

7 ^ο Γενικό Λύκειο Περιστερίου	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2013	
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ	
ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΜΗΜΑ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 10 / 6 / 2013	
ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ:	

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f με $f(x) = x$ και $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Β. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας τη λέξη "Σωστό" αν η πρόταση είναι σωστή και "Λάθος" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: **Γ1, Γ2, Γ3, Γ4** και **Γ5**.

Γ1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο A , για το γινόμενο τους ισχύει πάντα ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$, όπου $x \in A$.

Γ2. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$ ισχύει πάντα ότι $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων (n περιττός αριθμός), η διάμεσός τους είναι πάντα η μεσαία παρατήρηση.

Γ4. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Γ5. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Ρίχνοντας 50 φορές ένα τετράεδρο ζάρι προέκυψαν τα αποτελέσματα του πίνακα.

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
1	10					
2	12					
3	16					
4						
Σύνολο						

α) Να μεταφέρετε τον πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων (x_i, v_i) .

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 2,6$ και η τυπική απόκλισή τους είναι $s = \sqrt{1,12}$.

Μονάδες 7

- δ) Ένα δεύτερο δείγμα παρατηρήσεων έχει μέση τιμή 2 και την ίδια τυπική απόκλιση. Να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Μονάδες 3

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right].$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x - 36$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 6(x-3)(x+4)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $4x^3 - 2f(x) + f'(x) = 150x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$. **Μονάδες 5**
- δ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x)}{x^2 - 4}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. **Μονάδες 6**
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f που έχει κλίση ίση με λ έχει εξίσωση $y = -x + 2$. **Μονάδες 6**
- γ) Επιλέγουμε 200 σημεία της ευθείας (ε) του β ερωτήματος, οι τετμημένες των οποίων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 5 και τυπική απόκλιση 1. Πόσα από αυτά τα σημεία έχουν τετμημένη τουλάχιστον 7; **Μονάδες 6**
- δ) Αν οι τετμημένες των σημείων του (γ) ερωτήματος αυξηθούν κατά τη διάμεσο (δ) της κανονικής κατανομής, να αποδείξετε ότι ο συντελεστής μεταβολής των νέων τετμημένων είναι ο μισός του αρχικού. **Μονάδες 7**

Καλή Επιτυχία

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Τατάς Βασίλειος

Ψύχαλος Γεώργιος

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2012 – 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28.

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14.

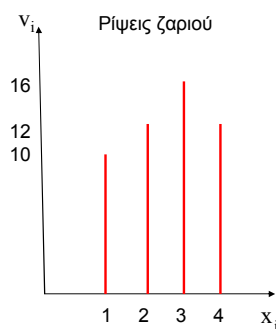
Γ. Γ1. Λ Γ2. Λ Γ3. Λ, Γ4. Σ, Γ5. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
1	10	20	10	20	10	10
2	12	24	22	44	24	48
3	16	32	38	76	48	144
4	12	24	50	100	48	192
Σύνολο	50	100			130	394

β)



$$\gamma) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v} = \frac{130}{50} = 2,6 \text{ και}$$

$$s^2 = \frac{1}{50} \left(394 - \frac{130^2}{50} \right) = \frac{1}{50} \left(394 - \frac{16900}{50} \right) = \frac{1}{50} (394 - 338) = \frac{56}{50} = 1,12,$$

$$\text{άρα } s = \sqrt{1,12}.$$

δ) Έχουμε ότι $CV_x = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1,12}}{2,6}$ και αν Y είναι η μεταβλητή που εκφράζει το

$$\text{δεύτερο δείγμα των παρατηρήσεων έχουμε ότι } CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\sqrt{1,12}}{2}.$$

Συνεπώς $CV_y > CV_x$, οπότε μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το πρώτο δείγμα των παρατηρήσεων.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 72 = 6(x^2 + x - 12) = 6(x - 3)(x + 4), \text{ όπου.}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$4x^3 - 2f(x) + f'(x) = 4x^3 - 4x^3 - 6x^2 + 144x + 72 + 6x^2 + 6x - 72 = 150x.$$

γ) Έχουμε ότι: $f(0) = -36$, $f'(0) = -72$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ είναι:

$$y + 36 = -72(x - 0) \Leftrightarrow y = -72x - 36.$$

δ) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -4.$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-3)(x+4) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \text{ ή } x > 3.$$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	○	+
f(x)		↗	↘	↗	

Συνεπώς:

- η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -4]$,
- η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 3]$,
- η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$,
- η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -4$ το $f(-4) = 172$,
- η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 3$ το $f(3) = -171$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Για x κοντά στο 2, έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-3)}{x+2} = -1.$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x - 5$.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της (ε) με την C_f .

Θα πρέπει $f'(x_0) = -1$, άρα $2x_0 - 5 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 2$ και $f(2) = 0$.

Επομένως η εφαπτομένη (ε) της C_f που έχει κλίση ίση με $\lambda = f'(x_0) = -1$ έχει εξίσωση $y - 0 = -(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

γ) Η γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = \bar{x} = 5$, οπότε τουλάχιστον $\bar{x} + 2s = 7$ έχει το $\frac{100\% - 95\%}{2} = 2,5\%$ των παρατηρήσεων, δηλαδή $2,5\% \cdot 200 = 5$ παρατηρήσεις.

δ) Στην κανονική κατανομή έχουμε ότι $\delta = \bar{x}$, οπότε $\delta = 5$.

Έστω T η μεταβλητή που εκφράζει τις τετμημένες των σημείων που έχουν αυξηθεί κατά $\delta = 5$, δηλαδή $T = X + 5$ με $\bar{t} = \bar{x} + 5 = 10$ και $s_t = s_x = 1$.

$$\text{Τότε } CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \text{ και } CV_t = \frac{s_t}{\bar{t}} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} CV_x.$$