ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x+\phi)+\beta, \alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x+\phi)+\beta$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

- Τα βρίσκουμε πάντα κατασκευαστικά - Ξεκινώντας από ακρότατα ημΑ - συνΑ

$$-1 \le \eta\mu(\omega x+\phi) \le 1$$

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu(\omega x+\phi) \le 1$$

- Πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της ανίσωσης με α
  (αν α>0, μένουν ίδιες οι φορές)
  (αν α<0, αλλάζουν οι φορές)

$$\overset{\otimes\,\alpha>0}{\Rightarrow}\ -\alpha \le \alpha\eta\mu(\omega x+\phi) \le \alpha$$

- Προσθέτοντας σ'όλα τα μέλη το β

$$\overset{\oplus\beta}{\Rightarrow} -\alpha+\beta \le \underbrace{\alpha\eta\mu(\omega x+\phi)+\beta} \le \alpha+\beta$$

$$\underbrace{-\alpha+\beta}_{\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o} \le f(x) \le \underbrace{\alpha+\beta}_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o}$$

$$f_{\min} \qquad\qquad f_{\max}$$

ΠΟΤΕ ΕΧΕΙ ΚΑΠΟΙΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟ;

- Πότε γίνεται μέγιστη; (μεγιστοποιείται)
  $\Leftrightarrow$ Να λυθεί η εξίσωση
  $f(x)=f_{\max}$ $(\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o\ \tau\eta\varsigma\ f)$

- Πότε γίνεται ελάχιστη; (ελαχιστοποιείται)
  $\Leftrightarrow$ Να λυθεί η εξίσωση
  $f(x)=f_{\min}$ $(\varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau o\ \tau\eta\varsigma\ f)$

ΠΕΡΙΟΔΟΣ

- Τα ημ(ωx+φ),συν(ωx+φ) έχουν πάντα περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$
- Αν ω<0 : $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ γιατί πρέπει πάντα η περίοδος T να είναι θετικός αριθμός

Αναλυτικά αποδεικνύεται ως εξής:
$f(x\pm T)=f(x)$

πχ. $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+5$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) \le 1$$

$$\overset{\otimes -3}{\Rightarrow} 3 \ge -3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) \ge -3$$

$$\overset{\oplus 5}{\Rightarrow} 3+5 \ge -3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+5 \ge -3+5$$

$$\Rightarrow 8 \ge f(x) \ge 2$$

$$\Rightarrow \eta\ f(x)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o\ \tau o\ 8$$
$$\kappa\iota\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \tau o\ 2$$

ΠΟΤΕ ΕΧΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ;

$$f(x)=f_{\min} \Rightarrow$$

$$-3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+5=2 \Rightarrow$$

$$-3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=2-5 \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{-3}\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cancel{-3}}=\frac{\cancel{-3}}{\cancel{-3}} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=1=\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow$$

$$4x-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi\pm 0 \Rightarrow$$

$$4x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}=\frac{2\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{6\cdot 4} \Rightarrow$$

$$x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{24}, \kappa\in Z$$

$$f(x\pm T)=f\left(x\pm\frac{2\pi}{\omega}\right)$$
$$=\alpha\eta\mu\left[\omega\left(x\pm\frac{2\pi}{\omega}\right)+\phi\right]+\beta$$
$$=\alpha\eta\mu\left[\omega x\pm\cancel{\omega}\frac{2\pi}{\cancel{\omega}}+\phi\right]+\beta$$
$$=\alpha\eta\mu\left[\omega x\pm 2\pi+\phi\right]+\beta$$
$$\left[\alpha\gamma\nu o o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ \pm 2\pi\quad \sigma\varepsilon\ \eta\mu\mathrm{A},\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\right]$$
$$=\alpha\eta\mu\left[\omega x+\phi\right]+\beta$$
$$=f(x)$$

- Αν είχαμε ω<0, για να μην μπερδευτούμε βγάζουμε το (-) στην f έξω από τον τριγωνομετρικό αριθμό σύμφωνα με τα $\eta\mu(-\mathrm{A})=-\eta\mu\mathrm{A},\sigma\upsilon\nu(-\mathrm{A})=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$

