ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

«ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ»

Δημήτρης Μπουνάκης
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
dimitrmp@sch.gr
Ηράκλειο, Νοέμβριος 2009

Κοινή είναι η πεποίθηση ότι δεν νοούνται Μαθηματικά χωρίς ασκήσεις και προβλήματα και ειδικά στο χώρο των σχολικών Μαθηματικών. Παρόλο όμως που δίνουμε μεγάλο βάρος, κυρίως στις ασκήσεις (τεστ, διαγωνίσματα, προαγωγικές εξετάσεις κλπ), συχνά δεν διαθέτουμε στο σχολείο ανάλογο χρόνο για τον σκοπό αυτό, ώστε να καλλιεργηθούν ικανές σχετικές δεξιότητες των μαθητών.
Αυτό οφείλεται κυρίως στην έλλειψη διδακτικού χρόνου, στην πίεση της ύλης αλλά όχι μόνο. Επί πολλά χρόνια υπήρχε και υπάρχει η διδακτική αντίληψη ότι ο μαθητής αρκεί να γνωρίζει τη θεωρία ή και να έχει κατανοήσει κάπως την θεωρία για να γίνει ικανός λύτης. Παρόλο που η εμπειρία δείχνει το αντίθετο, αλλά και οι νεώτερες έρευνες για τη μάθηση έδειξαν ότι αυτή η αντίληψη είναι λανθασμένη, εξακολουθεί να υπάρχει σε ορισμένους δασκάλους. Η γνώση της θεωρίας είναι ασφαλώς μια αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη. Πέρα από την αυτοδύναμη διανοητικότητα κάθε μαθητή (χώρο που δεν μπορούμε άμεσα να επηρεάσουμε) υπάρχει και η εξωτερική επέμβαση-βοήθεια του Καθηγητή που δυστυχώς εγκλωβίζεται μέσα στα στενά χρονικά περιθώρια του διδακτικού χρόνου.
Για να διατίθεται όμως αποτελεσματικά αυτός, ο συνήθως λίγος χρόνος, απαιτείται προγραμματισμός, σχεδίαση και μελέτη από τον Καθηγητή. Οι ασκήσεις πρέπει να επιλέγονται κατάλληλα, ώστε να ανταποκρίνονται στην αντιληπτική ικανότητα και τα ενδιαφέροντα των μαθητών και να αντιμετωπίζονται μέσα από κάποια γενική μεθοδολογία όσο είναι δυνατόν. Η πολύ ειδική μεθοδολογία ή «συνταγοποίηση» μπορεί πρόσκαιρα να δίνει την εντύπωση ότι κάτι «θα καταφέρει» ο μαθητής στην πραγματικότητα όμως τον οδηγεί στην μηχανική μάθηση, με ολέθρια αποτελέσματα τόσο στο επίπεδο της επίδοσης, όσο και στο επίπεδο της κατανόησης και της πνευματικής ανέλιξης. Επίσης πρέπει η διδασκαλία της θεωρίας να γίνεται με τρόπο που να προσφέρει βοήθεια στο μαθητή και προς την κατεύθυνση της κατανόησης αλλά και της λύσης ασκήσεων-προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι, αφ' ενός πρέπει να εξασφαλίζεται η όσο το δυνατό μεγαλύτερη ενεργός συμμετοχή του μαθητή στο μάθημα και αφετέρου ότι ο Καθηγητής με κατάλληλες αναφορές **θα αναδεικνύει τα σημεία της θεωρίας που θα αποτελέσουν τα μελλοντικά εργαλεία για λύση ασκήσεων ή προβλημάτων** (μεταφορά μάθησης). Για παράδειγμα μετά τη απόδειξη μιας πρότασης (θεώρημα, πόρισμα, κανόνας κλπ) μια χρήσιμη και δυναμική ερώτηση είναι

«Τι δυνατότητες μας δίνει το θεώρημα (πρόταση, ιδιότητα κλπ) αυτό; Που μπορεί να μας βοηθήσεις;»

Παράδειγμα 1: Γεωμετρία Α΄ Λυκείου (εν μέρει και στην Α΄ Γυμνασίου)

Στο θεώρημα για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου. Εκτός της καθ' αυτό γνώσης του θεωρήματος που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε και τη σταθερότητα του αθροίσματος των γωνιών, ανεξαρτήτως μεγέθους (περίμετρο, εμβαδόν) τριγώνου, μας δίνει τις δυνατότητες (εκτός των πορισμάτων):

- Αν γνωρίζουμε δυο γωνίες μπορούμε να υπολογίσουμε την τρίτη.
- Αν γνωρίζουμε μια γωνία μπορούμε να βρούμε το άθροισμα των άλλων δυο.
- Μπορούμε να εκφράσουμε μια γωνία συναρτήσει των υπολοίπων.
- Μα δηλώνει ότι κάθε γωνία τριγώνου είναι παραπληρωματική του αθροίσματος των άλλων δυο.
- Μας δηλώνει ότι το ημιάθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 90^o κλπ.

