & 28x \\ \hline \cancel{x^2} + (\alpha + 28)x + \beta & \\ \cancel{x^2} & +4 \\ \hline & \end{array}$$

$$(\alpha + 28)x + (\beta + 4) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 28 = 0 \\ \beta + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -28 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

$$\text{Τελικά } P(x) = (x^2 + 4)\pi(x) \Rightarrow P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta = (x^2 + 4)(x^3 - 7x - 1)$$

Σε όλες τις παραπάνω ασκήσεις 3-5, θα μπορούσαμε να κάνουμε επαλήθευση κάνοντας επιμεριστικές στο αποτέλεσμα της ταυτότητας διαίρεσης.

Ταυτότητα Διαίρεσης (ευθύ)

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με $x+3$ και $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 7 και -3 αντίστοιχα. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης με πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$

$$\begin{array}{ccc} P(x) \begin{array}{|l} x+3 \\ \hline \end{array} & P(x) \begin{array}{|l} x-2 \\ \hline \end{array} & P(x) \begin{array}{|l} (x+3)(x-2) \\ \hline \end{array} \\ 7 \downarrow & -3 \downarrow & \vdots \\ P(-3) & P(2) & \end{array}$$

$$P(-3) = 7, P(2) = -3$$

Η ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με $Q(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ θα είναι

$P(x) = Q(x)\pi(x) + \nu(x)$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης και $\nu(x)$ το υπόλοιπο.

Το υπόλοιπο $\nu(x)$ ή θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή θα έχει βαθμό το πολύ 1 αφού ο διαιρετής $Q(x) = x^2 + x - 6$ είναι πολυώνυμο β' βαθμού, δηλαδή $\nu(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in R$

$$\text{Άρα } P(x) = (x+3)(x-2)\pi(x) + \alpha x + \beta$$

$$\text{Για } x = -3: P(-3) = (-3' + 3')(-3-2)\pi(-3) + \alpha(-3) + \beta = 0 - 3\alpha + \beta = -3\alpha + \beta = 7 \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 2: P(2) = (2+3)(2'-2')\pi(2) + \alpha(2) + \beta = 0 + 2\alpha + \beta = 2\alpha + \beta = -3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Άρα το υπόλοιπο } \nu(x) = \alpha x + \beta \Rightarrow \nu(x) = -2x + 1$$

Ταυτότητα Διαίρεσης (αντίστροφο)

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $Q(x) = x^2 + x - 6$ αφήνει υπόλοιπο $-2x+1$. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων με τα πολυώνυμα $x+3$ και $x-2$.

$$\begin{array}{ccc} P(x) \begin{array}{|l} (x+3)(x-2) \\ \hline \end{array} & P(x) \begin{array}{|l} x+3 \\ \hline \end{array} & P(x) \begin{array}{|l} x-2 \\ \hline \end{array} \\ -2x+1 & \vdots \downarrow P(-3) & \vdots \downarrow P(2) \end{array}$$

Η ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με $Q(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ θα είναι

$P(x) = Q(x)\pi(x) + (-2x+1)$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης, άρα θα είναι

$$P(x) = (x+3)(x-2)\pi(x) - 2x + 1$$

$$\text{Για } x = -3: P(-3) = (-3' + 3')(-3-2)\pi(-3) - 2(-3) + 1 = 0 + 6 + 1 = 7$$

$$\text{Για } x = 2: P(2) = (2+3)(2'-2')\pi(2) - 2(2) + 1 = 0 - 4 + 1 = -3$$

μέρος τρίτο

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Αφού πρώτα εφαρμόσουμε ταυτότητες, κάνουμε επιμεριστικές και απαλείψουμε παρενθέσεις:

α' βαθμού: Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους, πράξεις σε κάθε μέλος, διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου αν δεν είναι μηδέν, ειδάλλως είναι αόριστη ($0x=0$) ή αδύνατη ($0x \neq 0$).

