ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ. Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Κυριακόπουλος Αντώνης
Αμφίσσης 37
15562 Χολαργός
e-mail: a_kiriak@otenet.gr

Στην ιερή μνήμη των καθηγητών μου:
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΒΟΥΓΙΟΥΚΑ
και ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΚΑΠΠΟΥ,
οι οποίοι μου ενέπνευσαν την αγάπη
για τα μαθηματικά.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετάμε τις μεθόδους απόδειξης μιας συνεπαγωγής, με βάση τους νόμους και τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής. Επισημαίνουμε ιδιαίτερα τις περιπτώσεις που η υπόθεση είναι ψευδής και αναφέρουμε παραδείγματα από τις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Στη συνέχεια επισημαίνουμε το ρόλο της ισοδυναμίας στα Μαθηματικά. Τέλος διατυπώνουμε μια απλή αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση, κυρίως όταν ζητάνε να βρούμε ένα ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμούς, συναρτήσεις, διανύσματα κτλ.).

1. Η συνεπαγωγή

Πολλές φορές στα μαθηματικά έχουμε να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή, δηλαδή μια πρόταση της μορφής:

«Αν p, τότε q», συμβολικά : « $p \Rightarrow q$ »,

όπου p και q είναι δύο προτάσεις.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να τονίσουμε ότι **όταν λέμε ότι θα αποδείξουμε την αλήθεια μιας συνεπαγωγής: $p \Rightarrow q$ δεν εννοούμε ότι θα αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης p, ούτε την αλήθεια της πρότασης q, αλλά την αλήθεια τις πρότασης : $p \Rightarrow q$**.Πότε όμως μια συνεπαγωγή p⇒q είναι αληθής και πότε είναι ψευδής; Αυτό στα μαθηματικά δεν το καθορίζει ο καθένας όπως θέλει ή όπως το καταλαβαίνει και ούτε είναι θέμα άποψης. Αυτό ορίζεται στη Μαθηματική Λογική, που είναι η βάση όλων των μαθηματικών, ως εξής:

Η πρόταση p⇒q είναι ψευδής, μόνο αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι αληθής.

p	q	p⇒q
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

— Η πρόταση p ονομάζεται «υπόθεση» και η q ονομάζεται «συμπέρασμα» της συνεπαγωγής: p⇒q.

— Σημειώνουμε ότι:

α) Αν η πρόταση p είναι ψευδής, τότε η πρόταση:p⇒q είναι αληθής, είτε η πρόταση q είναι αληθής, είτε είναι ψευδής.

β) Αν η πρόταση: p⇒q είναι αληθής, τότε δεν έπεται αναγκαίως ότι η πρόταση p είναι αληθής, ούτε ότι η πρόταση q είναι αληθής.

— Μερικοί άλλοι τρόποι εκφράσεως της συνεπαγωγής p⇒q, είναι οι εξής;

«p συνεπάγεται q»

«p πρέπει q»

«q αρκεί p»

«p είναι ικανή συνθήκη για την q»

«q είναι αναγκαία συνθήκη (συνεπεία) της p».

2. Απόδειξη συνεπαγωγής.

Σε μια μαθηματική θεωρία (εκεί μόνο ορίζεται η αυστηρή έννοια της απόδειξης), για να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή: p⇒q, μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (σύμφωνα με τον ορισμό της συνεπαγωγής):

$1^{ον}$. Έστω ότι η p είναι ψευδής. Τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής.

$2^{ον}$. Έστω ότι η p είναι αληθής. Τότε θα πρέπει ,εφαρμόζοντας τα θεωρήματα της θεωρίας και με τη βοήθεια των νόμων και των κανόνων της Λογικής, να αποδείξουμε την αλήθεια της q.

Όταν λέω Λογική, εννοώ τη Μαθηματική Λογική και όχι τη λογική που αποκτά ο καθένας μόνος του. Αυτή είναι υποκειμενική, εμπειρική λογική, η οποία δεν ταυτίζεται πάντοτε με τη Μαθηματική Λογική. **Τα μαθηματικά θεμελιώνονται, κατανοούνται και αναπτύσσονται με τη βοήθεια της Μαθηματικής Λογικής**.