Παράδειγμα 2: Γεωμετρία Α΄ Λυκείου (και Γ΄ Γυμνασίου)

Τι τα θέλουμε τα κριτήρια ισότητας; Τι δυνατότητες μας δίνουν;

- Να συγκρίνουμε δυο τρίγωνα (χωρίς να είμαστε υποχρεωμένοι να τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο).
- Να συγκρίνουμε δυο τμήματα (υποψήφιες πλευρές τριγώνων) χωρίς να τα μετρήσουμε.
- Να συγκρίνουμε δυο γωνίες (υποψήφιες γωνίες τριγώνων) χωρίς να τις μετρήσουμε (με το μοιρογνωμόνιο).

(Η σύγκριση γωνιών και τμημάτων θα συμπληρωθεί αργότερα με τα θεωρήματα των παραλλήλων και των κριτηρίων - ιδιοτήτων των παραλληλογράμμου).

Παράδειγμα 3: Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Στο θεώρημα για τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και διερεύνησης των ριζών της (Άλγεβρα, σελ. 118). Δυνατότητες:

- Μπορούμε να αποφαινόμαστε για την ύπαρξη ριζών και το είδος των ριζών της εξίσωσης εξετάζοντας μόνο την διακρίνουσά της.

- Οι συνθήκες δεν είναι μόνο ικανές αλλά και αναγκαίες. Έτσι εκφράζουνε μια ακριβώς ισοδύναμη κατάσταση σε μαθηματική γλώσσα.

Η αντιμετώπιση των θεωρημάτων και γενικά της θεωρίας μέσα από μια τέτοια αντίληψη, δίνει ένα δυναμικό χαρακτήρα στην διδασκαλία μας, αφού δεν την βλέπει σαν μια συρραφή απλών γνώσεων που πρέπει να απομνημονευτούν μηχανικά, ή στη καλύτερη περίπτωση να κατανοηθούν πρόσκαιρα, αλλά σαν ένα εργαλείο, για παραπέρα μάθηση.
Ένα σπουδαίο βήμα βοήθειας για την λύση ασκήσεων και προβλημάτων, κυρίως στο Λύκειο, μας προσφέρει το περίφημο βιβλίο του *G. Pólya* **«Πώς να το λύσω».**
O George (György) Pólya (1887-1985)) ήταν Ούγγρος διαπρεπής Μαθηματικός και μέσα στα ποικίλα ενδιαφέροντα του, στον χώρο κυρίως των ανωτέρων Μαθηματικών, ήταν ευτυχώς, και η διδασκαλία των Μαθηματικών και φαίνεται ότι το βιβλίο αυτό, ήταν η απάντησή του στο ερώτημα που συχνά τον βασάνιζε :

«Ναι, η λύση είναι μάλλον αποτελεσματική, φαίνεται να είναι σωστή, πως είναι δυνατόν όμως να επινοήσουμε μια τέτοια λύση;».

Το βιβλίο πρωτοεκδόθηκε το 1954 αλλά παραμένει πάντα επίκαιρο. Αποτέλεσε διεθνώς σταθμό στη Μαθηματική εκπαίδευση, τόσο, ώστε μερικοί να μιλούν για λύση (σχολικών ή μη) προβλημάτων πριν το βιβλίο αυτό και λύση προβλημάτων μετά από αυτό. Το 1960 μεταφράστηκε από το Υπουργείο Παιδείας και δόθηκε δωρεάν στους Καθηγητές Μαθηματικών των σχολείων της χώρας μας, ενώ επανακυκλοφόρησε (σε μετάφραση) το 1998 σε νέα έκδοση (εκδόσεις Καρδαμίτσα, επιμέλεια Τ. Πατρώνης). Θεωρώ απαραίτητο να διαβαστεί από κάθε Καθηγητή Μαθηματικών. Όλο το βιβλίο περιστρέφεται γύρω από ένα **κατάλογο ερωτήσεων-υποδείξεων- νύξεων** που έχουν σκοπό να βοηθήσουν το μαθητή και γενικά τον λύτη ενός προβλήματος, προπάντων Γεωμετρικού. Όλες αυτές οι ερωτήσεις μπορούν να γίνουν στις τέσσερις φάσεις που γενικά μπορούμε να διακρίνουμε κατά την λύση ενός προβλήματος:

Πρώτη φάση: πρέπει να κατανοήσουμε το πρόβλημα, να ξεκαθαρίσουμε **πρώτα** τι μας ζητάει **και μετά** τι μας δίνει (δεδομένα).

Δεύτερη φάση: να σκεφτούμε πως συνδέονται και συσχετίζονται τα δεδομένα με το ζητούμενο ώστε να συλλάβουμε την ιδέα της λύσης, να φτιάξουμε ένα σχέδιο λύσης. Στη φάση αυτή μας ενδιαφέρουν τα «μεγάλα βήματα» και όχι οι λεπτομέρειες.

Τρίτη φάση: Εκτελούμε το σχέδιο.

Τέταρτη φάση: Ξανακοιτάζουμε τη λύση, κάνουμε μια ανασκόπηση και ίσως διερεύνηση και ελέγχουμε μήπως υπάρχει συντομότερη (ή κομψότερη) λύση.