β' βαθμού: Όλα στο α' μέλος, αναγωγή όμοιων όρων, τριώνυμο (αυτό με την διακρίνουσα :P)

γ' βαθμού ή ανώτερου: Όλα στο α' μέλος, αναγωγή όμοιων όρων, παραγοντοποίηση.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Αφού πρώτα εφαρμόσουμε ταυτότητες, κάνουμε επιμεριστικές και απαλείψουμε παρενθέσεις:

α' βαθμού: Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους, πράξεις σε κάθε μέλος, διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου αν δεν είναι μηδέν, ειδάλλως είναι αόριστη ή αδύνατη. Προσοχή όταν διάγουμε με αρνητικό αριθμό αλλάζει φορά η ανίσωση.

β' βαθμού: Όλα στο α' μέλος, αναγωγή όμοιων όρων, πρόσημο τριώνυμου (πινακάκι)

γ' βαθμού ή ανώτερου: Όλα στο α' μέλος, αναγωγή όμοιων όρων, παραγοντοποίηση, πρόσημο γινομένου (πινακάκι)

Κλασματικές Εξισώσεις

Βρίσκουμε ΕΚΠ παρονομαστών αφού πρώτα τους παραγοντοποιήσουμε.

Περιορισμοί: ΕΚΠ $\neq 0$

Απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας τα πάντα με το ΕΚΠ, έχοντας παρονομαστές παραγοντοποιημένους, βάζουμε παρενθέσεις στις θέσεις των αριθμητών μετά τις απλοποιήσεις.

Επιμεριστικές, πράξεις ανάλογα με τον βαθμό τους και βρίσκουμε το x.

- Δεκτές είναι όσες λύσεις δεν ανήκουν στους περιορισμούς, ειδάλλως απορρίπτονται.
- Αν απορρίψουμε όλες τις λύσεις λέμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν βγει αόριστη ($0x=0$), δεν γράφουμε αόριστη πάρα λέμε ότι λύσεις είναι οι περιορισμοί, δηλαδή όλοι οι πραγματικού αριθμοί, πλην των αριθμών που είναι περιορισμοί.

Κλασματικές Ανισώσεις

Όλα στο α' μέλος, ομώνυμα αφού παραγοντοποιήσουμε παρονομαστές για να βρούμε ΕΚΠ αυτών, Πράξεις στον αριθμητή, και καταλήγουμε σε πρόσημο πηλίκου (πινακάκι).

Το πρόσημο πηλίκου ισοδυναμεί με πρόσημο γινομένου λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς παρονομαστή, άρα για ευκολία συμπληρώνουμε με μια γραμμή το πινακάκι προσήμου γινομένου βάζοντας διπλή γραμμή στις ρίζες παρονομαστή κι αντιγράφουμε πρόσημο γινομένου.

Θεώρημα Ακέραιων Ριζών

Σε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές κάθε ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.

Δηλαδή αν δοθεί μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές και ψάχνουμε ρίζες της, πιθανές ακέραιες ρίζες θα είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου. Αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα που δεν διαιρεί τον σταθερό όρο. πχ

$$3x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 12 = 0$$

Είναι πολυωνυμική με ακέραιους συντελεστές

Έχει σταθερό ορό το 12

Επειδή $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Ίσως να έχει παραπάνω από μια, ίσως καμιά από αυτές, άλλα αν είναι ακέραια η ρίζα της θα είναι υποχρεωτικά μια από αυτές.

Με αντικατάσταση είτε με σχήμα Horner επέχουμε ποια είναι η ρίζα και παραγοντοποιούμε με σχήμα Horner όσες φορές χρειαστεί διαδοχικά μέχρι να καταλήξουμε σε εξίσωση που λύνεται (τριώνυμο).

Σχόλια για Πολυωνυμικές

- Αν μια πολυωνυμική εξίσωση έχει όλους τους όρους της θετικούς είτε όλους τους όρους της αρνητικούς, δεν έχει θετικές ρίζες, γιατί άθροισμα θετικών = θετικός κι άθροισμα αρνητικών = αρνητικός, πχ

$$\text{οι } 4x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 6x + 7 = 0 \text{ και } -3x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x - 4 = 0$$

δεν έχουν θετικές πραγματικές ρίζες, κι αν έχουν ρίζες, οι ρίζες αυτές θα είναι αρνητικές.