Στις αποδείξεις όμως την πρώτη περίπτωση (που η p είναι ψευδής) δεν την αναφέρουμε, **όχι γιατί δεν χρειάζεται**, αλλά γιατί αυτός που κάνει αποδείξεις υποτίθεται ότι ξέρει Μαθηματική Λογική (αφού είναι η βάση των μαθηματικών) και θεωρεί περιττό σε κάθε απόδειξη να επαναλαμβάνει ότι αν η p είναι ψευδής τότε η συνεπαγωγή είναι αληθής.

•Για παράδειγμα ,έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

«**Για κάθε α,β,γ** $\in \mathbb{R}$ **ισχύει**:

αν α+β+γ=0 ,τότε $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}$ **».**

Λύση. Έστω ότι α+β+γ=0, οπότε $\alpha+\beta=-\gamma$. Έτσι έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\gamma^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma=-\gamma^3$$

$$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma.$$

Η απόδειξη τελείωσε και είναι δεκτή, παρόλα που έγινε μόνο για τρεις αριθμούς που έχουν άθροισμα 0, ενώ μας είπαν να αποδείξουμε την συνεπαγωγή για τρεις οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Γιατί ; Γιατί, **υπονοούμε ότι** στην περίπτωση που οι αριθμοί αυτοί δεν έχουν άθροισμα 0 (π.χ., αν α=5,β=7 και γ=1), η υπόθεση είναι ψευδής και άρα η συνεπαγωγή είναι αληθής (όποιος δεν το υπονοεί κάνει δικά του μαθηματικά).

Τελικά, στις δύο παρακάτω περιπτώσεις, θα έχουμε αποδείξει την αλήθεια μιας συνεπαγωγής: $p \Rightarrow q$:

Α. Αν αποδείξουμε ότι η p είναι ψευδής.

Β. Αν υποθέσουμε ότι η p είναι αληθής (αγνοώντας ή αδιαφορώντας αν αυτό είναι σωστό ή όχι) και αποδείξουμε ότι και η q είναι αληθής.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι : **σκοπός των μαθηματικών δεν είναι να ξεχωρίσουν τι είναι αληθές και τι είναι ψευδές στον κόσμο, αλλά να βρουν ποιες προτάσεις είναι λογικές συνέπειες άλλων δοσμένων προτάσεων.**

• Βεβαίως υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να αποδείξουμε μια συνεπαγωγή, όπως για παράδειγμα η μέθοδος της εις άτοπο αγωγής, η μέθοδος της αντιστροφοαντιθέτου προτάσεως κτλ.

—Στις Πανελλαδικές εξετάσεις, όπως θα δούμε παρακάτω, έχει συμβεί να βάλουν θέματα στα οποία η υπόθεση είναι ψευδής. **Σε καμία περίπτωση τα θέματα αυτά δεν μπορούν να χαρακτηριστούν λανθασμένα.** Γιατί, σε κάθε άσκηση εκείνο που ζητείται από τον λύτη είναι, θεωρώντας ότι οι υποθέσεις είναι αληθείς (αδιαφορώντας αν αυτό ισχύει ή όχι) και εφαρμόζοντας τα θεωρήματα της θεωρίας, καθώς και τους νόμους και τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής, να αποδείξει αυτά που ζητάει η άσκηση. Είναι βέβαιο ότι αυτό ζητάνε αυτοί που προτείνουν τέτοια θέματα. Ίσως, ούτε καν υποψιάζονται ότι η υπόθεση μπορεί να είναι ψευδής. Τώρα, το ότι σε τέτοιες περιπτώσεις υπάρχει και άλλη λύση οφείλουμε να το γνωρίζουμε. Εξάλλου, όταν, για να λύσουμε μια άσκηση στη Γεωμετρία φτιάχνουμε, για παράδειγμα ,ένα ισοσκελές τρίγωνο **αναρωτηθήκαμε ποτέ αν το τρίγωνο που φτιάξαμε είναι πράγματι ισοσκελές; Όχι βέβαια. Υποθέτουμε ότι είναι ισοσκελές και συνεχίζουμε (δηλαδή, τις περισσότερες φορές, εργαζόμαστε με ψευδείς υποθέσεις).** Ουσιαστικά, έστω και αν δεν το καταλαβαίνουμε, εννοούμε ότι, αν το τρίγωνο που φτιάξαμε δεν είναι ισοσκελές (υπόθεση ψευδής), τότε η συνεπαγωγή με συμπέρασμα αυτά που θα καταλήξουμε, είναι αληθής (επαναλαμβάνω ,η συνεπαγωγή).