<u>ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ:</u>

<u>- Σημεία τομής με άξονα x΄x (y=0):</u>
Λύνουμε την εξίσωση f(x) = 0, και θα είναι της μορφής (α,0) όπου α οι λύσεις της εξίσωσης

<u>- Σημεία τομής με (ευθεία) y=γ:</u>
Λύνουμε την εξίσωση f(x) = γ, και θα είναι της μορφής (α,γ) όπου α οι λύσεις της εξίσωσης

<u>- Διέρχεται από το σημείο Μ (α,β):</u>
Οι συντεταγμένες του σημείου Μ επαληθεύουν την συνάρτηση , δηλαδή f(α) = β.

<u>- Δεν διέρχεται από το σημείο Μ (α,β):</u>
Οι συντεταγμένες του σημείου Μ δεν επαληθεύουν την συνάρτηση , δηλαδή f(α) ≠ β.

<u>ΠΕΡΙΟΔΟΣ</u>

πχ.1. $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+5$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

γιατί (αναλυτικά)

$$f(x\pm T)=f\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\left[4\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\left[4x\pm 4\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\left[4x\pm 2\pi-\frac{\pi}{6}\right]+5$$
$$\left[\alpha\gamma\nu o o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ \pm 2\pi\quad \sigma\varepsilon\ \eta\mu\mathrm{A},\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\right]$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\left[4x-\frac{\pi}{6}\right]+5$$
$$=f(x)$$

πχ.2. αρχικά με ω<0
[πως αλλάζουμε πρόσημο στο ω]

$$f(x)=-3\eta\mu\left(-4x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$
$$=-3\eta\mu\left[-\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+2$$
$$=-3\left[-\eta\mu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+2$$
$$=3\eta\mu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+2$$

τελικά ω= 4>0

<u>ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ</u>

- Μελετάμε τις συναρτήσεις

$$g(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)+\beta$$

$$g(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x)+\beta$$

των οποίων μετατοπίζουμε τις γραφικές κατά γωνία $\dfrac{\varphi}{\omega}$

(αριστερά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}>0$, δεξιά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}<0$)

για να βρούμε τις γραφικές των f(x) διότι

$$g\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)=\alpha\eta\mu\left(\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right)+\beta$$

$$=\alpha\eta\mu(\omega x+\varphi)+\beta=f(x)$$

<u>Πως;</u>

1. Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για την g(x) [χωρίς γωνία φ]

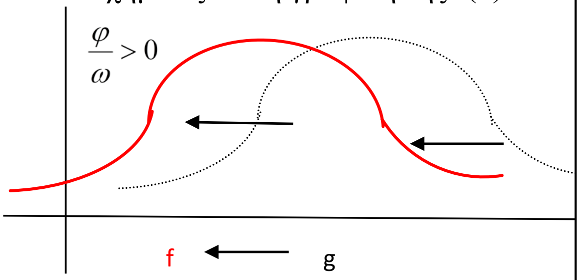
x	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	...	…	…	…
g(x)	…	...	…	….	…

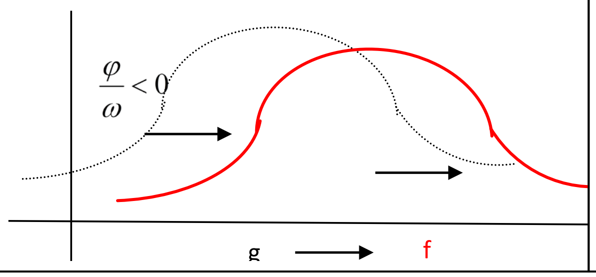
2. Σχεδιάζουμε στο διάστημα [0,T] την γραφική της g(x) ενώνοντας κατάλληλα τα σημεία (x,y) του παραπάνω πίνακα τιμών

3. Μετατοπίζουμε την γραφική της g(x) κατά γωνία $\dfrac{\varphi}{\omega}$

(αριστερά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}>0$, δεξιά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}<0$)

κι έτσι σχηματίζεται η γραφική της f(x)