Οι ερωτήσεις-υποδείξεις του καταλόγου είναι χρήσιμες:
Α. Για το καθηγητή, για να ενεργοποιήσει την σκέψη των μαθητών όταν αυτοί εργάζονται μέσα στην τάξη (θεώρημα – άσκηση - πρόβλημα). Ο Καθηγητής αρχίζει με γενικές ερωτήσεις από τον κατάλογο ή άλλες (λιγότερη βοήθεια) και ανάλογα με την πρόοδο των μαθητών και τον διαθέσιμο χρόνο προχωρά σε πιο ειδικές ερωτήσεις (περισσότερη βοήθεια). Απώτερος στόχος να εθιστούν οι ίδιοι να κάνουν τις ερωτήσεις αυτές στον εαυτό τους.
Β. Όταν ο καθηγητής επιλέξει να λύσει ο ίδιος την άσκηση μέσα τη τάξη. Όπως λέει ο Polya «όταν ο δάσκαλος λύνει το πρόβλημα μπροστά στην τάξη, θα πρέπει να το παρουσιάζει και λίγο με θεατρικό τρόπο και να κάνει στον εαυτό του τις ίδιες ερωτήσεις που κάνει στους μαθητές του, για να τους βοηθήσει. Χάρη σε μια τέτοια καθοδήγηση ο μαθητής θα ανακαλύψει τελικά τη σωστή χρήση των ερωτήσεων και όταν το κατορθώσει αυτό θα έχει αποκτήσει κάτι πολύ πιο σημαντικό για τα Μαθηματικά και τη ζωή από οποιαδήποτε ειδική Μαθηματική γνώση».
Γ. Για τον οποιοδήποτε λύτη ασκήσεων – προβλημάτων Μαθηματικών και μη (μαθητή, φοιτητή, καθηγητή).

Η συχνή χρήση τους, ιδίως των 4 πρώτων, έχει ανεπανάληπτη διδακτική αξία στη σχολική πράξη γιατί ενισχύει τις νοητικές διεργασίες στη κατεύθυνση λύσης του προβλήματος.
Από το βιβλίο αυτό σε δική μου διασκευή, για τις συνήθεις σχολικές ανάγκες προέρχεται ο επόμενος κατάλογος που έχει διαχωριστεί σε αποδεικτικά προβλήματα και προβλήματα εύρεσης (στο βιβλίο υπάρχει ένας κατάλογος) που έχουν όμως πολλές ομοιότητες.

Κ Α Τ Α Λ Ο Γ Ο Σ

Γενικών Ερωτήσεων -Υποδείξεων - Νύξεων χρήσιμων στην αντιμετώπιση Μαθηματικών (και όχι μόνο) προβλημάτων.

Α. ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

1. Ποιο είναι το **συμπέρασμα**; Ποια είναι η υπόθεση (δεδομένα);

2. Σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα (με τη γενική έννοια: π.χ. μια κατάταξη δεδομένων και ζητούμενων). Χρησιμοποιήσετε κατάλληλο συμβολισμό.

---

3. Έχετε ξανασυναντήσει ίδιο ή παρόμοιο πρόβλημα;

4. **Προσέξτε το συμπέρασμα και προσπαθήστε να σκεφθείτε γνωστό ορισμό ή θεώρημα ή πόρισμα ή κανόνα ή εφαρμογή με το ίδιο ή παρόμοιο συμπέρασμα**.

---

5. Θα μπορούσατε να ξαναδιατυπώσετε το πρόβλημα ή να αναδιατυπώσετε το πρόβλημα;

6. Μήπως μπορείτε να βγάλετε κάτι χρήσιμο από την **υπόθεση**;

7. Προσπαθήστε να βρείτε κάποιο τρόπο σύνδεσης της υπόθεσης και του συμπεράσματος.

8. (*) Θα μπορούσατε να σκεφθείτε μια άλλη υπόθεση από την οποία θα ’ταν δυνατό ευκολότερα να φθάσετε στο συμπέρασμα;

9. (*) Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα, λύσετε πρώτα ένα ειδικότερο ή γενικότερο ή ανάλογο σχετικό πρόβλημα.

10. Χρησιμοποιήσατε ολόκληρη την υπόθεση;

11. (*) Μήπως μπορείτε να αλλάξετε την υπόθεση ή το συμπέρασμα, ώστε η νέα υπόθεση και το νέο συμπέρασμα να βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους;

12. Μπορείτε να βρείτε μια διαφορετική λύση; Μια πιο σύντομη λύση;

(*) Για πιο δύσκολα προβλήματα

Β. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ

1. Ποιο είναι το **ζητούμενο**; Ποια είναι τα **δεδομένα**;

2. Σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα (με τη γενική έννοια: π.χ. μια κατάταξη δεδομένων και ζητούμενων) και χρησιμοποιήσετε κατάλληλο συμβολισμό. Μετατρέψετε τα δεδομένα και τα ζητούμενα σε Μαθηματική γλώσσα. Μήπως μπορείτε να βρείτε την εξίσωση του προβλήματος;

---

3. Έχετε ξανασυναντήσει ίδιο ή παρόμοιο πρόβλημα;

4. **Προσέξτε το ζητούμενο**! Μήπως γνωρίζετε κανένα σχετικό ορισμό, θεώρημα ή πόρισμα ή εφαρμογή ή κανόνα από την θεωρία που θα ήταν χρήσιμος.