- Αν μια πολυωνυμική εξίσωση δεν έχει σταθερό όρο (σταθερός ορός = μηδέν), τότε λύνεται βγάζοντας το x κοινό παράγοντα,

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \dots$$

- Όταν δίνεται πολυωνυμική εξίσωση να λυθεί πρώτα ελέγχουμε αν λύνεται με ομαδοποίηση και μετά ψάχνουμε πιθανές ακέραιες ρίζες για να λυθεί με Horner, γιατί ενδέχεται να μην έχει ακέραιες ρίζες, ούτε καν ρητές.

$$4x^3 - 6x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x - 3) + 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x^2 + 4) = 0 \dots$$

$$x^5 + 3x^3 - 5x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 3) - 5(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^3 - 5) = 0 \dots$$

Η ουσία του κεφαλαίου

Το Θεώρημα Ακέραιων Ριζών χρειάζεται για να μην ψάχνουμε στα τυφλά ρίζες.

Το Σχήμα Horner χρειάζεται για να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο με γνωστή ρίζα.

Και γιατί να παραγοντοποιούμε ένα πολυώνυμο; Για να βρίσκουμε ρίζες του και πρόσημο του.

Με άλλα λόγια, για να λύνουμε πολυωνυμικές εξισώσεις κι ανισώσεις.

Έννοιες για συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις αυτών

Έστω συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ με γραφικές παραστάσεις C_f , C_g αντίστοιχα

- Η C_f διέρχεται από το σημείο (α, β) $(\alpha, \beta) \in C_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$
- Η C_f δεν διέρχεται από το σημείο (α, β) $(\alpha, \beta) \notin C_f \Leftrightarrow f(\alpha) \neq \beta$
- Η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y \Leftrightarrow f$ άρτια $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow -x \in A \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow f$ περιττή $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow -x \in A \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
- Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ ($x=0$) στο σημείο $(0, f(0))$
- Αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f(x)$, τότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.
- Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ ($y=0$) στα σημεία για τα οποία $f(x) = 0$
- Αν η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, τότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- Η C_f βρίσκεται ψηλότερα από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται χαμηλότερα από τον άξονα $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f τέμνει την C_g στα σημεία για τα οποία $f(x) = g(x)$

Αν η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, τότε η C_f δεν τέμνει την C_g .

- Η C_f βρίσκεται ψηλότερα από την $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται χαμηλότερα από την $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Πολυωνυμική ανίσωση (χρησιμοποιώντας Horner)

8. Να λυθεί $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 \leq 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = 0 \\
 \begin{array}{rrrrrr|l}
 1 & -3 & 5 & -9 & 6 & & 1 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 1 & -2 & 3 & -6 & & & 0
 \end{array} \\
 x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = (x^3 - 2x^2 + 3x - 6)(x - 1) = 0 \\
 \begin{array}{ccc}
 \parallel & & \parallel \\
 0 & & 0
 \end{array} \\
 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0 \text{ ή } x = 1
 \end{array}$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0 \\
 \begin{array}{rrrr|l}
 1 & -2 & 3 & -6 & & 2 \\
 \downarrow & & & & & \\
 1 & 0 & 3 & & & 0
 \end{array} \\
 x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^2 + 0x + 3)(x - 2) = 0 \\
 \begin{array}{ccc}
 \parallel & & \parallel \\
 0 & & 0
 \end{array} \\
 \Leftrightarrow x^2 + 0x + 3 = 0 \text{ ή } x = 2 \\
 x^2 = -3 \text{ αδυνατη γιατι } x^2 \geq 0
 \end{array}$$