πχ. για σχεδίαση γραφικής σε διάστημα μιας περιόδου

$$f(x)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+5$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Θέτω $g(x)=-3\sigma\upsilon\nu(4x)+5$

x	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
g(x)	2	5	8	5	2

$$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4\cdot 2}=\frac{\pi}{8},\quad \frac{2T}{4}=\frac{3\pi}{4\cdot 2}=\frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\cdot 2}=\frac{\pi}{4}$$

$$g(0)=-3\sigma\upsilon\nu(4\cdot 0)+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu 0+5$$
$$=-3\cdot 1+5=2$$

$$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+5$$
$$=-3\cdot 0+5=5$$

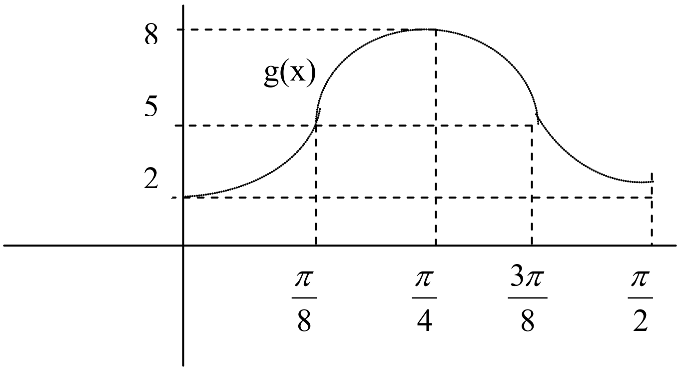
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\pi+5$$
$$=-3\cdot(-1)+5=8$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-3\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{3\pi}{8}\right)+5$$
$$=-3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)+5$$
$$=-3\cdot 0+5=5$$

$$g(T)=g(0)=2$$

Βρίσκουμε τα σημεία (x,y) του πίνακα τιμών: $(0,2),\left(\frac{\pi}{8},5\right),\left(\frac{\pi}{4},8\right),\left(\frac{3\pi}{8},5\right),\left(\frac{\pi}{2},2\right)$

πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο και τα ενώνουμε με καμπύλες δεχόμενοι ότι από την ΄΄μέση΄΄ και πάνω είναι ημικύκλια της μορφής $\cap$, ενώ από την ΄΄μέση΄΄ και κάτω είναι ημικύκλια της μορφής $\cup$.



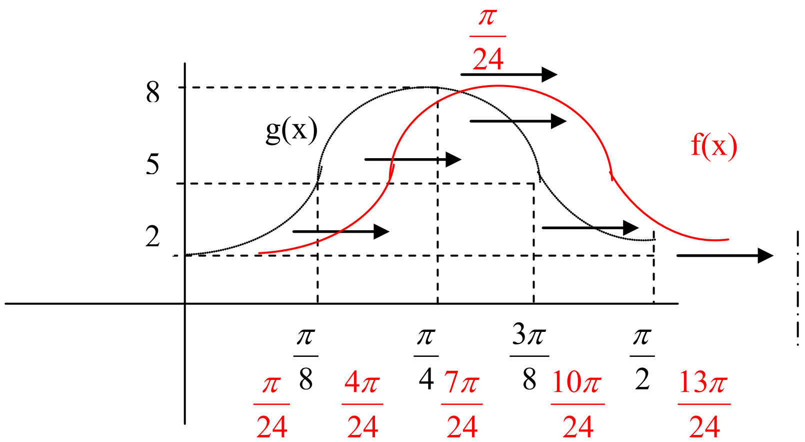
Κατόπιν μετατοπίζουμε την g(x) κατά γωνία $\frac{\pi}{24}$ προς τα δεξιά επειδή $\frac{\phi}{\omega}=-\frac{\pi}{6\cdot 4}=-\frac{\pi}{24}<0$ κι έχουμε την f(x). Για να μην μπλεχτούμε μπορούμε να τα υπολογίσουμε σε μοίρες. Η βασική ιδέα είναι ότι μετατοπίζουμε τα παραπάνω 5 σημεία κατά την γωνία $\frac{\pi}{24}$ κατάλληλα.

