

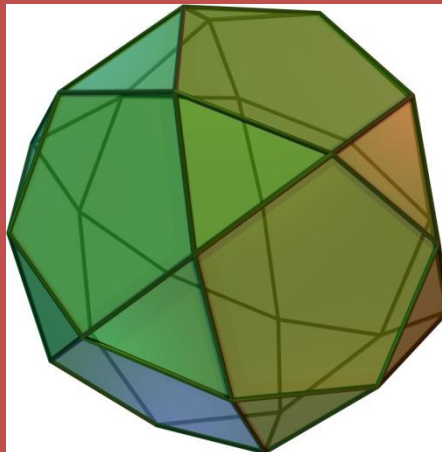
ΑΝΤΩΝΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΩΣΤΑ ΣΕΡΙΦΗ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2009



ΑΝΤΩΝΗΣ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΩΣΤΑ ΣΕΡΙΦΗ

www.mathematica.gr

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2009

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Στην εργασία αυτή παραθέτω χρήσιμες επισημάνσεις στις βασικές έννοιες των πραγματικών συναρτήσεων και δίνω παραδείγματα εφαρμογής.

Στο τέλος παραθέτω μια σειρά ασκήσεων, πολλές από τις οποίες έχω φτιάξει ο ίδιος.

- Έχω τη γνώμη ότι η πλήρης κατανόηση των βασικών εννοιών στις συναρτήσεις, είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την περαιτέρω απρόσκοπτη μελέτη τους.
- Στο τέλος της εργασίας παρατίθενται υποδείξεις και απαντήσεις των ασκήσεων, τις οποίες έγραψε ο φίλος μου ο Κώστας ο Σερίφης, των οποίων και ευχαριστώ πολύ.
- Παραθέτω παρακάτω ένα σημείωμα του Κώστα για την εργασία του αυτή.

Αντώνης Κ. Κυριακόπουλος

a_kiriak@otenet.gr

Έγραψα τις απαντήσεις – υποδείξεις στις ασκήσεις που περιέχει η εργασία αυτή του Αντώνη για δύο λόγους.

Ο πρώτος είναι ότι μ' αρέσει να λύνω καλές ασκήσεις και κατά τη γνώμη μου οι περισσότερες από τις ασκήσεις αυτές είναι εξαιρετικές.

Ο δεύτερος, για μια μικρή βοήθεια στο δύσκολο έργο των συναδέλφων. Κάποιοι από αυτούς δεν θα έχουν την πολυτέλεια του χρόνου να τις αντιμετωπίσουν όλες.

Κώστας Σερίφης

k-ser@otenet.gr

1. Πότε μια συνάρτηση είναι ορισμένη

Μια (πραγματική) συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ορισμένη αν, και μόνο αν:

- α) Γνωρίζουμε το σύνολο ορισμού της A και
- β) Γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε την τιμή της $f(x)$, για κάθε $x \in A$.

2. Πότε ένας αριθμός είναι τιμή μιας συνάρτησης

Ένας αριθμός $y \in \mathbb{R}$ είναι τιμή μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αν, και μόνο αν:

Υπάρχει $x \in A$ με $f(x)=y$.

Ισοδύναμα αν, και μόνο αν:

Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία τουλάχιστον λύση $x \in A$.

Συμβολικά: Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(y \in \mathbb{R} \text{ τιμή της } f) \Leftrightarrow (\exists x \in A, f(x) = y).$$

Παράδειγμα. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 5 είναι τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 8\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - x + 3, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=5$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Με $x < 1$ έχουμε:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow 8\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 5 \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 6 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{3}{2}, \text{ αδύνατη (γιατί } \frac{3}{2} > 1).$$

- Με $x \geq 1$ έχουμε:

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -1).$$

Δεκτή είναι μόνο η $x=2$ (γιατί $x \geq 1$).

Συμπεραίνουμε ότι το 5 είναι τιμή τη συνάρτησης f (για $x=2$).

Άσκηση. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -1 είναι τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \sigma\upsilon\nu 2x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Απάντηση. Όχι.

3. Σύνολο ορισμού συνάρτησης που ορίζεται από έναν τύπο

Συμφωνούμε ότι ένας δοσμένος τύπος $f(x)$ ορίζει μια συνάρτηση με σύνολο ορισμού το σύνολο: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$, με την προϋπόθεση ότι $A \neq \emptyset$.

Παράδειγμα. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{3\eta\mu x - 1}{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}}}.$$

Λύση. Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 4} > 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{x^2 - 4} \\ |x| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > x^2 - 4 \Leftrightarrow x \geq 2. \\ |x| \geq 2 \end{cases}$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $A = [2, +\infty)$.

Σημείωση. Δοθέντος ενώ τύπου $f(x)$ το σύνολο ορισμού της: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ είναι πλήρως ορισμένο. Έτσι θα έλεγε κάποιος ότι το σύνολο ορισμού της προηγούμενης συνάρτησης είναι:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \sqrt{x^2 - 4} > 0 \text{ και } x^2 - 4 \geq 0\}.$$

Σωστά. Αλλά όταν λέμε ότι θα βρούμε το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης που ορίζεται από ένα δοσμένο τύπο $f(x)$, **σιωπηρά εννοούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ θα το θέσουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$.** Αυτό όμως σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορεί να γίνει. Για παράδειγμα, το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^7 + 3x^2 - x + 2}$$

είναι: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^7 + 3x^2 - x + 2 \neq 0\}$. Το σύνολο αυτό είναι πλήρως ορισμένο, αλλά δεν μπορεί να τεθεί υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, γιατί δεν λύνεται η εξίσωση: $x^7 + 3x^2 - x + 2 = 0$.

Άσκηση. Να βρείτε το σύνολο ορισμού A της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{3x - \lambda}{x^2 - 2x + \lambda}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (δοσμένος).}$$

Απάντηση. α) $\lambda > 1$: $A = \mathbb{R}$. β) $\lambda = 1$: $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\gamma) \lambda < 1: A = \mathbb{R} - \{1 + \sqrt{1 - \lambda}, 1 - \sqrt{1 - \lambda}\}.$$

4. Σύνολο τιμών συνάρτησης

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \text{ τιμή της } f\}.$$

$$\bullet f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, f(x)=y\}.$$

$$\bullet f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{η εξίσωση } f(x)=y \text{ έχει μία τουλάχιστο λύση } x \in A\}.$$

Με άλλα λόγια, το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των αριθμών $y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=y$ (με άγνωστο το x) έχει μία τουλάχιστον λύση στο A .

Παράδειγμα. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}.$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι: $A = \mathbb{R} - \{3\}$. Θα βρούμε τους αριθμούς $y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση $f(x)=y$ (με άγνωστο το x) έχει μία τουλάχιστον λύση στο A . Με $x \in A$ και $y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = y \Leftrightarrow x^2 - (y+3)x + (3y+1) = 0 \quad (1).$$

Η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον λύση στο A αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} (\Delta \geq 0) & (y+3)^2 - 4(3y+1) \geq 0 \\ 3^2 - (y+3) \cdot 3 + (3y+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y + 5 \geq 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (y \leq 1 \text{ ή } y \geq 5).$$

Άρα, το ζητούμενο σύνολο τιμών είναι: $f(A) = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

Άσκηση. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x$.

Απάντηση. $f(\mathbb{R}) = [-5, 5]$.

5. Ισότητα συναρτήσεων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \forall x \in A, f(x) = g(x) \end{cases}$$

• Έτσι έχουμε: $f \neq g$ αν, και μόνο αν:

$$A \neq B \text{ ή } (A = B \text{ και υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) \neq g(x)).$$

Παράδειγμα. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις ισχύει $f=g$:

$$\text{i) } f(x) = \sqrt[3]{x^3} \text{ και } g(x) = x. \quad \text{ii) } f(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ και } g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Λύση. i) Το σύνολο ορισμού της f είναι $A=[0,+\infty)$ και της g είναι $B=\mathbb{R}$. Άρα $A \neq B$ και συνεπώς $f \neq g$.

ii) Το σύνολο ορισμού της f είναι $A=[0,+\infty)$ και της g είναι $B=[0,+\infty)$ και άρα $A=B$. Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ έχουμε: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = g(x)$. Άρα $f=g$.

Άσκηση. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = |5|x| - 8x| \text{ και } g(x) = 8|x| - 5x.$$

Απάντηση. Είναι ίσες.

6. Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός. Θεωρούμε μία συνάντηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

$$\bullet \text{ (f άρτια) } \Leftrightarrow [\forall x \in A, (-x) \in A \text{ και } f(-x) = f(x)]$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

$$\bullet \text{ (f περιττή) } \Leftrightarrow [\forall x \in A, (-x) \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)]$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 4, & \text{αν } x \leq -2 \\ -3x + 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Είναι φανερό ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $(-x) \in A$. Έστω τώρα ένας αριθμός $x \in A$.

i) Έστω ότι $x \leq -2$. Τότε $f(x) = -3x - 4$. Επίσης, τότε: $-x \geq 2$ και συνεπώς:

$$f(-x) = -3(-x) + 4 = 3x + 4 = -f(x).$$

ii) Έστω ότι $x \geq 2$. Τότε $f(x) = -3x + 4$. Επίσης, τότε: $-x \leq -2$ και συνεπώς:

$$f(-x) = -3(-x) - 4 = 3x - 4 = -f(x).$$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(-x) = -f(x)$. Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

Άσκηση. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(2,1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι:

A. Άρτια. B. Περιττή. Γ. Ούτε άρτια, ούτε περιττή.

Απάντηση. Γ (δικαιολογήστε την απάντηση).

7. Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμός. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

- $f \uparrow$ (γνησίως αύξουσα) $A \Leftrightarrow [\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$
- $f \uparrow$ (αύξουσα) $A \Leftrightarrow [\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$
- $f \downarrow$ (γνησίως φθίνουσα) $A \Leftrightarrow [\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$
- $f \downarrow$ (φθίνουσα) $A \Leftrightarrow [\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι:

- Γνησίως μονότονη, αν και μόνο αν, είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
- Μονότονη αν, και μόνο αν, είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Παράδειγμα. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{αν } x < 2 \\ 2x^2 - 6x + 7, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha < \beta$ (για ευκολία στη γραφή δεν χρησιμοποιούμε το x με δείκτες).