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = (x^3 - 2x^2 + 3x - 6)(x - 1) = (x^2 + 3)(x - 2)(x - 1) \leq 0$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x-1	-	(	+	+
x-2	-	-	(	+
x^2+3	+	+	+	+
γινόμενο	+	(	-	+

$$\text{Άρα } x \in [1, 2]$$

Κλασματική ανίσωση

9. Να λυθεί $\frac{x-1}{2x^2} \leq \frac{2x-3}{3x^2-3x}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x-1}{2x^2} \leq \frac{2x-3}{3x^2-3x} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x^2} - \frac{2x-3}{3x^2-3x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{3(x-1)}{2x^2} - \frac{2x-3}{3x(x-1)}}{\frac{3(x-1)^2}{6x^2(x-1)} - \frac{2x(2x-3)}{6x^2(x-1)}} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3x^2-6x+3}{6x^2(x-1)} - \frac{4x^2-6x}{6x^2(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-\cancel{6x}+3-4x^2+\cancel{6x}}{6x^2(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+3}{6x^2(x-1)} \leq 0
 \end{aligned}$$

$$(-x^2 + 3)6x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \quad \eta \quad x = 0 \quad \eta \quad x = 1$$

x	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$
$-x^2 + 3$	-	+	+	-
$6x^2$	+	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
γινόμενο	-	-	-	-
$\frac{-x^2 + 3}{6x^2(x-1)}$	+	-	-	+

$$\text{Άρα } x \in [-\sqrt{3}, 0) \cup (0, 1) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$

Εκφράσεις σχετικές με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - x^2 - 6$ και $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο (1,2), να εξετάσετε αν διέρχεται από το σημείο (-1,3)

β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $g(x)$ με τον άξονα $x'x$

γ) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της $f(x)$ με τον άξονα $x'x$, δεν ξεπέρα τον άξονα $x'x$;

δ) Για $\lambda = 7$, να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $f(x)$ και $g(x)$

α) $(1, 2) \in C_g \Leftrightarrow g(1) = 2$

$$g(x) = 1^4 + 1^3 - 1^2 - \lambda \cdot 1 = 1 + 1 - 1 - \lambda = 1 - \lambda = 2$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = 2 \Leftrightarrow -\lambda = -1 + 2 \Leftrightarrow -\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Για $\lambda = -1$: $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x$

$$g(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \neq -3 \Rightarrow (-1, -3) \notin C_g$$

β) Για $\lambda = 1$: $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x^3 + x^2 - x - 1)$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\downarrow \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & & 0 \end{array}$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$\Delta = 0, x = -1$$

$$x^4 + x^3 - x^2 - x = x(x^3 + x^2 - x - 1) = x(x^2 + 2x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm 1$$

Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα $(0,0), (1,0), (-1,0)$.

$$\gamma) f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 \leq 0 \stackrel{x^2=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2 - \omega - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\omega - 3)(\omega + 2) \leq 0$$

$$\stackrel{\omega=x^2}{\Leftrightarrow} (x^2 - 3)(x^2 + 2) \leq 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$x^2 = 3 \text{ ή } x^2 = -2$$

$$x = \pm\sqrt{3} \quad \text{αδυνατη γιατι } x^2 \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
x^2-3	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
x^2+3	+	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	+
γινόμενο	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

$$\text{Άρα } x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$\delta) \text{ Για } \lambda = 7: g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cancel{x^4} - \cancel{x^2} - 6 = \cancel{x^4} + \cancel{x^3} - 7x \Leftrightarrow -x^3 + 7x - 6 = 0$$

$$-x^3 + 0x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l} -1 & 0 & 7 & -6 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} \downarrow & -1 & -1 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} -1 & -1 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$-x^3 + 0x^2 + 7x - 6 = (-x^2 - x + 6)(x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$x_1 = 2, x_2 = -3$$

$$f(1) = 1^4 - 1^2 - 6 = 1 - 1 - 6 = -6$$

$$f(2) = 2^4 - 2^2 - 6 = 16 - 4 - 6 = 16 - 10 = 6$$

$$f(-3) = (-3)^4 - (-3)^2 - 6 = 81 - 9 - 6 = 81 - 15 = 66$$

Τα σημεία τομής των C_f, C_g είναι τα $(1, f(1)) = (1, -6), (2, f(2)) = (2, 6), (-3, f(-3)) = (-3, 66)$.