$$Αρχικα:(0,2),\left(\frac{\pi}{8},5\right),\left(\frac{2\pi}{8},8\right),\left(\frac{3\pi}{8},5\right),\left(\frac{4\pi}{8},2\right)$$

$$Τελικα:\left(0+\frac{\pi}{24},2\right),\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24},5\right),\left(\frac{2\pi}{8}+\frac{\pi}{24},8\right),\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{24},5\right),\left(\frac{4\pi}{8}+\frac{\pi}{24},2\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{24},2\right),\left(\frac{3\pi}{24}+\frac{\pi}{24},5\right),\left(\frac{6\pi}{24}+\frac{\pi}{24},8\right),\left(\frac{9\pi}{24}+\frac{\pi}{24},5\right),\left(\frac{12\pi}{24}+\frac{\pi}{24},2\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{24},2\right),\left(\frac{4\pi}{24},5\right),\left(\frac{7\pi}{24},8\right),\left(\frac{10\pi}{24},5\right),\left(\frac{13\pi}{24},2\right)$$



<u>Αν είχα μοίρες:</u>

$0^o+7{,}5^o=7{,}5^o$
$22{,}5^o+7{,}5^o=30^o$
$45^o+7{,}5^o=52{,}5^o$
$67{,}5^o+7{,}5^o=75^o$
$90^o+7{,}5^o=97{,}5^o$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ $f\left(x\right)=\alpha\varepsilon\phi\left(\omega x+\phi\right)+\beta,\alpha\sigma\phi\left(\omega x+\phi\right)+\beta$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Δεν έχουν!

ΠΕΡΙΟΔΟΣ

$T=\dfrac{\pi}{\omega}$ γιατί [αναλυτικά]:

$$f\left(x\pm T\right)=f\left(x\pm\frac{\pi}{\omega}\right)$$
$$=\alpha\varepsilon\phi\left[\omega\left(x\pm\frac{\pi}{\omega}\right)+\phi\right]+\beta$$
$$=\alpha\varepsilon\phi\left[\omega x\pm\cancel{\omega}\frac{\pi}{\cancel{\omega}}+\phi\right]+\beta$$
$$=\alpha\varepsilon\phi\left[\omega x\pm\pi+\phi\right]+\beta$$
$$\left[\alpha\gamma\nu oo\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ \pm\pi\quad \sigma\varepsilon\ \varepsilon\phi\mathrm{A},\sigma\phi\mathrm{A}\right]$$
$$=\alpha\varepsilon\phi\left[\omega x+\phi\right]+\beta$$
$$=f\left(x\right)$$

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ

- Μελετάμε τις συναρτήσεις

$g\left(x\right)=\alpha\varepsilon\phi\left(\omega x\right)+\beta$

$g\left(x\right)=\alpha\sigma\phi\left(\omega x\right)+\beta$

συμπληρώνοντας τους παρακάτω πίνακες

x	$-\frac{T}{2}$	$-\frac{T}{4}$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$
x	..	...	0	…	…
g(x)	¦	...	…	….	¦

ασύμπτωτες για εφΑ για Α=$\pm T/2$

x	$-\frac{T}{2}$	$-\frac{T}{4}$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$
x	..	...	0	…	…
g(x)	…	...	¦	….	...

ασύμπτωτη για σφΑ για Α=0

των οποίων μετατοπίζουμε τις γραφικές κατά γωνία $\dfrac{\varphi}{\omega}$

(αριστερά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}>0$, δεξιά αν $\dfrac{\varphi}{\omega}<0$)

για να βρούμε τις γραφικές των f(x)

πχ. $f\left(x\right)=2\varepsilon\phi\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)+9$

Ακρότατα: Δεν έχει!