1). Έστω ότι $\alpha < \beta < 2$. Τότε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (3\beta - 5) - (3\alpha - 5) = 3(\beta - \alpha) > 0 \text{ και άρα } f(\alpha) < f(\beta).$$

2) Έστω ότι $2 < \alpha < \beta$. Τότε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (2\beta^2 - 6\beta + 7) - (2\alpha^2 - 6\alpha + 7) = 2(\beta - \alpha)(\beta + \alpha - 3) > 0 \text{ (γιατί;)}$$

και άρα $f(\alpha) < f(\beta)$.

3) Έστω ότι $\alpha < 2 < \beta$. Τότε:

$$f(\alpha) = 3\alpha - 5 < 3 \cdot 2 - 5 = 1 \text{ και άρα } f(\alpha) < 1 \text{ (1).}$$

$$f(\beta) = 2\beta^2 - 6\beta + 7 = 2 \left[\left(\beta - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} \right] > \frac{5}{2} \text{ και άρα } f(\beta) > \frac{5}{2} \text{ (2).}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $f(\alpha) < f(\beta)$.

Ωστε, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $f(\alpha) < f(\beta)$. Συνεπώς η δοσμένη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Σημείωση 1. Θεωρούμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύει:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

Πράγματι. Θεωρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in A$.

i) Έστω ότι $x_1 < x_2$. Τότε, επειδή $f \uparrow A$, έχουμε: $f(x_1) < f(x_2)$.

ii) **Αντιστρόφως.** Έστω ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$, άτοπο. Αν $x_1 > x_2$, τότε, επειδή $f \uparrow A$, θα είχαμε $f(x_1) > f(x_2)$, άτοπο. Άρα $x_1 < x_2$.

— Όμοια, για μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύει:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Σημείωση 2. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και μονότονη (ή γνησίως μονότονη) σε δύο μη κενά σύνολα A και B ($A \cap B = \emptyset$), δεν έπεται αναγκαστικά ότι η f είναι μονότονη (ή γνησίως μονότονη) στην ένωση $A \cup B$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι ορισμένη και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα: $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Άσκηση. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Μα λυθεί εξίσωση:

$$f(x) - f(3-x) = f(4-x) - f(x-1).$$

Απάντηση. $x=2$.

8. Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης

Ορισμός. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

$$\bullet (f \text{ έχει μέγιστη τιμή}) \Leftrightarrow [\exists x_0 \in A, \forall x \in A, f(x) \leq f(x_0)].$$

Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο $x_0 \in A$ λέμε ότι η f έχει μέγιστη τιμή τη $f(x_0)$.

Λέμε, επίσης, ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$. Η δε τιμή $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστο** της f .

$$\bullet (f \text{ έχει ελάχιστη τιμή}) \Leftrightarrow [\exists x_0 \in A, \forall x \in A, f(x) \geq f(x_0)].$$

Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο $x_0 \in A$ λέμε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή την $f(x_0)$.

Λέμε, επίσης, ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$. Η δε τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ελάχιστο** της f .

Σημείωση. Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Αν για έναν αριθμό $k \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \leq k$, για κάθε $x \in A$, τότε το k δεν είναι αναγκαστικά **μέγιστη τιμή της f** . Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το k είναι τιμή της f .

$$(k \in \mathbb{R} \text{ μέγιστη τιμή της } f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists x \in A, f(x) = k \\ \forall x \in A, f(x) \leq k \end{pmatrix}$$

—Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=\eta\mu x \leq 5$.

Αλλά το 5 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f . Το 5 δεν είναι τιμή της f .

Η μέγιστη τιμή της f είναι το 1.

β) Αν για έναν αριθμό $k \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \geq k$, για κάθε $x \in A$, τότε το k δεν είναι αναγκαίως ελάχιστη τιμή της f .

Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το k είναι τιμή της f .

$$(k \in \mathbb{R} \text{ ελάχιστη τιμή της } f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists x \in A, f(x) = k \\ \forall x \in A, f(x) \geq k \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η

συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - x + \lambda}{x^2 + x + 1}$ έχει μέγιστη τιμή το 2.

Λύση. Το τριώνυμο: $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα αρνητική και άρα: $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, το σύνολο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Για να είναι το 2 μέγιστη τιμή της f πρέπει και αρκεί:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - x + \lambda}{x^2 + x + 1} = 2 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - x + \lambda}{x^2 + x + 1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + (2 - \lambda) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + (2 - \lambda) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(2 - \lambda) \geq 0 \\ 9 - 4(2 - \lambda) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 4(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Άσκηση. Να εξετάσετε ως προς το μέγιστο και το ελάχιστο τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ (χωρίς παραγώγους).}$$

Απάντηση. Έχει ελάχιστο το -1 , για $x = -1$ και μέγιστο το 1 για $x = 1$.

9. Σύνθεση συναρτήσεων

Ορισμός. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε

τώρα το σύνολο:

$$A' = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \text{ και υποθέτουμε ότι } A' \neq \emptyset.$$

Η συνάρτηση, την όποια συμβολίζουμε με $g \circ f$ και την οποία ορίζουμε ως εξής:

$$g \circ f: A' \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

ονομάζεται σύνθεση των f και g , κατ' αυτή την τάξη.

Παράδειγμα. Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x-1}.$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι $A=[-2,2]$ και της g είναι $B=[1,+\infty)$. Βρίσκομαι το σύνολο:

$A' = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A \\ f(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-x^2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Άρα $A' = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Συνεπώς:

$$g \circ f : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-1} = \sqrt{\sqrt{4-x^2}-1}.$$

Σημείωση. Για δύο συναρτήσεις f και g δεν ισχύει πάντοτε: $f \circ g = g \circ f$.

Για τρεις συναρτήσεις f , g και h ισχύει πάντοτε: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, με την προϋπόθεση ότι ορίζεται όλες οι αναφερόμενες συνθέσεις.

Άσκηση. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f \circ g = g \circ f$ και ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια μοναδική λύση $\rho \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το ρ είναι και λύση της εξίσωσης $g(x)=x$.

10. Συναρτήσεις 1-1

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέμε ότι είναι 1-1 (ένα προς ένα) αν, και μόνο αν:

$$\bullet \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ισοδύναμα, αν και μόνο αν:

$$\bullet \quad \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Σημείωση. Είναι φανερό ότι, αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι 1-1, τότε:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ (γιατί;)}. \quad \square$$

Παράδειγμα. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 η συνάρτηση:

$$f: [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x^2 + 8x - 7.$$

Λύση. Θεωρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$, οπότε $x_1 \geq -2$ και $x_2 \geq -2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1^2 + 8x_1 - 7 = 2x_2^2 + 8x_2 - 7 \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 4 = x_2^2 + 4x_2 + 4 \Rightarrow (x_1 + 2)^2 = (x_2 + 2)^2 \Rightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2| \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \square \end{aligned}$$

Άρα, η συνάντηση f είναι 1-1.

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 η συνάρτηση: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

11. Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση 1. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f(x)=k$,

για κάθε $k \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο A .

Απόδειξη. Έστω ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Θεωρούμε ένα αριθμό $k \in \mathbb{R}$. Έστω τώρα ότι η εξίσωση $f(x)=k$ έχει δύο λύσεις x_1 και x_2 στο A με $x_1 \neq x_2$. Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x_1)=k \\ f(x_2)=k \end{cases} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2, \text{άτοπο.}$$

Άρα, η εξίσωση $f(x)=k$ έχει το πολύ μία λύση στο A .

Πρόταση 2. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη,

τότε είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω ότι $f \uparrow A$ (όμοια εργαζόμαστε αν $f \downarrow A$). Θεωρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in A$.

Έχουμε:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \text{ ή } \\ x_1 > x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ ή } \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Σημείωση. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι 1-1, αλλά

δεν είναι γνησίως μονότονη.

Πρόταση 3. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η

εξίσωση $f(x)=k$, για κάθε $k \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία λύση στο A .

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 2, η συνάρτηση f είναι 1-1 και άρα, σύμφωνα με την πρόταση 1, η εξίσωση $f(x)=k$ έχει το πολύ μία λύση στο A .

12. Αντίστροφες συναρτήσεις

Έστω ότι μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Τότε, για κάθε $y \in f(A)$, υπάρχει ένας ακριβώς αριθμός $x \in A$ με $f(x)=y$ (γιατί;).

Έτσι, τότε, ορίζεται μια νέα συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε με f^{-1} , ως εξής:

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y,$$

για κάθε $x \in A$ και για κάθε $y \in f(A)$.

Η συνάρτηση αυτή f^{-1} ονομάζεται αντίστροφη της f .

Έτσι, αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ορίζεται η αντιστροφή της συνάρτησης f^{-1} .

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f **αντιστρέφεται**.

Ισχύουν:

$$\bullet f^{-1}(f(x)) = x, \text{ για κάθε } x \in A. \quad \bullet f(f^{-1}(y)) = y, \text{ για κάθε } y \in f(A).$$

—Για να μελετήσουμε ως προς το «αντιστρέψιμο» μία δοσμένη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν είναι 1-1. Αν είναι 1-1, τότε για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση, θα πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών της $f(A)$ και μετά να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$, ως προς x . Όλα αυτά μπορούμε να τα απλοποιήσουμε λίγο με τον τρόπο που αναφέρουμε στην επόμενη παράγραφο.

13. Μελέτη για την αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν λύσουμε (και διερευνήσουμε) την εξίσωση: $f(x)=y$, με άγνωστο το $x \in A$ και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$, τότε:

1) Είναι εύκολο να βρούμε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

• Το $f(A)$ είναι το σύνολο των αριθμών $y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση

$$f(x)=y \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση } x \in A.$$

2) Είναι εύκολο να βρούμε αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται ή όχι.

• 2α) Αν για ένα τουλάχιστον $y_0 \in f(A)$ η εξίσωση: $f(x)=y_0$ έχει δύο ή

περισσότερες λύσεις στο A , τότε η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 και άρα δεν αντιστρέφεται

Πράγματι, έστω ότι x_1 και x_2 , με $x_1 \neq x_2$, είναι δύο από τις λύσεις αυτές. Τότε θα έχουμε:

$$f(x_1)=y_0 \text{ και } f(x_2)=y_0, \text{ οπότε } f(x_1)=f(x_2). \text{ Και επειδή } x_1 \neq x_2, \text{ έπεται ότι η συνάρτηση } f$$

δεν είναι 1-1 και άρα δεν αντιστρέφεται.