ασκήσεις στα τρία πρώτα μέρη

*

1. Αν $P(x) = x^2 + 2x + 5$, να λυθεί η εξίσωση $P(x-1) = 2P(1) - 3$ [±3]
2. Αν $f(x) = 2x + 3$, να λυθεί η εξίσωση $f(f(a)) = 3a - f^2(1)$ [-34]
3. Αν $Q(x-1) = 3x^2 + 2x - 5$, να βρεθεί το πολυώνυμο $Q(x)$ [$3x^2 + 8x$]
4. Αν το $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 7$, να βρείτε την τιμή του $P(x)$ για $x=2000$ [7]
5. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα το 2 να δείξετε ότι το $Q(x) = P(3x-7)$ έχει ρίζα το 3
6. Αν το $(x-5)$ διαιρεί το $P(x)$, να δείξετε ότι το $(x-4)$ είναι παράγοντας του $Q(x) = P(2x-3)$
7. Να αποδείξετε ότι το $P(x) = (2x+3)^{100} + (x+3)^{49} + x$ διαιρείται με το $(x+2)$
8. Αν το πολυώνυμο $P(x) = 9x^{2000} + \alpha x^{1999} + \alpha x^{1998} + \dots + \alpha x^2 + \alpha x + \alpha$ δίνει υπόλοιπο 2009 όταν διαιρεθεί με το $(x-1)$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α [1]
9. Αν το $P(x) = (x^3 + x - 1)^{153} + x - 1$ να βρείτε τον σταθερό του όρο και το άθροισμα των συντελεστών του. Τι βαθμού είναι; [-2, 1, 459]
10. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(x^2 - x) = 2P(x) - 4, \forall x \in R$, να βρείτε το σταθερό ορό και το άθροισμα των συντελεστών του [4, 4]

**

11. Αν $f(x) = (\alpha + 1)x^3 + 2x^2 + \beta x + \gamma - 2$ και $g(x) = 3x^3 + \delta x^2 + 6x + 1$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, για τις οποίες το πολυώνυμο $f(x) + g(x)$ είναι :
 - (i) βαθμού 3 [$\alpha \neq -4$]
 - (ii) βαθμού 2 [$\alpha = -4$ και $\delta \neq -2$]
 - (iii) βαθμού 1 [$\alpha = -4$ και $\delta = -2$ και $\beta \neq -6$]
 - (iv) μηδενικού βαθμού [$\alpha = -4$ και $\delta = -2$ και $\beta = -6$ και $\gamma \neq 1$]
 - (v) μηδενικό πολυώνυμο [$\alpha = -4$ και $\delta = -2$ και $\beta = -6$ και $\gamma = 1$]
 - (vi) το πολύ δευτέρου βαθμού [περιπτώσεις (ii), (iii), (iv)]
12. (α) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $(3x-1)P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 10x - 3, \forall x \in R$.
- (β) Να βρεθεί πολυώνυμο $Q(x)$ ώστε να ισχύει $3xQ(x) + 5x^2 + 3 = Q(x) + 6x^3 + 10x, \forall x \in R$.
- (γ) Να λυθεί η εξίσωση $6x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$

$$\left[2x^2 - x + 3, 2x^2 - x + 3, \frac{1}{3} \right]$$

13. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + 17x^2 + 2x + \beta$ να έχει ρίζες το -1 και το 2.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ και $\beta = -24$

(β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση του $P(x)$ διέρχεται από το σημείο (0,24)

(γ) Να βρείτε τις άλλες ακέραιες ρίζες του $P(x)$

(δ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 2x - 25$
και $g(x) = x^2 - 5$

$$[οχι, 3, 4, (-1, -4), (2, -1), (3, 4), (4, 11)]$$

14. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - (5\alpha - 3)x + \beta - 1$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = -3$

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης του $P(x)$

$$\left[(2, 0), (-2, 0), \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right), \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, 0 \right) \right]$$

15. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ διαιρείται ακριβώς από το πολυώνυμο $x^2 + 2x + 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 0$

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται χαμηλότερα από τον άξονα $x'x$

(γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των $f(x) = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 20$ και $g(x) = 6x^3 + x^2 + 2x - 19$

$$\left[x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right), (-1, -26), \left(\frac{1}{2}, -17 \right) \right]$$

16. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 + \alpha x^3 + 5x^2 + \beta x + \alpha + 1$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $2x^2 + 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται ψηλότερα από τον άξονα $x'x$

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = 3x^4 - x^3 + 6x^2 + 5x - 7$ βρίσκεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ψηλότερα από την γραφική παράσταση της $g(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 10$

$$[x \in \mathbb{R}]$$

17. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 3x^3 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^3 + x + 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 1$

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης του πηλίκου $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x^3 + x + 1)$

$$\left[(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right]$$

18. Το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 5$

(β) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση του $\pi(x)$ διέρχεται από το σημείο (2,9)

$$[x^3 + x - 1]$$

19. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 + 5x + \gamma$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 1)^3$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $\gamma = -2$

(β) Να αποδείξετε ότι $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 7$

βρίσκεται ψηλότερα από την γραφική παράσταση της $g(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 2x + 9$

$$[x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)]$$

20. (α) Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + x + 1$ δίνει πηλίκο $2x + 1$ και υπόλοιπο $4x + 3$

(β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x) : (2x + 1)$

(γ) Να βρείτε τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται ψηλότερα από την ευθεία $y = 4x + 3$

$$\left[2x^3 + 3x^2 + 7x + 4, x^2 + 2x + 3, x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right) \right]$$

21. Πολυώνυμο $P(x)$ όταν διαιρεθεί με $(2x + 1)(x - 3)(x + 2)$ δίνει υπόλοιπο $4x^2 - 6x + 3$.

Τι υπόλοιπο δίνει όταν διαιρεθεί με $2x + 1$, με $x - 3$ και με $x + 2$ αντίστοιχα σε κάθε περίπτωση;

$$[7, 21, 31]$$

22. Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $(x + 1)P(x) + (x - 1)P(x + 3) = 4x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$

(α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με τα $(x - 1)$ και $(x - 2)$

(β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

$$[5, -1, -6x + 11]$$

23. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) = x^{2010} + x^{2009} + x^{2008} + x^{2007} - 3$ δια του $(x^3 - x)$

$$[2x^2 + 2x - 3]$$

24. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β ώστε η εξίσωση $\alpha x^5 + x^4 + \beta x^2 + 2 = 0$ να έχει το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών. Στην περίπτωση αυτή να αποδείξετε ότι έχει κι άρρητες ρίζες.

$$[\alpha = 0, \beta = -3, x = \pm\sqrt{2}]$$

25. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ και $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 5$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

συνοπτικά για εξισώσεις κι ανισώσεις

πρόσημο πρωτοβάθμιου

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$ax+\beta$	E		O

O = ομόσημο του α

E = ετερόσημο του α

πρόσημο τριωνύμου

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
$\Delta > 0$	O		E	O

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$\Delta = 0$	O		O

x	$-\infty$	$+\infty$
$\Delta < 0$	O	

περίεργα

x	0
$x^{2\nu}$	$+$  $+$

x	0
$x^{2\nu+1}$	$-$  $+$

πρόσημο γινομένου - πηλίκου

x	(ρίζες των A,B)
A	...
B	...
γινόμενο (A · B)	πολλαπλασιάζω τα πρόσημα των A, B
$\frac{A}{B}$ (πηλίκο)	αντιγράφω την παραπάνω γραμμή βάζοντας περιορισμούς του B

κλασματικές εξισώσεις

περιορισμοί απαλοιφή παρνομαστών , παραγοντοποίηση, γινόμενο παραγόντων = 0, κάθε παράγοντας = 0
--

κλασματικές ανισώσεις

όλα στο α' μέλος, ομόνυμα, πρόσημο πηλίκου (= πρόσημο γινομένου με περιορισμούς παρνομαστή)

εξισώσεις γενικά

παραγοντοποίηση, κάθε παράγοντας = 0
--

ανισώσεις γενικά

παραγοντοποίηση, πρόσημο γινομένου
--