Περίοδος $T=\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{3}$ γιατί

$$f\left(x\pm T\right)=f\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=3\varepsilon\phi\left[3\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+9$$
$$=2\varepsilon\phi\left[3x\pm\cancel{3}\frac{\pi}{\cancel{3}}+\frac{\pi}{4}\right]+9$$
$$=2\varepsilon\phi\left[3x\pm\pi+\frac{\pi}{4}\right]+9$$
$$\left[\alpha\gamma\nu oo\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\ \pm\pi\quad \sigma\varepsilon\ \varepsilon\phi\mathrm{A},\sigma\phi\mathrm{A}\right]$$
$$=2\varepsilon\phi\left[3x+\frac{\pi}{4}\right]+9$$
$$=f\left(x\right)$$

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ

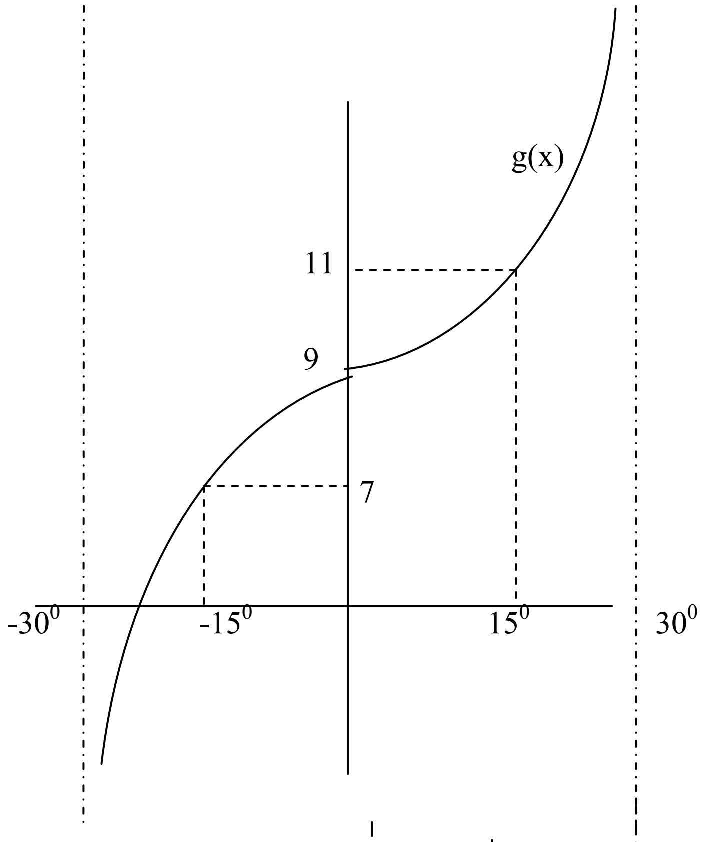
Θέτω $g\left(x\right)=2\varepsilon\phi\left(3x\right)+9$

$T=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

x	$-\frac{T}{2}$	$-\frac{T}{4}$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$
x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$
g(x)	¦	7	9	11	¦

$$g\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\varepsilon\phi\left(3\frac{-\pi}{12}\right)+9$$
$$=2\varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right)+9=2\left(-1\right)+9=7$$
$$g\left(0\right)=2\varepsilon\phi\left(0\right)+9=9$$
$$g\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\varepsilon\phi\left(3\frac{\pi}{12}\right)+9$$
$$=2\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)+9=2\cdot1+9=11$$

Βρίσκουμε τα σημεία (x,y) του πίνακα τιμών: $\left(-\frac{\pi}{12},7\right),(0,9),\left(\frac{\pi}{12},11\right)$ καθώς και τις ασύμπτωτες στα $\pm\frac{T}{2}=\pm\frac{\pi}{6}$ [$\pm 30^0$]. Με μοίρες τα σημεία: $\left(-15^0,7\right),(0,9),\left(15^0,11\right)$.



Κατόπιν μετατοπίζουμε την g(x) κατά γωνία $\frac{\pi}{12}$ [15^0] προς τα αριστερά γιατί $\frac{\phi}{\omega}=\frac{\pi}{4\cdot 3}=\frac{\pi}{12}>0$ και σχηματίζουμε την f(x).
Για να μην μπλεχτούμε με κλάσματα με π τα υπολογίζουμε όλα σε μοίρες.

<u>Τελικά σε μοίρες:</u>

$30^o - 15^o = 15^o$
$15^o - 15^o = 0^o$
$0^o - 15^o = -15^o$
$-15^o - 15^o = -30^o$
$-30^o - 15^o = -45^o$