• 2β) Αν για κάθε $y \in f(A)$ η εξίσωση: $f(x)=y$ έχει μια μοναδική λύση στο A ,

τότε η συνάρτηση f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Πράγματι, θεωρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in A$ και υποθέτουμε ότι: $f(x_1)=f(x_2)(=y_0 \in f(A))$.

Έτσι, οι αριθμοί x_1 και x_2 είναι λύσεις της εξίσωσης: $f(x)=y_0$.

Και επειδή η εξίσωση αυτή έχει μια μοναδική λύση, έπεται ότι

$x_1 = x_2$. Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

3) Στην περίπτωση που αντιστρέφεται, θα έχουμε έτοιμο και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$, αφού θα έχουμε βρει το x συναρτήσει του y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ . Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{|x|}$ αντιστρέφεται και αν ναι να βρείτε την αντιστροφή της.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = y$, με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$.

1). Λύσεις στο $(-\infty, 0)$. Με $x < 0$ έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x\sqrt{-x}. \quad (1)$$

Αν $y \geq 0$, τότε η εξίσωση (1) είναι αδύνατη. Έστω ότι $y < 0$. Τότε:

$$(1) \Leftrightarrow y^2 = x^2(-x) \Leftrightarrow x^3 = -y^2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{y^2} \text{ (δεκτή)}.$$

2) Λύσεις στο $[0, +\infty)$. Με $x \geq 0$ έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x\sqrt{x}. \quad (2)$$

Αν $y < 0$, τότε η εξίσωση (2) είναι αδύνατη. Έστω ότι $y \geq 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = x^2 \cdot x \Leftrightarrow x^3 = y^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y^2} \text{ (δεκτή)}.$$

• Ωστε, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $y=f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μια μοναδική λύση, την:

$$x = \begin{cases} -\sqrt[3]{y^2}, & \text{αν } y < 0 \\ \sqrt[3]{y^2}, & \text{αν } y \geq 0 \end{cases}$$

Συμπεράνουμε ότι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επίσης, ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (απόδειξη όπως στην περίπτωση 2β).

Συνεπώς, η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η αντιστροφή της είναι:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt[3]{y^2}, & \text{αν } y < 0 \\ \sqrt[3]{y^2}, & \text{αν } y \geq 0 \end{cases}$$

Μπορούμε στη θέση του y να βάλουμε το x ή οποιοδήποτε άλλο γράμμα).

ΑΣΚΗΣΗ. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = |x-3| + 2x$. Να αποδείξετε ότι:

1) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της f^{-1} .

2) Υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α , β και γ , για τους οποίους ισχύει:

$$f^{-1}(x) = \alpha|x-6| + \beta x + \gamma.$$

Απάντηση. 1) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+3}{3}, & \text{αν } y \geq 6 \\ y-3, & \text{αν } y < 6 \end{cases}$

2) $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$ και $\gamma = -1$, οπότε: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}|x-6| + \frac{2}{3}x - 1$.

14. Τρεις ακόμα χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση 1. Αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε

αντιστρέφεται και η αντιστροφή της συνάρτησης: $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι επίσης

γνησίως μονότονη και μάλιστα με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη. Έστω ότι $f \uparrow A$ (όμοια εργαζόμαστε αν $f \downarrow A$). Σύμφωνα με την πρόταση 2 της §13, η f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Θα αποδείξουμε τώρα ότι: $f^{-1} \uparrow f(A)$. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι:

$$\forall y_1, y_2 \in f(A), y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2). \quad (1)$$

Έστω ότι η πρόταση (1) δεν ισχύει. Τότε, θα ισχύει η άρνησή της, που είναι:

$$\exists y_1, y_2 \in f(A), y_1 < y_2 \text{ και } f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Έτσι, και επειδή $f \uparrow A$, από την $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, έπεται ότι: $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, δηλαδή:

$$y_1 \geq y_2, \text{άτοπο.}$$

Άρα, η πρόταση (1) ισχύει και συνεπώς $f^{-1} \uparrow f(A)$.

Πρόταση 2. Αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, τότε οι γραφικές

παραστάσεις C_f της f και $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία:

$y=x$ (διχοτόμο της $1^{ηs}$ και της $3^{ηs}$ γωνίας των αξόνων).

Απόδειξη. Έστω ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται. Έχουμε:

$$M(\alpha, \beta) \in C_f \Leftrightarrow \beta = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = f^{-1}(\beta) \Leftrightarrow M'(\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}}.$$

Και επειδή τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά προς την ευθεία $y=x$, έπεται ότι οι γραμμές C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία αυτή $y=x$.

Πρόταση 3. Έστω ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα

(οπότε αντιστρέφεται). Τότε, τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν)

ανήκουν στην ευθεία $y=x$.

Απόδειξη. Έστω ότι $M(x_0, y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο των γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$. Τότε:

$$x_0 \in (A \cap f(A)) \text{ και } f(x_0) = f^{-1}(x_0) \quad (1).$$

Θα αποδείξουμε ότι: $f(x_0) = x_0$. Πράγματι, έστω ότι: $f(x_0) > x_0$. Τότε, από την (1) και επειδή $f \uparrow A$, έχουμε:

$$f(x_0) > x_0 \Rightarrow f^{-1}(x_0) > x_0 \Rightarrow f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$$

που είναι άτοπο. Όμοια φτάνουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < x_0$.

Άρα $f(x_0) = x_0$ και συνεπώς το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Σημείωση. Όπως θα δούμε παρακάτω, η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

15. Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντιστρόφων συναρτήσεων

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ δύο αντιστρόφων συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι οι πραγματικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \text{ με } x \in (A \cap f(A)).$$

Όσες πραγματικές λύσεις έχει το σύστημα αυτό, τόσα είναι και τα κοινά σημεία των δύο αυτών γραμμών. Αν το σύστημα αυτό είναι αδύνατο, τότε οι γραμμές αυτές δεν έχουν κοινό σημείο. Συνεπώς:

Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντιστρόφων συναντήσεων μπορεί να μην έχουν κοινά σημεία. Μπορεί όμως να έχουν ένα ή περισσότερα. Στην περίπτωση που έχουν κοινά σημεία, αυτά δεν ανήκουν αναγκαίως στη διχοτόμο $y = x$, εκτός αν η f είναι γνησίως αύξουσα (πρόταση 3, §15).

—Σημειώνουμε ότι:

• Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται και οι γραφικές τους παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, αυτό ανήκει στη διχοτόμο: $y=x$.

Πράγματι. Έστω ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, το (α, β) . Τότε:

$$\begin{cases} (\alpha, \beta) \in C_f \\ (\alpha, \beta) \in C_{f^{-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = f(\alpha) \\ \beta = f^{-1}(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = f^{-1}(\beta) \\ \alpha = f(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}} \\ (\beta, \alpha) \in C_f \end{cases}$$

Άρα, το σημείο (β, α) είναι επίσης κοινό των C_f και $C_{f^{-1}}$. Έτσι, από την υπόθεση. Έχουμε: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ και συνεπώς $\alpha = \beta$. Άρα, το κοινό σημείο ανήκει στη διχοτόμο: $y=x$.

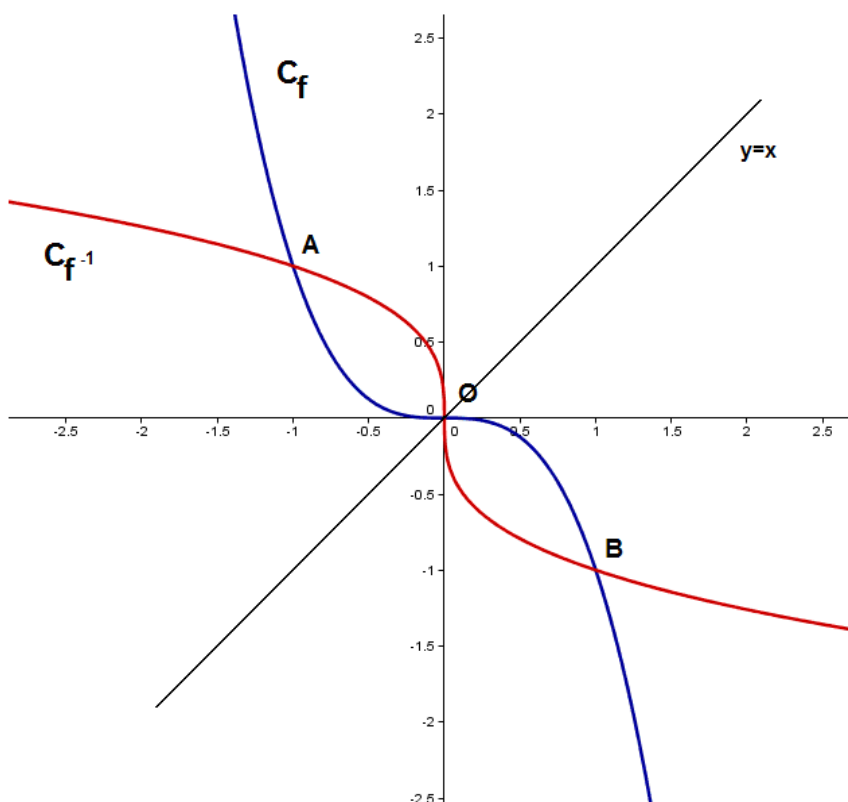
— Αναφέρουμε τα παρακάτω παραδείγματα:

1) Όπως βρίσκουμε, η συνάρτηση: $f(x) = -x^3$, $x \in \mathbb{R}$, έχει αντίστροφη τη συνάρτηση:

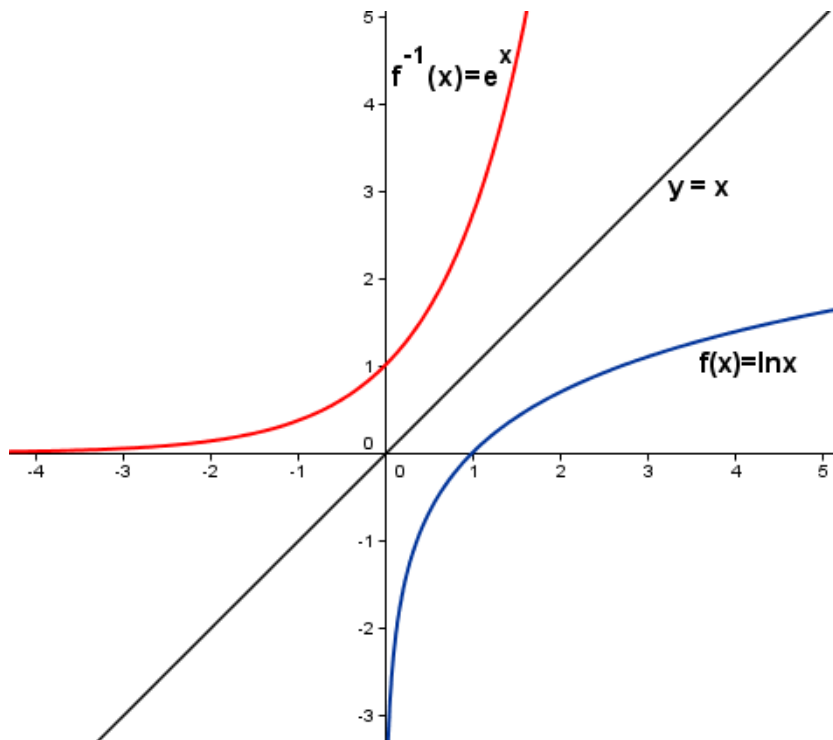
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Όπως μπορούμε να βρούμε εύκολα, οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν τρία κοινά σημεία, τα εξής: $(-1,1)$, $(1,-1)$ και $(0,0)$. Από αυτά μόνο το $(0,0)$ ανήκει στην ευθεία $y=x$. **Δεν εφαρμόζεται η πρόταση 3 της §15, γιατί η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Είναι γνησίως φθίνουσα.**

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών συναρτήσεων δίνονται στο παρακάτω σχήμα



2) Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ έχει αντίστροφη τη συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x$. Οι γραφικές τους παραστάσεις (βλέπε παρακάτω σχήμα) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



3) Η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη τη συνάρτηση $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, το $(3,3)$. Το σημείο αυτό ανήκει στην ευθεία $y = x$.

4) Η συνάρτηση $f(x) = 4 - x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη τη συνάρτηση $f^{-1}(x) = 4 - x$, $x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν όλα τα σημεία τους κοινά (ταυτίζονται, άπειρα κοινά σημεία). Από αυτά μόνο ένα ανήκει στην ευθεία $y = x$, το $(2,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σύνολο ορισμού- σύνολο τιμών συνάρτησης. Ισότητα συναρτήσεων.

1. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -4 είναι τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - 3x.$$

2. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{2 - |x-1|} - \sqrt{\frac{x}{x-2} - 1}.$$

3. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}.$$

Να βρείτε το σύνολο ορισμού της f . Μετά, να γράψετε τον τύπο της f με ένα μόνο ριζικό και χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

4. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - (\lambda+1)x - \lambda}{\sqrt{(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x + 3}}.$$

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους το σύνολο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

5. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x^x$. Ο αριθμός -2 ανήκει το σύνολο ορισμού της f ;

Να βρείτε το σύνολο ορισμού της f .

6. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Ο αριθμός $\frac{3}{2}$ ανήκει το σύνολο ορισμού της f ; Να βρείτε το σύνολο ορισμού της f .

7. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Ο αριθμός $\frac{1}{2}$ ανήκει το σύνολο ορισμού της f ; Να βρείτε το σύνολο ορισμού της f .

8. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = |x| + \sqrt{2 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}.$$

9. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2}.$$

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

11. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}.$$

12. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-2, 2]$.

13. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln \frac{1 - |x|}{1 + |x|}.$$

14. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(\sqrt{5} - \sqrt{x^2 - 4}).$$

15. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση: $f(x) = |x - \alpha| + |x - \beta|$. Να

αποδείξετε ότι: $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ αν, και μόνο αν, $\alpha = \beta$.

16. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^3 + \lambda x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{-\lambda x^3 + (\lambda + 1)x^2 + \lambda^2 - 2}{x^2 - \lambda x + 1}.$$

17. Θεωρούμε ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, το οποίο περιέχει τουλάχιστον τρία

διαφορετικά στοιχεία και δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε

ότι, για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, ισχύει:

$$f(x) + f(y) = g(x) + g(y).$$

Να αποδείξετε ότι $f = g$.

- 18.** Θεωρούμε ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, το οποίο περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά στοιχεία και δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, ισχύει:

$$f(x)f(y) = g(x)g(y).$$

Να αποδείξετε ότι $f=g$.

- 19.** Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x-2+(x+2)\sqrt{x-1}} + \sqrt[3]{3x-2-(x+2)\sqrt{x-1}}.$$

- 20.** Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει: $f(2x-3y)=f(x+y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.

- 21.** Δύο συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$[f(x) - f(y)] \cdot [g(x) - g(y)] = 0.$$

Να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f και g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

- 22.** Για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της $f(A)$ είναι διάστημα και ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σταθερό πρόσημο στο A .

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

- 23.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x > 1 \\ 2, & \text{αν } -2 \leq x \leq 2 \\ -2x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$$

είναι άρτια.

- 24.** Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1}$$

- α) Να βρείτε το σύνολο ορισμού της f .
β) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

25. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η συνάρτηση:

$$f(x) = 4x^3 + \lambda x^2 + x \text{ είναι περιττή.}$$

26. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση: $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$.

Μονότονες συναρτήσεις.

27. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

είναι γνησίως αύξουσα. Μετά, να συμπεράνετε ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

28. θεωρούμε ένα αριθμό $k > 0$ και τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{x}{x+k}$. Να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-k, +\infty)$. Μετά, να

συμπεράνετε ότι, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{|\alpha - \gamma|}{k + |\alpha - \gamma|} \leq \frac{|\alpha - \beta|}{k + |\alpha - \beta|} + \frac{|\beta - \gamma|}{k + |\beta - \gamma|}.$$

29. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση

$$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ είναι φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι, για}$$

κάθε $x, y \in (0, +\infty)$, ισχύουν:

$$\alpha) f(x+y) \leq f(x) + f(y). \quad \beta) f(2x+3y) \leq 2f(x) + 3f(y).$$

30. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση

$$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ είναι αύξουσα. Να αποδείξετε ότι, για}$$

κάθε $\alpha, \beta \in [1, +\infty)$ και για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$, ισχύει:

$$f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

31. Μία συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f([\alpha, \beta]) \subseteq (0, +\infty)$ είναι μονότονη. Να

αποδείξετε ότι, για κάθε $x, y \in [\alpha, \beta]$ ισχύουν:

$$\min \left\{ \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \right\} \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq \max \left\{ \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \right\}.$$

32. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ και μία φθίνουσα συνάρτηση

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x+\alpha) = f(\alpha) + \lambda x$, με άγνωστο το x , έχει μοναδική λύση το 0.

33. Δίνεται ένας αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ και μια αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λυθεί η

$$\text{εξίσωση: } f(x + f(\alpha)) = \alpha - x$$

34. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και μονότονη σε ένα διάστημα Δ και δεν

υπάρχει υποδιάστημα του Δ , στο οποίο η f να είναι σταθερή. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $2^x + 3^x = 5$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

36. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $5^x - 1 = 2^{x+1}$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^x = 10^{x-x^2}$ έχει μοναδική θετική ρίζα το 1.

38. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\ln x = \frac{e}{x}$ έχει μοναδική ρίζα το e .

Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης.

39. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$f(x) \leq 3 \text{ και } f(x) \geq -4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Μπορεί να συμπεράνετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 3; Επίσης, ότι έχει ελάχιστη τιμή το -4; Γιατί;

β) Έστω ότι επιπλέον ισχύουν:

$$2f(-1) + f(2) = 2 \text{ και } f(-1) - f(2) = 7.$$

Τώρα, μπορείτε να συμπεράνετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη τιμή το -4; Δικαιολογήστε την απάντηση.

40. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή το 3:

$$f(x) = \frac{4x^4 - x^2 + 7}{x^4 + x^2 + 1}.$$

41. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το -1:

$$f(x) = \sqrt{2x-3} - x.$$

42. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή το 2:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

43. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το $\frac{2}{3}$:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+|x-2|} - \frac{|x|}{1+|x|}.$$

44. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (αν έχει), καθώς και τις αντίστοιχες

τιμές του x , της συνάρτησης: $f(x) = \frac{6x^2 - 2}{3x^4 + 1}.$

45. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αυτή έχει

ελάχιστη τιμή, την οποία να βρείτε.

46. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η παρακάτω συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το -3 :

$$f(x) = \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1}$$

47. Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι άρτια. **β)** Η f έχει ελάχιστη τιμή το 2.

48. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (αν έχει), καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του x , της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{2e^{|x|} - 1}{e^{|x|} + 2}.$$

49. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (αν έχει), καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του x , της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(e - \sqrt{x^2 - e^2})$$

Σύνθεση συναρτήσεων.

50. Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$, όπου:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ και } g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

51. Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \alpha x + \beta$. Να βρείτε

τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: $f \circ g = g \circ f$.

52. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - 3x + 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = x$.

53. Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

54. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = \alpha x + \beta, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου α και β είναι δύο δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + \beta = 1$ και $\beta \neq 0$. Να

αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

55. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ και $(\beta - 1)^2 = 4\alpha\gamma$.

α) Να λυθεί η εξίσωση: $g(x) = x$.

β) Να αποδείξετε ότι, αν $f \circ g = g \circ f$, τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) = \xi$.

Συναρτήσεις 1-1. Αντίστροφες συναρτήσεις.

56. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

57. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) \leq f(x)f(10-x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

58. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$10f(x^2) - 25 \geq f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

59. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση $g(x) = x + f(x)$ είναι 1-1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

60. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και

$g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ακόμα, η f είναι αύξουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + g(x) = f(x)g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

61. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει: $f \circ f \circ f = f$. Να αποδείξετε ότι:

$$(f \text{ 1-1}) \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

62. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

63. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-3}}$ αντιστρέφεται και να

βρείτε την αντίστροφή της.

64. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = x|x|$ αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφή της.

65. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφή της.

66. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφή της.

67. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε

την αντίστροφή της.

68. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

69. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

70. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = e^{x^3+1}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

71. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e - \sqrt{x - e^2})$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

72. Έστω ότι μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (οπότε αντιστρέφεται). Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x, x \in (A \cap f(A)). \quad (1)$$

Λύση. i) Έστω α μία ρίζα της εξίσωσης: $f(x) = f^{-1}(x)$. Τότε:

$$f(\alpha) = f^{-1}(\alpha) \Rightarrow f(f(\alpha)) = f(f^{-1}(\alpha)) \Rightarrow f(f(\alpha)) = \alpha \quad (2).$$

• Έστω ότι $f(\alpha) > \alpha$. Τότε: $f(f(\alpha)) > f(\alpha)$, οπότε, λόγω της (2), έχουμε: $\alpha > f(\alpha)$, άτοπο.

• Έστω ότι $f(\alpha) < \alpha$. Όμοια φθάνουμε σε άτοπο.

Άρα: $f(\alpha) = \alpha$ και συνεπώς το α είναι ρίζα της εξίσωσης: $f(x) = x$.

ii) Αντιστρόφως. Έστω α μία ρίζα της εξίσωσης: $f(x) = x$. Τότε: $f(\alpha) = \alpha$ και συνεπώς $\alpha = f^{-1}(\alpha)$.

Άρα: $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$ και συνεπώς το α είναι ρίζα της εξίσωσης: $f(x) = f^{-1}(x)$.

Άρα, η ισοδυναμία (1) ισχύει.

Σημείωση. Δεν ισχύει το ίδιο αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, η συνάρτηση $f(x) = -x$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = -x$. Έχουμε:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x = -x \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ (αόριστη)}.$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow -x = x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, οι εξισώσεις: $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ δεν είναι ισοδύναμες.

73. Δίνεται μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

74. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,5)$ και $B(1,2)$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονία της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(2 + f^{-1}(x^2 + x)\right) = 5$.

75. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονία της f .

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}\left(-1 + f^{-1}(x^2 + 4)\right) < 2$.

76. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και

ισχύει: $(f \circ f)(x) = x^5 - 2x^3 + 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο.

77. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(f(x)) = x + f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε

α) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) $f(0) = 0$.

γ) Για κάθε $y \in f(\mathbb{R})$, ισχύει: $f(y) = y + f^{-1}(y)$.

78. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και αντιστρέφεται. Να αποδείξετε ότι η συνάντηση f^{-1} είναι επίσης περιττή.

79. Έστω η συνάρτηση

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x^5 - 10x + 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = 1$.

80. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 27$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x) = 2$ και $f^{-1}(f(x)) = 2$.

Ασκήσεις διάφορες.

81. Για μια μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

82. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει: $f(f(x)) + x^3 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι: **α)** $f(0)=0$. **β)** Η f είναι 1-1.

83. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$\textbf{α)} f(x) \neq -1. \quad \textbf{β)} } f(x) \neq 0. \quad \textbf{γ)} } f(x+4) = f(x).$$

84. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να εξετάσετε αν είναι 1-1 η συνάρτηση: $g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2xf^2(x) + 3$.

85. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$, ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)f(-y) + f(-x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\textbf{α)} } f(0) = \frac{1}{2}. \quad \textbf{β)} } \text{ Η } f \text{ είναι άρτια.} \quad \textbf{γ)} } \text{ Η } f \text{ είναι σταθερή.}$$

86. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y)), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον η f είναι άρτια, τότε είναι σταθερή.

87. Θεωρούμε ένα αριθμό $a \in \mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ και

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(a) = \frac{1}{2}$. **β)** $f(x) = f(a-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η f είναι άρτια.. **δ)** Η f είναι σταθερή.

88. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x)f(1-x) = f(\alpha x + \beta), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 0$. **β)** $f(1-\beta) = 1$. **γ)** $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$.

89. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(f(x)) = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2x-1) = 2f(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση: $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

90. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μια μοναδική ρίζα και ισχύει:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x^2 + 1) + f(x + 1) = f(x) + f(x^2 + 3).$$

91. Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x)) + f^2(x) = e^x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να λυθεί η εξίσωση: $f(x^3 + 5x) = f(4x^2 + 2)$.

92. Θέτουμε: $A = (0, +\infty)$. Θεωρούμε δύο φυσικούς θετικούς αριθμούς μ και ν και υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq A$, για την οποία ισχύει:

$$f(xf(y)) = x^\mu \cdot y^\nu, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι: $\nu = \mu^2$.

93. Για μια συνάρτηση: $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν: $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, $f(0)=0$ και

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in [0,1].$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

94. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=f(1)=0$ και

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in [0,1] \text{ με } x \neq y.$$

Να αποδείξετε ότι: $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$, για κάθε $x, y \in [0,1]$.

95. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι,

$$\text{υπάρχουν αριθμοί } x, y \in [0,1] \text{ με: } |f(x) + g(x) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$

96. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ και θέτουμε:

$$f_1 = f \text{ και } f_{\nu+1} = f_\nu \circ f_1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f_ν ($\nu \in \mathbb{N}^*$).

97. Για μια συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$e^{x+y} \leq f(x)f(y) \leq f(x+y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν: $f(x) \neq 0$ και $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

98. Για μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(\sqrt{xy}) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι αύξουσα.

99. Για μια συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$f(x+3) \leq f(x)+3 \text{ και } f(x+5) \geq f(x)+5, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι: $f(x+1) = f(x)+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

100. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) \leq f^2(x) - f^2(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δεν υπάρχει συνάρτηση...

101. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ και } f(x+y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

102. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία

ισχύει:

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

103. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(f(x)) = x \text{ και } f(f(x)+1) = 1-x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

104. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z} \text{ και } f(x+f(y)) = f(x) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{Z}.$$

105. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z} \text{ και } f(f(x)) = x+1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{Z}.$$

106*.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συναρτησιακές εξισώσεις

107. Να βρείτε τις γνησίως μονότονες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες

ισχύει:

$$f(f(x)+y-1) = 2f(x+y) - f(0), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

108. Να βρείτε τις γνησίως μονότονες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες

ισχύει:

$$f(f(x)+y) = f(x+y) + f(0), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

109. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+1) + xf(-x+2) = 2x+1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

110. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$2f(x) + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

111. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)f(y) = f(x+y-xy), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

112. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)f(y) = xf(x+y-xy), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

113. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x+y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

114. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

115. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x+y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

116. Θέτουμε: $A = \mathbb{R} - \{0,1\}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x+1, \text{ για κάθε } x \in A.$$

117. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τους αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν: $f(1)=5$ και

$$f(x+y) - f(y) = \alpha xy + 2x^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

118. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)f(y) = f(x-y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

119. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

120. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \sin y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

121. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x+y) = f^2(x) + f^2(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

122. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x-1)+3 \leq 2x \leq f(x+1)-1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

123. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$f(x) \leq x \text{ και } f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

124. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1, \text{ για κάθε } x > 0.$$

125. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \leq x \leq \frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

126. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

127. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$|f(x) + f(y)| = |x + y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

128. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

$$f(0)=1 \text{ και } |f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

129. Δίνονται δύο αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ για τις οποίες ισχύουν:}$$

$$f([\alpha, \beta]) \subseteq [\alpha, \beta] \text{ και } |f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in [\alpha, \beta].$$

130. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(xy) = xf(x) + yf(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0,1).$$

Βιβλιογραφία

1. ΑΝΤΩΝΗ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ. *Γενικές Ασκήσεις Μαθηματικής Ανάλυσης*, 1977.
- 2 ΑΝΤΩΝΗ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ. *Ασκήσεις Ανάλυσης*, 1993.
3. ΑΝΤΩΝΗ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ, ΝΙΚΟΥ ΦΩΤΙΑΔΗ. *Οι αντίστροφες συναρτήσεις και τα κοινά τους σημεία* ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β'», τεύχος 69,
4. ΑΝΤΩΝΗ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ. *Χρήσιμες επισημάνσεις στις βασικές έννοιες των συναρτήσεων*, ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ «Το φ», τεύχος 4, 2007
5. ΑΝΤΩΝΗ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ. *Μαθηματική Λογική*, 1977

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Σύνολο ορισμού- σύνολο τιμών συνάρτησης. Ισότητα συναρτήσεων

1. Ναι, για $x = 2$
2. $A = (2, 3]$
3. i) $A = [-1, +\infty)$ ii) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}-3, & x \geq 8 \\ -\sqrt{x+1}+3, & -1 \leq x < 8 \end{cases}$
4. $\lambda \in [1, 4)$
5. $A = \{-1, -2, -3, \dots\} \cup (0, +\infty)$
6. $A = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \cup \left\{ \frac{\kappa+1}{\kappa} \mid \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq 2 \right\}$
7. $A = [1, +\infty) \cup \left\{ \frac{1}{\kappa} \mid \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 1 \right\}$
8. $A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ και $f(A) = \{\sqrt{2}\}$
9. $f(A) = \left[\frac{3}{7}, 1 \right)$
10. $f(A) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
11. $f(A) = (-\infty, -2] \cup (0, 2]$
12. $\lambda = 4$
13. $A = (-1, 1)$ και $f(A) = (-\infty, 0]$
14. $A = (-3, -2] \cup [2, 3)$ και $f(A) = \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln 5 \right]$
15. Έστω ότι $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Τότε το 0 είναι τιμή της f και άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow |x_0 - \alpha| + |x_0 - \beta| = 0 \Rightarrow \alpha = \beta (= x_0).$$

Το αντίστροφο είναι εύκολο.