---

5. Θα μπορούσατε να ξαναδιατυπώσετε το πρόβλημα ή να αναδιατυπώσετε το πρόβλημα;

6. Χρησιμοποιήστε όλα τα δεδομένα; Χρησιμοποιήστε ολόκληρη την συνθήκη; Λάβατε υπόψη σας όλες τις βασικές έννοιες που περιέχει το πρόβλημα;

7. Θα μπορούσατε να σκεφθείτε άλλα δεδομένα κατάλληλα για τον προσδιορισμό του ζητούμενου;

8. (*) Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα, λύσετε πρώτα ένα ειδικότερο ή γενικότερο ή ανάλογο σχετικό πρόβλημα.

9. Αναφερθήκατε σ’ όλες τις περιπτώσεις του προβλήματος; (διερεύνηση)

10. Μπορείτε να βρείτε μια διαφορετική λύση; Μια πιο σύντομη λύση;

(*) Για πιο δύσκολα προβλήματα

* * *

"*Αν δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα, υπάρχει τότε ένα ευκολότερο πρόβλημα που δεν μπορείς να λύσεις, βρες το!*".

* * *

"*Η ανθρώπινη υπεροχή συνίσταται στη έμμεση αντιμετώπιση ενός εμποδίου το οποίο δεν μπορεί να νικηθεί ευθέως*".

G. POLYA

Ο παραπάνω κατάλογος είναι χρήσιμο να δίνεται στην αρχή κάθε χρόνου σε φωτοτυπία στους μαθητές του Λυκείου και να συνοδεύεται με τις σχετικές διευκρινήσεις. Επίσης σημαντικό είναι να επισημαίνονται οι ερωτήσεις-υποδείξεις του κατά την διάρκεια που λύνεται μια άσκηση μέσα στη τάξη.

Χαρακτηριστικά των ερωτήσεων του καταλόγου

1. Γενικότητα

Είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ερωτήσεων-υποδείξεων, σε αντιδιαστολή από τις γνωστές υποδείξεις τύπου συνταγών (που εγκλωβίζουν την σκέψη σε στενά πλαίσια), π.χ. *Ποιο είναι το ζητούμενο*; *Ποια είναι τα δεδομένα*; *Ποια είναι η συνθήκη*;

2. Κοινή λογική

Εκτός από τη γενικότητά τους οι ερωτήσεις είναι *φυσικές*, *απλές* και προέρχονται από μια *κοινή λογική*, π. χ. Προσέξτε το ζητούμενο και προσπαθήστε να σκεφτείτε ένα γνωστό θεώρημα ή πόρισμα κλπ που να έχει το ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο.

Η Μέθοδος των Ερωτήσεων του Καθηγητή

Στην αρχή ο Καθηγητής πρέπει απαραίτητα να αφήνει λίγο χρόνο στους μαθητές, ανάλογα με τη δυσκολία της άσκησης ή του προβλήματος, για να την κατανοήσουν, να «πάθουν» και να σκεφτούν κάποιο τρόπο- σχέδιο λύσης. Αν δεν υπάρξει εποικοδομητική σκέψη και σχέδιο, αρχίζει την βοήθεια από τις πρώτες γενικές ερωτήσεις-υποδείξεις (από αυτές του καταλόγου ή άλλες) και προχωρεί σε ποιο ειδικές ερωτήσεις ανάλογα με την πρόοδο των μαθητών και τον διαθέσιμο χρόνο, μέχρι να υπάρξει κάποια ανταπόκριση από τους μαθητές. Να σημειώσουμε εδώ ότι, όταν δίνονται οι ερωτήσεις του καταλόγου δεν ζητάμε άμεσα απάντηση από τον μαθητή, αφού έχουν την μορφή *υποδείξεων ή νύξεων* και συνεπώς έχουν σκοπό να *κινητοποιήσουν τη σκέψη των μαθητών* προς μια θετική κατεύθυνση καθώς αυτοί εργάζονται. Απάντηση θα πάρουμε όταν υπάρχει μια κάπως ολοκληρωμένη πρόταση από το μαθητή.
Ας σημειωθεί ότι όπως έχει δείξει η εμπειρία οι 4 πρώτες ερωτήσεις και ιδίως η $4^{η}$, είναι «αρκετές» για ένα μεγάλο πλήθος σχολικών προβλημάτων όλων των τάξεων Γυμνασίου και Λυκείου. Εννοείται βέβαια ότι χωρίς γνώση και κατανόηση προηγουμένων βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων δεν μπορούμε να συζητάμε για λύση απλών ή σύνθετων ασκήσεων οποιαδήποτε βοήθεια και να δώσουμε.

