

7 ^ο Γενικό Λύκειο Περιστερίου	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2013	
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	
ΑΛΓΕΒΡΑ	
ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΜΗΜΑ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3 / 6 / 2013	
ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ:	
.....	

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 10

B. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α .

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας τη λέξη "Σωστό" αν η πρόταση είναι σωστή και "Λάθος" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: Γ1, Γ2, Γ3, Γ4 και Γ5.

Γ1. Αν δύο ευθείες έχουν ίσες κλίσεις, τότε είναι πάντα παράλληλες.

Γ2. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει πάντα ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Γ3. Αν για τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει πάντα $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Γ4. Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε ισχύει πάντα $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Γ5. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει πάντα

$$\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να λύσετε την ανίσωση $|4 - x| \leq 6$.

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3} \geq \omega - 7$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x - 4|}{2} - \frac{2|4 - x|}{3} \geq |x - 4| - 7$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 + |k^2 - 1|$, $g(x) = 2x + 5$, όπου $k \in \mathbb{R}$ και ο

αριθμός $\lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 3$.

Μονάδες 6

β) Αν το σημείο $A(1, \lambda)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k .

Μονάδες 6

γ) Αν $k = \sqrt{3}$, να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .

Μονάδες 6

δ) Αν $k = \sqrt{3}$, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 - \lambda x - 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 6

β) Αν οι x_1, x_2 είναι δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να εξετάσετε αν υπάρχουν λ έτσι, ώστε $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{\lambda}$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση f να διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

δ) Αν $\lambda = 1$, να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| + |x^2 + 3| = x^2 + 3x + 12$.

Μονάδες 7

Καλή Επιτυχία

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Παπαβλάχος Ευστάθιος

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Τατάς Βασίλειος

Ψύχαλος Γεώργιος

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012 – 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- A.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 104.
B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 100.
Γ. Γ1. Σ, Γ2. Σ, Γ3. Λ, Γ4. Σ, Γ5. Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

- α)** $|4-x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 4-x \leq 6 \Leftrightarrow -6-4 \leq -x \leq 6-4 \Leftrightarrow -10 \leq -x \leq 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 10 \geq x \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 10.$
- β)** $\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3} \geq \omega - 7 \Leftrightarrow 3\omega - 4\omega \geq 6\omega - 42 \Leftrightarrow 3\omega - 4\omega - 6\omega \geq -42 \Leftrightarrow -7\omega \geq -42 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{-7\omega}{-7} \leq \frac{-42}{-7} \Leftrightarrow \omega \leq 6.$
- γ)** Θέτουμε $\omega = |x-4|$ και αφού $|4-x| = |x-4|$ η ανίσωση γράφεται:
 $\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3} \geq \omega - 7 \Leftrightarrow \omega \leq 6 \Leftrightarrow |4-x| \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 10.$

ΘΕΜΑ 3ο

- α)** $\lambda = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 2\sqrt{2} =$
 $= \frac{\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + 1^2}{\sqrt{2}^2 - 1^2} - 2\sqrt{2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} - 2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 3.$
- β)** Αφού $\lambda = 3$ έχουμε ότι $A(1, 3).$
 Τότε: $A(1, 3) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 + |k^2 - 1| = 3 \Leftrightarrow |k^2 - 1| = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow k^2 - 1 = 2 \text{ ή } k^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow k^2 = 3 \text{ ή } k^2 = -1 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}.$
- γ)** Αν $k = \sqrt{3}$, έχουμε ότι $f(x) = x^2 + 2.$
 Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g , προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3,$
 αφού $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 4 + 12 = 16$ και
- $$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}.$$
- Άρα τα σημεία τομής είναι $A(3, g(3))$ ή $A(3, 11)$ και $B(-1, g(-1))$ ή $B(-1, 3).$
- δ)** Οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , προκύπτουν από τη λύση της ανίσωσης
 $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2 > 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 3,$ αφού

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$\bigcirc$ $-$	$\bigcirc$ $-$	$+$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - \lambda x - 1 = 0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4(-1)(-1) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$.

β) Αν οι x_1, x_2 είναι δύο διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$ **(I)** και από τύπους Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-\lambda}{-1} = -\lambda \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$\text{Τότε} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\lambda}{1} = -\lambda, \text{ άρα η εξίσωση είναι:}$$

$$-\lambda = -\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1, \text{ που απορρίπτονται λόγω της (I).}$$

$$\text{Επομένως δεν υπάρχουν } \lambda \in \mathbb{R} \text{ έτσι, ώστε } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

γ) Η συνάρτηση f να διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2.$$

δ) Αν $\lambda = 1$, εξίσωση $|f(x)| + |x^2 + 3| = x^2 + 3x + 12$ είναι

$$|-x^2 - x - 1| + |x^2 + 3| = x^2 + 3x + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 + x^2 + 3 = x^2 + 3x + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 + x^2 + 3 - x^2 - 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 4,$$

$$\text{αφού } \Delta = (-2)^2 - 4(-8) = 4 + 32 = 36 \text{ και}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}.$$