16. $\lambda = -1$

17. Έστω ένας αριθμός $x \in A$. Υπάρχουν δύο αριθμοί $\alpha, \beta \in A$ με $x \neq \alpha$, $x \neq \beta$ και $\alpha \neq \beta$.
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:
 $f(x) + f(\alpha) = g(x) + g(\alpha)$ (1), $f(x) + f(\beta) = g(x) + g(\beta)$ (2), $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$ (3).
προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και μετά λαμβάνοντας υπόψη την (3),
βρίσκουμε: $f(x) = g(x)$.
18. Ανάλογα με την 17.
19. $A = [1, 2]$ και $f(x) = 2$.
20. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(\alpha) = f(\beta)$. Προς τούτο,
εξετάζουμε αν το σύστημα: $\begin{cases} 2x - 3y = \alpha \\ x + y = \beta \end{cases}$ έχει λύση.
21. Είναι $f(x) = f(y)$ ή $g(x) = g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (1).
Έστω ότι οι f, g δεν είναι σταθερές: Θα υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε:
 $f(\alpha) \neq f(\beta)$ (2) και $g(\beta) \neq g(\gamma)$ (3)
Από (1), (2) $g(\alpha) = g(\beta)$ (4) και από (1), (3) $f(\beta) = f(\gamma)$ (5)
Από (5), (2) $f(\gamma) \neq f(\alpha)$ και έτσι από (1) $g(\alpha) = g(\gamma)$ οπότε από την (4) $g(\beta) = g(\gamma)$ το
οποίο έρχεται σ' αντίθεση με την (3).
22. Με άτοπο. Να λάβουμε υπόψη μας ότι, κάθε αριθμός μεταξύ δύο αριθμών ενός διαστήματος είναι αριθμός αυτού του διαστήματος.

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

23. Περιπτώσεις για το x . Προσέχουμε που βρίσκεται το $-x$. Συγκρίνουμε τις $f(x)$, $f(-x)$.
24. $A = \mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dots = -f(x)$ (Πολλαπλασιάζουμε με τις συζυγείς).
25. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda = 0$
Το αντίστροφο είναι εύκολο.
26. $A = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\ln \frac{x}{y} = -\ln \frac{y}{x}$. Η f είναι περιττή.

Μονότονες συναρτήσεις.

27. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$
- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ $f(x_1) - f(x_2) = \dots < 0$

- Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ $f(x_1) - f(x_2) = \dots < 0$
- Αν $x_1 \leq 0 \leq x_2$ θα είναι $f(x_1) \leq 0 \leq f(x_2)$ (το = δεν ισχύει συγχρόνως)

Σε κάθε περίπτωση $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και λόγω της μονοτονίας της f έχουμε: $f(|\alpha + \beta|) \leq f(|\alpha| + |\beta|)$ και

$$\text{συνεπώς } \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha| + |\beta|} + \frac{|\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$$

28. Είναι $f(x) = 1 - \frac{k}{x+k}$, $x \in (-k, +\infty)$. Εύκολα με τις ιδιότητες της διάταξης δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Για την ζητούμενη ανισότητα....

$$f(|\alpha - \gamma|) = f(|\alpha - \beta + \beta - \gamma|) \stackrel{f \uparrow}{\leq} f(|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma|) \stackrel{\text{εύκολα}}{\leq} f(|\alpha - \beta|) + f(|\beta - \gamma|)$$

29. α. $\forall x, y \in (0, +\infty)$ είναι $\frac{g(x+y)}{g(x+y)} \leq \frac{g(x)}{g(x+y)}$ και έτσι $\frac{xf(x+y)}{yf(x+y)} \leq \frac{(x+y)f(x)}{(x+y)f(y)}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

β. Εφαρμόζουμε το α. Μπορούμε επίσης να δείξουμε, επαγωγικά, ότι $f(vx) \leq v f(x)$ για $v \in \mathbb{N}^*$ και $x > 0$.

30. Με τον ίδιο τρόπο όπως στην 29α δείχνουμε: $\frac{f(x+y)}{f(ax)} \geq \frac{f(x)}{af(x)}$.

31. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για τους θετικούς κ, λ με $\kappa < \lambda$ ισχύει $\frac{\kappa}{\lambda} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\lambda}{\kappa}$ για κάθε

$x, y \in [\kappa, \lambda]$ διακρίνοντας περιπτώσεις για την διάταξη των x, y .

32. Το 0 επαληθεύει την εξίσωση και

Για $x > 0$ είναι $\lambda x > 0$ και $f(x+a) < f(a)$ άρα $f(x+a) < f(a) + \lambda x$

Για $x < 0$ είναι $\lambda x < 0$ και $f(x+a) > f(a)$ άρα $f(x+a) > f(a) + \lambda x$

33. Μοναδική λύση είναι η $x = a - f(a)$

34. Αν όχι τότε, θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = f(\beta) = \kappa$. Όμως, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ θα είναι $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ ή $f(\alpha) \geq f(x) \geq f(\beta)$ οπότε $\kappa \leq f(x) \leq \kappa$ ή $\kappa \geq f(x) \geq \kappa$ δηλαδή $f(x) = \kappa$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι δεν υπάρχει υποδιάστημα του Δ στο οποίο η f να είναι σταθερή.

Πόρισμα. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε θα είναι γνησίως μονότονη ή θα υπάρχει υποδιάστημα του Δ , στο οποίο η f είναι σταθερή.

35. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη της $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού αυτό την επαληθεύει και η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
36. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη της $\left(\frac{5}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού αυτό την επαληθεύει και η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.
37. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη της $\log x + x = 1, x > 0$ η οποία έχει μοναδική ρίζα το 1 αφού αυτό την επαληθεύει και η συνάρτηση $f(x) = \log x + x, x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα.
38. Μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x \ln x, x > 0$

Μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης.

39. α. Η f δεν είναι απαραίτητο να έχει μέγιστο το 3 εφόσον είναι δυνατόν να μην υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 3$. Ομοίως δεν είναι απαραίτητο να έχει ελάχιστη τιμή το -4.
β. Είναι $f(-1) = 3$ και $f(2) = -4$ και έτσι η f έχει ελάχιστο το -4 και μέγιστο το 3.
40. Αποδεικνύουμε την $f(x) \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$ και ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = 3$
41. Αποδεικνύουμε την $f(x) \leq -1 (= f(2)), \forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
42. Με τη βοήθεια της ανισότητας: $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \alpha, \beta$ μη αρνητικοί πραγματικοί.
 $f(x) \geq 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 2 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$
43. Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{|x-2|-|x|}{(1+|x-2|)(1+|x|)} \leq \frac{|x|+2-|x|}{(1+|x-2|)(1+|x|)} =$$
$$= \frac{2}{(1+|x-2|)(1+|x|)} = \frac{2}{1+|x|+|x-2|+|x^2-2x|} \leq \frac{2}{1+|x-x+2|+|x^2-2x|} = \frac{2}{3+|x^2-2x|} \leq \frac{2}{3} = f(0)$$
44. Βρείτε το σύνολο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
Ελάχιστη τιμή το -2, με $x=0$ και μέγιστη τιμή το 1 με $x=1$ ή -1.
45. Παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης είναι άθροισμα δύο θετικών και αντίστροφων αριθμών, (ποιων;), και συνεπώς $f(x) \geq 2 = f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.
46. Βλ. παράδειγμα § 9. Απάντηση: $\lambda = 7$ και $\lambda = -1$.
47. α) Εύκολο β) Όπως στην άσκηση 45. Ελάχιστη τιμή το 2 για $x=0$.

48. $A = \mathbb{R}$. $f(A) = \left[\frac{1}{3}, 2\right)$. Έχει ελάχιστη τιμή το $\frac{1}{3}$, για $x=0$. Μέγιστη τιμή δεν έχει, αφού το σύνολο $\left[\frac{1}{3}, 2\right)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο (γιατί;).
49. $A = (-\sqrt{2}e, -e] \cup [e, \sqrt{2}e)$ και $f(A) = (-\infty, 1]$ Έχει μέγιστη τιμή το 1 για $x=e$ ή για $x=-e$. Δεν έχει ελάχιστο (γιατί;)

Σύνθεση συναρτήσεων.

50. $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = x$.
51. $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.
52. $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) \Rightarrow \dots x = 2$. Αντίστροφα: δείχνουμε ότι $f(2) = 2$.
53. $(\Leftarrow)$ Απλό. $(\Rightarrow)$ Με άτοπο.
54. Ομοίως με την 52.
55. α) $x = \frac{1-\beta}{2\alpha}$. β) Αν ρ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = x$ τότε:
 $(f \circ g)(\rho) = (g \circ f)(\rho) \Rightarrow f(\rho) = g(f(\rho))$. Όμως, το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x) = x$ άρα πρέπει $f(\rho) = \rho$.

Συναρτήσεις 1-1. Αντίστροφες συναρτήσεις.

56. $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Με $\alpha, \beta \in A$, έχουμε: $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha = \beta$.
57. Για $x: 10-x \dots$ Τελικά $f(10-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
58. Βρίσκουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.
59. Το σύνολο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:
 $g(f(x)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + x = g(x) \Rightarrow g(f(x)) = g(x) \Rightarrow f(x) = x$.
60. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} = 1$. Εξετάζουμε, συνεπώς, την μονοτονία της $h = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$.

61. $(\Rightarrow)$ Είναι $f(f(f(x))) = f(x) \xrightarrow{1-1} f(f(x)) = x$. Έστω ένας αριθμός $y \in \mathbb{R}$. Από την προηγούμενη ισότητα, με $x = y$, βρίσκουμε: $f(f(y)) = y$, Άρα, το $y \in \mathbb{R}$ είναι τιμή της f . Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$. Έτσι, $f(f(f(x))) = f(x) \Rightarrow f(f(y)) = y$.

Δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(f(x)) = x$. Εύκολα, τώρα, και με τον ορισμό δείχνουμε ότι η f είναι 1-1.

62. Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $x + \frac{1}{x} > 2$. Λύνω την εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το $x \in (1, +\infty)$ και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad y > 1$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x στο $(1, +\infty)$ την

$$x = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad y > 1.$$

Συνεπώς $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in (1, +\infty)$.