Παραδείγματα Εφαρμογής των Ερωτήσεων - Υποδείξεων

Η εμπειρία έχει δείξει ότι ο παραπάνω κατάλογος αποτελεί μια βάση για βοήθεια στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων μαθηματικών ή μη, αλλά δεν είναι πανάκεια, ούτε μοναδικός. Υπάρχουν ανάλογα με το πρόβλημα και το λύτη και άλλες ερωτήσεις ή υποδείξεις, κυρίως ειδικότερες, που μπορούν να βοηθήσουν στη λύση. Στα παρακάτω παραδείγματα χρησιμοποιήσουμε τις ερωτήσεις του καταλόγου αλλά και άλλες, που η εμπειρία έχει αναδείξει ως αποτελεσματικές, π.χ

- ❖ *Με ποια μέθοδο σκέπτεστε να αποδείξετε (το συμπέρασμα)*; (ευθεία απόδειξη, ανάδρομη πορεία, έμμεση απόδειξη -άτοπος απαγωγή).

- ❖ *Εξετάστε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις μεθόδους που γνωρίζουμε για την απόδειξη π.χ. ταυτοτήτων (ή ανισοταυτοτήτων).*

- ❖ *Εξετάστε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις μεθόδους που γνωρίζουμε για την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτηση, κλπ.*

Στα παρακάτω παραδείγματα οι ερωτήσεις –υποδείξεις προχωρούν από τις γενικότερες στις ειδικότερες. Με βέλη σημειώνουμε τις ερωτήσεις του καταλόγου ή άλλες γενικές ερωτήσεις, ενώ με κουκίδες τις ειδικές ερωτήσεις που πρέπει να γίνουν όταν αποτυγχάνουν οι γενικές ερωτήσεις ή δεν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος.

1. Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Να λυθεί η εξίσωση $(\psi - 2)\psi^2 + 4\psi(\psi - 2) + 4\psi - 8 = 0$.

- ➢ Έχετε ξαναλύσει παρόμοια εξίσωση; (…όχι)
- ➢ Γνωρίζετε ένα γενικό τρόπο λύσης εξισώσεων;
- • Παραγοντοποιείστε το πρώτο μέλος.

2. Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Άσκηση 16, σελ. 196.
Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι γωνίες Β, Δ είναι ορθές και ΑΒ =ΑΔ. Να αποδείξετε ότι α) ΒΓ=ΓΔ και β) η ΑΓ είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΒΔ.

Ερώτημα (α)

- ➢ Ποιο είναι τα συμπέρασμα; Ποια τα δεδομένα;
- ➢ Με ποιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι δυο τμήματα είναι ίσα;
- • Δημιουργήσετε κατάλληλα τρίγωνα για σύγκριση.

Ερώτημα (β)

- ➢ Γνωρίζετε κάποια ιδιότητα της μεσοκαθέτου τμήματος;
- • Η μεσοκάθετη του ΒΔ διέρχεται από το Α; μήπως και από το Γ;
- • Έχει σχέση η μεσοκάθετη του ΒΔ με την ευθεία ΑΓ ;

3. Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Ι. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι

$\alpha^2 + 5\beta^2 + 1 \geq 2\beta(2\alpha + 1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

- Έχετε αποδείξει παρόμοια ανισοταυτότητα;
- Ποιες μεθόδους έχουμε μάθει για να αποδεικνύουμε ανισοταυτότητες;
- Φέρετε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και προσέξετε την παράσταση που διαμορφώθηκε.

ΙΙ. Αν α, β, γ μήκη πλευρών τριγώνου και ισχύει $\frac{\alpha-\beta}{\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}=0$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

- Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια είναι τα δεδομένα;
- Γνωρίζετε κάποιο σχετική πρόταση; (…όχι)
- Θα μπορούσατε να σκεφτείτε μια άλλη υπόθεση από την οποία θα ήταν ευκολότερο να φτάσετε στο συμπέρασμα (ή μπορείτε να γράψετε το συμπέρασμα σε μαθηματική γλώσσα; (ναι, στην εξίσωση $((\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0)$
- Μπορείτε να βγάλετε κάτι χρήσιμο από τη δεδομένη σχέση;
- Απαλείψετε τους παρανομαστές …
- παραγοντοποιήστε το πρώτο μέλος…

ΙΙΙ. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε η εξίσωση $\chi^2 - 2\chi + 4\lambda^2 - 3 = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες.

Σημείωση: σε τέτοιου είδους προβλήματα ουσιαστικά ζητούμε όλες τις τιμές της παραμέτρου για να ισχύουν κάποιες συνθήκες. Η εύρεση αυτών των τιμών γίνεται υποθέτοντας ότι ισχύουν οι συνθήκες (εξισώσεις, ανισώσεις, συστήματα) και με αντιστρεπτά βήματα (ισοδυναμίες) φτάνουμε στο ζητούμενο (μέθοδος Ανάλυσης – Σύνθεσης ή ανάδρομης πορείας).

Ερωτήσεις - υποδείξεις :

- Ποιο είναι το ζητούμενο; Τι θέλουμε να συμβαίνει; (ποια συνθήκη να ισχύει;)
- Γνωρίζετε κάποιο θεώρημα σχετικό με τις ρίζες της β/θμιας εξίσωσης;
- Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει πραγματικές ρίζες;

4. Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ι. Σελίδα 48, αποδεικτική άσκηση 4: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΒΔ. Από το Δ φέρνουμε ΔΕ κάθετη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

Ερωτήσεις - υποδείξεις :

- ➢ Φτιάξτε ένα σχήμα (με παράσταση των δεδομένων).
- ➢ Τι θέλουμε να δείξουμε;
- Από το σχήμα ποιες πλευρές φαίνονται να είναι ίσες; (ΒΖ = ΒΓ).

- ➢ Έχετε ξαναδεί παρόμοιο ζητούμενο;
- Πως αποδεικνύουμε ότι δυο τμήματα είναι ίσα; (κάποιο κριτήριο ισότητας)
- Επιλέξετε κατάλληλα τρίγωνα για σύγκριση.
- (Μη διδακτική ερώτηση : συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΖΔ, ΒΔΓ ή τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΔΕΓ, αν πάμε με άλλο τρόπο)
- ➢ Χρησιμοποιήσετε ολόκληρη την υπόθεση; (ΒΔ διχοτόμος…)
- Τι θα θέλαμε ακόμη να' χουν τα τρίγωνα αυτά;

ΙΙ. Θεώρημα: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο (Α ορθή) και ΑΜ η διάμεσος προς την υποτείνουσα.
(κύριος στόχος είναι η ιδέα θεώρησης και του μέσου της ΑΓ ή της ΑΒ).

Ερωτήσεις - υποδείξεις:

- ➢ Ποιο είναι το ζητούμενο; Διαφορετικά (ισοδύναμα) ΑΜ = ΜΓ ή ΑΜ = ΒΜ)
- ➢ Γνωρίζετε κάποιο θεώρημα σχετικό με το ζητούμενο; (…όχι)
- ➢ Θα μπορούσατε να βγάλετε κάτι χρήσιμο από τα **δεδομένα**;
  Πως θα αξιοποιήσουμε το μέσο του ΒΓ;
- ➢ Γνωρίζετε κάποιο θεώρημα σχετικό με τα μέσα πλευρών τριγώνου;
- Ναι, αλλά έχουμε ένα μόνο μέσο…

5. Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ι. Παρ.9.4, σχ. βιβλίου, σελ. 194, αποδεικτική άσκηση 4.

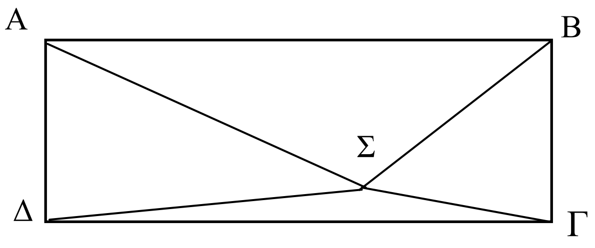
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ορθή). Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $Β\Delta^2 = 2ΒΓ\cdot Α\Delta$.

Ερωτήσεις - υποδείξεις :

- ➢ Γνωρίζετε κάποιο σχετικό θεώρημα (για το τετράγωνο της ΒΔ, θεώρημα οξείας, αμβλείας, ορθής, ναι αλλά να εμφανίζεται και η ΒΓ κλπ)

ΙΙ. Πρόβλημα μετά τη Γενίκευση Πυθ. Θεωρήματος.

Στο παρακάτω ορθογώνιο είναι ΣΑ=14cm, ΣΔ=10cm, ΣΓ=5cm. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΣΒ. (*Προσδιορίζονται οι διαστάσεις του ορθογωνίου;)



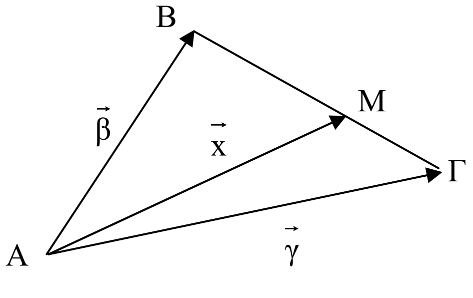
- Γνωρίζετε κάποιο σχετικό θεώρημα;
- Πρέπει να δημιουργήσουμε τρίγωνα…δοκιμάστε.
- Φέρετε από το Σ παράλληλη στηνΒΓ….

(* Δεν προσδιορίζονται: ξεκινώντας με ένα τμήμα ΓΔ με 5<ΓΔ<15 μπορείτε να κατασκευάσετε πολλά ορθογώνια με τις δοθείσες αποστάσεις. Πώς;…)

6. Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ι. Διανύσματα, σελ.26 (σχ. βιβλίου), άσκηση 3.

Αν στο διπλανό σχήμα είναι (ΒΜ) = 2(ΜΓ) , να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$.



Ερωτήσεις - υποδείξεις :

- Προσέξτε το ζητούμενο. Μπορείτε να το διατυπώσετε διαφορετικά (πιο γενικά);
  (εκφράζει το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$)
- Γνωρίζετε κάποια πρόταση σχετική με το ζητούμενο; (…όχι)
- Μήπως μπορείτε να βγάλετε κάτι (χρήσιμο) από την υπόθεση;
- Προσπαθήστε να διατυπώσετε διαφορετικά (διανυσματικά) την υπόθεση.

ΙΙ. Διανύσματα, σελ. 40 (σχ. βιβλίου), άσκηση 4.