63. Πεδίο ορισμού $A = [3, 19]$ και $f^{-1}(x) = 3 + (4 - x^2)^2$, $x \in [0, 2]$.

$$64. \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{ή } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}.$$

65. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $x \in (-1, 1)$

$$66. \quad f^{-1}(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)}{\ln 3} = \log_3 \frac{1+2x}{1-x}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$67. \quad f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$68. \quad \text{Είναι } f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$69. \quad \text{Πεδίο ορισμού } A = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \text{ και } f^{-1}(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}, x \neq 1$$

$$70. \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\ln \frac{x}{e}}, & x \geq e \\ -\sqrt[3]{\ln \frac{e}{x}}, & 0 < x \leq e \end{cases}$$

$$71. \quad \text{Πεδίο ορισμού } A = [e^2, 2e^2] \text{ και } f^{-1}(x) = e^2 + (e - e^x)^2, x \leq 1.$$

$$73. \quad f^{-1}(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

74. **α)** Γνησίως αύξουσα. **β)** $x=1, x=-2$.
75. **α)** Γνησίως αύξουσα. **β)** $x \in (-1,1)$.
76. $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow x^5 - 2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
77. **α).** Εύκολο. **β)** Θέτουμε $x=0$. **γ)** Έστω ένας αριθμός $y \in f(\mathbb{R})$. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $f(x)=y$, οπότε: $x = f^{-1}(y)$. Θέτουμε την τιμή αυτή του x στην δοσμένη ισότητα κτλ.
78. Έστω $y \in f(A)$. Υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x)=y$ και αφού η f είναι περιττή $-f(-x)=y \Rightarrow f(-x)=-y$.
Άρα και $-y \in f(A)$ και ισχύουν: $f^{-1}(y)=x$ και $f^{-1}(-y)=-x$ δηλαδή $f^{-1}(-y)=-f^{-1}(y)$.
Άρα η f^{-1} είναι περιττή.
79. **α.** Δείξτε ότι $f(x_1)-f(x_2)$ και x_1-x_2 είναι ομόσημοι. **β.** Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη! (γιατί;) Η δεύτερη έχει λύση την -7.
80. **α.** Με τη βοήθεια της μονοτονίας. **β.** Αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x \dots (3,3)$ γ. $x=-17$ (η πρώτη) και $x=2$ (η δεύτερη).

Ασκήσεις διάφορες

81. **α.** $y=0, x=0$. Αν $f(0)=0$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή πράγμα άτοπο. Άρα $f(0)=1$.
β. Θέτουμε στην δοσμένη ισότητα όπου x και y το $\frac{x}{2}$. **γ.** Θέτουμε στην δοσμένη ισότητα $x=0$ και στην προκύπτουσα θέτουμε $y=x$.
82. **α.** Για $x=0$. **β.** Με τον ορισμό.
83. **α.** Άτοπο. **β.** Άτοπο. **γ.** $f(x+1)=\dots, f(x+2)=\dots, f(x+4)=\dots$
84. **α.** $f(1)=1$ **β.** Δείχνουμε $g(0)=g(1)$.
85. **α.** $y=0, x=0$ **β.** $y=0$ **γ.** $f(x)=\frac{1}{2}$.
86. **α.** $y=0, x=0$ $f(f(0))=\frac{1}{2}f(0)$.
Για $y=0$ $f(f(x))=f(x)-\frac{1}{2}f(0)$ και για $x=0$ $f(f(y))=f(y)-\frac{1}{2}f(0)$
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.
β. $f(x)=f(0)$

87. α. $y=0, x=\alpha$ β. $y=0$ γ. Από β) $f(x+y)=2f(x)f(y)$ και για $y=\alpha$
 $f(\alpha+x)=f(x)\xrightarrow{\beta} f(-x)=f(x)$ δ. Από $f(x+y)=2f(x)f(y)$ για $y=-x$ $f(x)=\pm\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.
 Δείχνουμε επιπλέον ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$: στην $f(x+y)=2f(x)f(y)$ θέτουμε $y,x:\frac{x}{2}$
 Άρα $f(x)=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
88. α. $x=0, x=1$ β, γ. Δείξτε ότι $f(\beta)\neq 0$ (με άτοπο).
89. α. Εύκολο. β. Από το α) είναι $f(1)=1$ και η f είναι «1-1»
90. α. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f(x_1)-f(x_2)=0 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=0$ και εφόσον το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ θα πρέπει: $\frac{x_1}{x_2}=1 \Rightarrow x_1=x_2$
- β. $x=1$
91. Δείξτε ότι η f είναι «1-1».
92. Για $x=y=1$ $f(f(1))=1$. Για $y=x=f(1)$ $1=f''(1)f'(1)$ Άρα $f(1)=1$.
 Για $y=1$ $f(x)=x''$ και συνεπώς η αρχική ισότητα γίνεται.....
93. Για $y=0$ $f(x)\geq x$, $\forall x\in[0,1]$. Άρα $f(1)=1$. Για $y=1$ $f(x)\leq x$, $\forall x\in[0,1]$
 Άρα
94. Οι περιπτώσεις: ($x\in(0,1]$ και $y=0$), ($x\in[0,1)$ και $y=1$), ($x=y=0$), ($x=y=1$), ($x=0$ και $y=1$), ($x=1$ και $y=0$) είναι εύκολες.
 Θεωρούμε δύο αριθμούς $x, y\in(0,1)$. Η περίπτωση: $|x-y|\leq\frac{1}{2}$ είναι εύκολη. Έστω ότι:
 $|x-y|>\frac{1}{2}$. Αν φθάσουμε σε άτοπο.
 Άρα: $\left(\frac{1}{2}<x<1\text{ και }0<y<\frac{1}{2}\right)$ ή $\left(0<x<\frac{1}{2}\text{ και }\frac{1}{2}<y<1\right)$ κτλ.
95. Αν το ζητούμενο είναι αδύνατο τότε $|f(x)+g(x)-xy|<\frac{1}{4}$ $\forall x,y\in[0,1]$.
 Για $x=y=1$ $|f(1)+g(1)-1|<\frac{1}{4}$ και για $x=1, y=0$ $|f(1)+g(1)|<\frac{1}{4}$ Άρα
 $1=|f(1)+g(1)-1-(f(1)+g(1))|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ Άτοπο.
96. Επαγωγικά.... $f_\nu(x)=\frac{x}{1+\nu|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

- 97.** α) Για $x = y = 0$ β) Για $y = -x$ γ) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$
- 98.** Σκεφτόμαστε.... Τι μπορούμε να βάλουμε στη θέση των x, y έτσι ώστε η δοσμένη ανισότητα να γίνει: $f(x_1) \leq f(x_2)$ με $x_1 \leq x_2$
- 99.** $f(x+3) \leq f(x)+3$ και $f(x+5) \geq f(x)+5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 Είναι $f(x+1) \leq f(x+6)-5 = f(x+3+3)-5 \leq f(x+3)+3-5 \leq f(x)+1$
 Άρα $f(x+1) \leq f(x)+1$
 Άρα από την τελευταία
 $f(x+1) \geq f(x+1+1)-1 \geq f(x+2+3)-3-1 = f(x+5)-4 \geq f(x)+5-4 = f(x)+1$
 Άρα $f(x+1) \geq f(x)+1$ Τελικά πρέπει $f(x+1) = f(x)+1$
- 100.** Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = 0$
 Για $x = 0$ είναι $f^2(y) + f(y)f(-y) \leq 0$ (2)
 Στη (2) για $y = x$ και $y = -x$ προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις
 $f^2(x) + f(x)f(-x) \leq 0$
 $f^2(-x) + f(x)f(-x) \leq 0$ τις οποίες προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει: $f(-x) = -f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ (3).
 Με τη βοήθεια της (3) η (1) γίνεται: $-f(x+y)f(y-x) \leq f^2(x) - f^2(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ή
 $f(x+y)f(y-x) \geq f^2(y) - f^2(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ και εναλλάσσοντας τα y, x
 $f(x+y)f(x-y) \geq f^2(x) - f^2(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (4)
 Από (1), (4) έχουμε το ζητούμενο.

Δεν υπάρχει συνάρτηση....

- 101.** Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση.
 Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
 Για $x = y = 0$ είναι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$
 Αν $f(0) = 0$ τότε για $y = 0 \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **άτοπο** αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
 Αν $f(0) = 1$ τότε για $y = -x \quad f(x)f(-x) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **άτοπο** αφού $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- 102.** Έστω ότι υπάρχει. Θέτουμε $x=2$ και μετά $x=1/2$ και φθάνουμε σε άτοπο.
- 103.** Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση.
 Είναι $f(f(x)) = x$ και $f(f(x)+1) = 1-x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Εύκολα δείχνουμε ότι η f είναι «1-1».

Για $x : 1-x$ στη δεύτερη ισότητα έχουμε: $f(f(1-x)+1) = x$

Συνεπώς $f(f(1-x)+1) = f(f(x)) \Rightarrow f(1-x)+1 = f(x)$. Η τελευταία ισότητα είναι αδύνατη, εφόσον θέλουμε να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} : (x=0, x=1)$.

104. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Είναι $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ και $f(x+f(y)) = f(x)-y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Για $x=0$ $f(f(y)) = f(0)-y, \forall y \in \mathbb{Z}$. Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης εύκολα δείχνουμε ότι η

f είναι «1-1».

Για $x=y=0$ $f(f(0)) = f(0) \Rightarrow f(0)=0$. Άρα $f(f(y)) = -y, \forall y \in \mathbb{Z}$ και

$f(f(f(y))) = f(-y) \Rightarrow -f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{Z}$.

Αν $f(-1)=a, a \in \mathbb{Z}$ τότε $f(f(-1)) = f(a) \Rightarrow f(a)=1$.

Αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι: $f(ka) = k, \forall k \in \mathbb{Z}$ και εφόσον $a \in \mathbb{Z}$

$f(aa) = a \Rightarrow f(a^2) = f(-1) \Rightarrow a^2 = -1$ **άτοπο**.

105. Έστω $f(0)=a, a \in \mathbb{Z}$.

Για $x=0$ $f(f(0)) = 1 \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow f(f(a)) = f(1) \Rightarrow f(1) = a+1$

Για $x=-1$ $f(f(-1)) = 0 \Rightarrow f(f(f(-1))) = f(0) = a \Rightarrow f(-1)+1 = a \Rightarrow f(-1) = -1+a$

Αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι: $f(k) = k+a, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Όμως, $a \in \mathbb{Z}$ οπότε $f(a) = a+a \Rightarrow f(f(0)) = 2a \Rightarrow 1 = 2a$ **άτοπο**.

Συνεπώς δεν υπάρχει συνάρτηση f η οποία να ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες.