Αν x, y, α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in R$ να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2} + \sqrt{(x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2} \geq \sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2 + (\beta_2-\beta_1)^2} \, .$$

Ερωτήσεις - υποδείξεις :

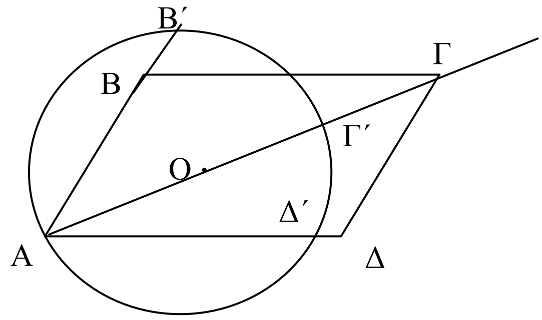
- Γνωρίζετε κάποια σχετική πρόταση ή ιδιότητα; (…όχι)
- Προσέξτε την παράσταση $\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}$. Σας φέρνει στη σκέψη κάτι γνωστό; Τι εκφράζει η παράσταση αυτή ;

III. Εσωτερικό Γινόμενο, άσκηση 6, σελ. 51(σχ. βιβλίου).

Κύκλος κέντρου Ο διέρχεται από την κορυφή Α του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και τέμνει την ΑΒ στο Β΄, την ΑΔ στο Δ΄και την ΑΓ στο Γ΄.
Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$**.**

- Αν δεν μπορείτε να λύσετε ένα πρόβλημα, λύσετε πρώτα ένα ειδικότερο**:**

Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται πάνω στην διαγώνιο ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$**.**



- Γνωρίζετε κάποια πρόταση κλπ σχετική με το ζητούμενο; (…όχι)
- Γνωρίζετε κάποια πρόταση σχετική με το γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}$; (Πρόταση προβολής)
- Φέρετε την Β΄Γ΄ και Γ΄Δ΄. Ποια είναι η προβολή του Γ΄ στην ΑΒ; κλπ)

Μετά τη λύση του ειδικού προβλήματος μπορούμε να μεταβούμε στο γενικό και τότε θα είναι πιο ορατή η βοηθητική ευθεία-διάμετρος από το Α.

IV. Ευθεία- Πρόβλημα 6, σελ.70 (σχ. βιβλίου).

Δίνεται η ευθεία 3χ+ψ = 3 και το σημείο. Α(1, 2). Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του Α στην ευθεία αυτή.

- Φτιάξτε ένα τυπικό σχήμα. Συμβολίσετε τις συντεταγμένες της προβολής Α΄.
- Έχετε ξανασυναντήσει παρόμοιο πρόβλημα;
- Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες της προβολής Α΄;
- Είναι αυτές οι συνθήκες και ικανές (εκτός από αναγκαίες) για να ορίσουν το Α΄;

7. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

I. Έστω ζ, ω μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $|\zeta + \omega| = |\zeta| = |\omega|$. Να αποδείξετε ότι $|\zeta - \omega| = \sqrt{3}\,|\zeta|$.

Για την λύση υπάρχουν -ως συνήθως στους μιγαδικούς αριθμούς- δυο δρόμοι: ο αλγεβρικός και ο γεωμετρικός που συνήθως είναι ευκολότερος. Αν θέλουμε να εργαστούμε αλγεβρικά θα εστιάσουμε τις ερωτήσεις μας στη απαλλαγή από τα μέτρα του ζητούμενου και των δεδομένων. Αν θέλουμε να πάμε Γεωμετρικά τότε:
Ερωτήσεις - υποδείξεις :

- Προσέξτε το ζητούμενο και τα δεδομένα.
- Τι εκφράζουν τα δεδομένα και το ζητούμενο σε γεωμετρική γλώσσα (αναδιατύπωση προβλήματος); Ή τι σημαίνουν γεωμετρικά τα δεδομένα και το ζητούμενο;
- Μήπως μπορείτε να βγάλετε κάτι χρήσιμο από την υπόθεση;

II. Έστω ζ, ω μη μηδενικοί μιγαδικοί τέτοιοι ώστε $\zeta \cdot 3^{|\zeta|} + \omega \cdot 3^{|\omega|} = (\zeta + \omega) \cdot 3^{|\zeta + \omega|}$,
Να αποδειχθεί ότι $\frac{\zeta}{\omega} \in R$ ή $|\zeta + \omega| = |\zeta| = |\omega|$.
Ερωτήσεις - υποδείξεις-

- Γνωρίζετε κάποιο στοιχείο από τη θεωρία που να είναι σχετική με το ζητούμενο (…όχι)
- Μήπως μπορείτε να βγάλετε κάτι (χρήσιμο) από την υπόθεση;
- Λύστε ως προς ζ ή προσπαθήστε να σχηματίστε το λόγο ζ/ω)

III . Γ΄ Λυκείου –Ανάλυση.

Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x + xe^{x-1} = \lambda$ έχει λύση στο διάστημα (0, 1);

Ένας τρόπος είναι να εργαστούμε μέσω του συνόλου τιμών συνάρτησης και να χρησιμοποιήσουμε το σχετικό θεώρημα μονοτονίας και συνέχειας. Πως όμως θα έλθει στη σκέψη των μαθητών το σύνολο τιμών με την βοήθεια του καθηγητή;

- Έχετε ξαναδεί παρόμοιο ζητούμενο (..όχι)
- Προσπαθήσετε να διατυπώσετε το ζητούμενο διαφορετικά.
- Προσπαθήσετε να διατυπώσετε το ζητούμενο με «συναρτησιακή γλώσσα»
- Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $\varphi(x) = x + xe^{x-1}$, πως αναδιατυπώνεται το πρόβλημα;
- …Δηλαδή το λ θα πρέπει (και αρκεί) να ανήκει στο …σύνολο τιμών της φ...

IV. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

Ερωτήσεις - υποδείξεις:

- χρησιμοποιήσετε κατάλληλο συμβολισμό. Μετατρέψετε τα δεδομένα και τα ζητούμενα σε Μαθηματική γλώσσα. Μήπως μπορείτε να βρείτε τις εξισώσεις του προβλήματος ($f(\xi) = g(\xi)$, $f'(\xi) = g'(\xi)$);
- Χρησιμοποιήστε όλα τα δεδομένα; Χρησιμοποιήστε όλες τις συνθήκες, ;
- Λάβατε υπόψη σας όλες τις βασικές έννοιες που περιέχει το πρόβλημα;

V. Σε πολλά προβλήματα με ρυθμό μεταβολής μια πολύ χρήσιμη υπόδειξη είναι:

- Μετατρέψτε τα δεδομένα και τα ζητούμενα σε Μαθηματική γλώσσα (ή αντίστροφα).
- Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη του προβλήματος.

VI. Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$, $x \in R$.

Ερωτήσεις - υποδείξεις:

- Γνωρίζετε κάποια σχετική πρόταση; (…ναι)
- Βρείτε λοιπόν την παράγωγο της $f(x)$
- Προσέξτε την παράγωγο, τι μας ενδιαφέρει για τη μονοτονία, τι πρέπει να βρούμε;
- (πιο ειδική υπόδειξη) εξετάστε το πρόσημό της παραγώγου.

VII. ΘΕΜΑ 2^o (Επαν/κών. Πανελ/ων 2004)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in R$, $m > 0$.
α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.
β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(α). Ερωτήσεις - υποδείξεις:

- Ποιο είναι το ζητούμενο;
- η ανισότητα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, σας φέρνει στη σκέψη κάτι σχετικό από τη θεωρία;
- Μήπως αν το μηδέν -του δεύτερου μέλους- είναι τιμή της συνάρτησης;
- Διατυπώσετε διαφορετικά τη συνθήκη $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.
- Γνωρίζετε κάποια σχετικό θεώρημα;
- Είστε σίγουροι ότι για τη τιμή αυτή του m ισχύει η συνθήκη; (πρέπει να εξασφαλιστεί το ελάχιστο της `f`: η `f` είναι γν. αύξουσα με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ κλπ)
- **(β)** Ποιος τύπος μας δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γ.π. μιας συνάρτησης f τον χ-άξονα και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$;

VIII. ΘΕΜΑ 4^{o} (Πανελ/ων 2006)

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$, $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in [0, 1]$

Α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

Ερωτήσεις – Υποδείξεις.

Ερώτημα Α.

- Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια τα δεδομένα;
- Γνωρίζετε κάποια σχετική πρόταση (με ανισότητα ολοκληρώματος) από την θεωρία ; (…το πόρισμα της σελίδας 332).

Ερώτημα Β.

- Αναδιατυπώσετε (με αντικατάσταση) το ζητούμενο (…. $\int_0^x (f(x) - f(t))g(t)dt > 0$)
- Γνωρίζετε κάτι σχετικό (με ανισότητα ολοκληρώματος) από την θεωρία; (το πόρισμα της σελίδας 332), (ενδέχεται η απάντηση ενός μαθητή να είναι κάποιος από τους γενικούς τρόπους απόδειξης ανισοτήτων του διαφορικού λογισμού: ωραία λοιπόν…παραγωγίσετε και την μη (δοθείσα) παραγωγίσιμη συνάρτηση f !!).
- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα; (f γν. αύξουσα, για να χρησιμοποιηθεί το πόρισμα)

Ερώτημα Γ.

- Διατυπώσετε το ζητούμενο διαφορετικά (με γλώσσα συναρτήσεων).
- Ποιος ο ρόλος του 1 στο ζητούμενο για την συνάρτηση F/G ;
- Θέλουμε να δείξουμε ότι το 1 είναι η μέγιστη τιμή της F/G κλπ
- Εξετάσετε τα ακρότατα της F/G.

———

Με χαρά θα δεχθώ τις παρατηρήσεις σας από την χρήση των ερωτήσεων-υποδείξεων του καταλόγου στην διδασκαλία σας και γενικά τις απόψεις σας για το θέμα που αναφέρθηκα παραπάνω, καθώς και δικά σας παραδείγματα εφαρμογής. Η πειραματική εφαρμογή, η κριτική και η ανατροφοδότηση, είναι μερικά από τα μέσα για πιο αποτελεσματική διδασκαλία.-