106. Θέτουμε: $g(x) = x^2 - 2$.

Η εξίσωση: $g(x) = x$ έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

Η εξίσωση $g(g(x)) = x$ έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς:

$$\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ και } \delta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Θέτουμε: $g(\gamma) = y$. Έτσι έχουμε:

$$g(g(\gamma)) = g(y) \Rightarrow \gamma = g(y) \Rightarrow g(g(y)) = g(\gamma) \Rightarrow g(g(y)) = y.$$

Άρα: $y = \alpha$ ή $y = \beta$ ή $y = \gamma$ ή $y = \delta$.

Αν $y = \alpha$ τότε $g(\gamma) = \alpha \Rightarrow g(g(\gamma)) = g(\alpha) \Rightarrow \gamma = \alpha$ **άτοπο**.

Ομοίως δεν μπορεί $y = \beta$ και βέβαια δεν γίνεται $y = \gamma$ γιατί θα έπρεπε $\gamma = \alpha$ ή $\gamma = \beta$.

Άρα $g(\gamma) = \delta$ και συνεπώς $g(\delta) = \gamma$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε να είναι

$$f(f(x)) = x^2 - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a) \text{ τότε:}$$

$$f(f(\gamma)) = g(\gamma) = \delta \Rightarrow f(f(f(\gamma))) = f(\delta) \Rightarrow f^2(\gamma) - 2 = f(\delta) \quad (1) \text{ και ομοίως}$$

$$f^2(\delta) - 2 = f(\gamma) \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) (και λαμβάνοντας υπόψη μας ότι, σύμφωνα με την (a), δεν μπορεί $f(\gamma) = f(\delta)$ γιατί τότε θα ήταν $\gamma = \delta$ ή $\gamma = -\delta$, θα προκύψει:

$$f(\gamma) + f(\delta) = -1 \Rightarrow f(\delta) = -1 - f(\gamma) \quad (3). \text{ Αντικαθιστώντας στην (1)}$$

$$f^2(\gamma) + f(\gamma) - 1 = 0 \Rightarrow f(\gamma) = \gamma \text{ ή } f(\gamma) = \delta \Rightarrow f(f(\gamma)) = f(\gamma) = \gamma \text{ ή } f(f(\gamma)) = f(\delta) \Rightarrow g(\gamma) = \gamma \text{ ή } g(\gamma) = f(\delta) \Rightarrow \delta = \gamma \text{ ή } \delta = -1 - f(\gamma) \Rightarrow \delta = \gamma \text{ ή } \delta = -1 - \delta$$

άτοπο.

Συναρτησιακές εξισώσεις.

107. Για $y = x = 0$ και με δεδομένο ότι η f είναι «1-1» βρίσκουμε ότι $f(0) = 1$.

Για $x = 0$ $f(y) = 2f(y) - 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}$ δηλαδή $f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$ το οποίο δεν συμφωνεί με την υπόθεση της μονοτονίας! Συνεπώς δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία να αληθείς η δοσμένη συναρτησιακή εξίσωση.

108. Για $x = 0, \quad y = -f(0)$ είναι: $f(-f(0)) = 0$.

Για $y = -f(x)$ είναι $f(x - f(x)) = 0 = f(-f(0))$ και εφόσον η f είναι «1-1»
 $x - f(x) = -f(0)$.

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: $f(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}$

109. Για $x: -x + 1 \dots f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 3}, \quad x \in \mathbb{R}$

110. Για $x: \frac{1}{x} \dots f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}^*$.

111. Για $y = x = 1$ βρίσκουμε το $f(1)$ και κατόπιν για $y = 1 \dots f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

112. Για $y = x = 1$ βρίσκουμε το $f(1)$ και κατόπιν για $y = 1 \dots f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση αυτή δεν πληρεί την δοσμένη ισότητα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα, τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει.

113. Βρίσκουμε το $f(0)$ και βάζουμε $y = 0 \dots f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

- 114.** Για $y = x \dots$ Αποδεικνύουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν α, β ώστε $f(\alpha) = 1, f(\beta) = -1$.

Οι ζητούμενες συναρτήσεις: $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^*$

- 115.** $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

- 116.** $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x + 1 \quad (a).$

$$\text{Για } x: \frac{1}{x} \quad f(1-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Για } x: 1 - \frac{1}{x} \quad f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - \frac{1}{x} \xrightarrow{(a)} -f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - x - \frac{1}{x}$$

$$\text{και αν θέσουμε } 1-x: x \quad -f(1-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \quad 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \quad \text{και για } x: \frac{1}{x} \quad 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$$

οπότε

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right), \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad \text{η οποία επαληθεύει την (a).}$$

- 117.** $\alpha = 4$ και $f(x) = 2x^2 + 3$.

- 118.** Για $y = x = 0$ είναι $f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$.

Αν $f(0) = 0$ τότε για $y = x \dots f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

Αν $f(0) = 1$ τότε για $y = x \quad f^2(x) = 1, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 1$ ή $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$

Για $x = 0 \quad f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (1)$ και αν υπάρχουν α, β ώστε $f(\alpha) = 1, f(\beta) = -1$

τότε: Για $y = \alpha$ και για $y = \beta$ θα έχουμε $f(x - \alpha) = -f(x - \beta), x \in \mathbb{R},$ για $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$f\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = -f\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{και από τη σχέση (1)} \quad f\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{άτοπο αφού}$$

$$f(x) = 1 \text{ ή } f(x) = -1, x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης δεν μπορεί να είναι $f(x) = -1, x \in \mathbb{R}$ γιατί δεν ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

Έτσι, $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

- 119.** Για $y = x \dots \dots \dots f(x) = x^2 + a, x \in \mathbb{R}$ οι ζητούμενες συναρτήσεις.

- 120.** Θέτουμε: $(x = 0, y = t),$ μετά $\left(x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}\right)$ και μετά $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t\right), (t \in \mathbb{R}).$

$$f(t) = \alpha \sin t + \beta \eta \mu t, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

121. Η συνάρτηση $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ και η $f(x) = \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$

122. Η ανισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x-1) - 2(x-1) + 1 \leq 0 \leq f(x+1) - 2(x+1) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 2x + 1 \leq 0 \leq f(x) - 2x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

123. Για $x = 0$ στην πρώτη και $x = y = 0$ στην δεύτερη προκύπτει $f(0) = 0$.

Για $x : -x$ στην πρώτη και $y = -x$ στην δεύτερη προκύπτουν δύο ανισότητες τις οποίες αν προσθέσουμε κατά μέλη θα πάρουμε: $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

124. Στην πρώτη ανισότητα θέτουμε $x = ye$. Έτσι, $f(y) \leq \ln y + 1$ ή $f(x) \leq \ln x + 1, x > 0$.

Από την δεύτερη ανισότητα $f(x) \geq \ln x + 1, x > 0$ Άρα $f(x) = \ln x + 1, x > 0$

125. Βρείτε το x για το οποίο ισχύει $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \dots f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$

126. Για $y = 0$ προκύπτει: $f(x) = f(0) \pm x, x \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύουμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^*$ ώστε $f(x) = f(0) + x, f(y) = f(0) - y$ (:δεν θα μπορούσε να ισχύει η αρχική συνθήκη).

Έτσι, $f(x) = \alpha + x, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \alpha - x, x \in \mathbb{R}$ είναι οι ζητούμενες συναρτήσεις.

127. $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$

128. $f(x) = 1 + x^3, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 1 - x^3, x \in \mathbb{R}$

129. Αφού $f(x), f(y) \in [\alpha, \beta]$ θα είναι: $|f(x) - f(y)| \leq \beta - \alpha \quad \forall x, y \in [\alpha, \beta]$.

Άρα $|f(\alpha) - f(\beta)| = \beta - \alpha \Rightarrow f(\alpha) - f(\beta) = \beta - \alpha$ ή $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha - \beta \Rightarrow$
 $f(\alpha) = f(\beta) + \beta - \alpha$ ή $f(\alpha) = f(\beta) + \alpha - \beta$

Όμως $\alpha \leq f(\alpha) \leq \beta$ και έτσι προκύπτει ότι

$$(f(\alpha) = \beta \text{ και } f(\beta) = \alpha) \text{ ή } (f(\alpha) = \alpha \text{ και } f(\beta) = \beta)$$

Αν $(f(\alpha) = \beta \text{ και } f(\beta) = \alpha)$ θέτουμε στην αρχική σχέση $y = \alpha$ και κατόπιν $y = \beta$ και προκύπτει ότι $f(x) = \alpha + \beta - x, x \in [\alpha, \beta]$

Αν $(f(\alpha) = \alpha \text{ και } f(\beta) = \beta)$ θέτουμε στην αρχική σχέση $y = \alpha$ και κατόπιν $y = \beta$ και προκύπτει ότι $f(x) = x, x \in [\alpha, \beta]$.

Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν την αρχική συνθήκη.

130. $y = x : f(x^2) = 2xf(x)$ και $f(x^3) = f(x \cdot x^2) = xf(x) + 2x^3f(x)$

$f(x^4) = 2x^2f(x^2) = 4x^3f(x)$ και

$f(x^4) = f(x \cdot x^3) = xf(x) + x^3f(x^3) = xf(x) + x^4f(x) + 2x^6f(x)$ Άρα

$4x^3f(x) = xf(x) + x^4f(x) + 2x^6f(x) \quad \forall x \in (0,1)$ και συνεπώς:

$(2x^5 + x^3 - 4x^2 + 1)f(x) = 0, \forall x \in (0,1). \quad (1)$

Έστω ότι για έναν αριθμό $\rho \in (0,1)$, ισχύει: $(2\rho^5 + \rho^3 - 4\rho^2 + 1)f(\rho) = 0$ και ότι

$f(\rho) \neq 0$.

Έτσι, το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης: $2x^5 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0 \quad (2)$

Έχουμε: $f(\rho^2) = 2\rho f(\rho) \neq 0$. Άρα το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (2) (γιατί;). Όμοια και οι αριθμοί: $\rho^4, \rho^8, \rho^{16}, \rho^{32}, \dots$ είναι ρίζες της εξίσωσης (2), άτοπο (γιατί;).

Συμπεράνουμε ότι: $f(x) = 0, \forall x \in (0,1)$.