Τώρα θα μου πείτε, αν ο λύτης εξετάσει τις υποθέσεις και αποδείξει ότι μία (τουλάχιστον) από αυτές είναι ψευδής ή φθάσει σε άτοπο , τι γίνεται; Απλούστατα, τότε και πάλι **θα έχει λύσει την άσκηση** , γιατί και στη δεύτερη περίπτωση θα έχει αποδείξει ότι μία τουλάχιστον από τις υποθέσεις είναι ψευδής, οπότε η συνεπαγωγή είναι αληθής.

• Το θέμα όμως είναι αλλού, όταν πρόκειται για Πανελλαδικές Εξετάσεις. Αν ένας μαθητής έκανε μια τέτοια λύση, δηλαδή έδειχνε ότι κάποια από τις υποθέσεις είναι ψευδής, θα την θεωρούσαν σωστή οι βαθμολογητές; Πολύ αμφιβάλλω.

—Το 1947 στις Εισαγωγικές Εξετάσεις της Μαθηματικής Σχολής (όπως λεγόταν τότε) του Πανεπιστημίου Αθηνών είχαν βάλει το εξής θέμα:

«Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι:
συνΑ+συνΒ+συνΓ=2 (1) και ημΑ+ημΒ+ημΓ=1 (2)να δειχθεί ότι: R=$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού και α,β,γ τα μήκη των πλευρών του».

Λύση.(Όλοι οι τύποι της τριγωνομετρίας που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω ήταν γνωστοί στους τότε υποψηφίους).Βρίσκουμε εύκολα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$\text{συνΑ+ συνΒ+ συνΓ}=1+4\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}. \quad (3)$$

$$\text{ημΑ+ημΒ+ημΓ}=4\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}. \quad (4)$$

Λόγω των υποθέσεων (1) και (2), από τις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{4}. \quad (5)$$

Λόγω αυτών, των (1) και (2) και επειδή α=2RημΑ, β=2RημΒ και γ=2RημΓ έχουμε:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}=\frac{2R\eta\mu\mathrm{A}.2R\eta\mu\mathrm{B}.2R\eta\mu\Gamma}{4R^2(\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma)^2}=$$

$$=2R.2\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}.2\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}.2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=16R.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=R.$$

Σχόλιο 1. Δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο να ισχύει η υπόθεση (1). Αυτό δεν μειώνει στο ελάχιστο την ορθότητα της προηγούμενης λύσης. Το ότι δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο δεν κάνει την λύση ,ούτε ευκολότερη, ούτε δυσκολότερη. Και δεν μπορεί να ισχυρισθεί κάποιος ότι δεν έλυσε την άσκηση επειδή δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

Ας δούμε τώρα γιατί δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\mathbf{συνA+συνB+συνΓ\le\frac{3}{2}}$, οπότε δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ που να ισχύει η σχέση:

συνΑ+συνΒ+συνΓ=2.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να το αποδείξουμε. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω ισότητα (3) ,η οποία ισχύει σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ. Προηγουμένως όμως θα αποδείξουμε ότι:

«**Για οποιεσδήποτε γωνίες x,y,z και ω του διαστήματος (0,π), ισχύουν οι σχέσεις:**

$$\mathbf{\eta\mu x\eta\mu y\le\eta\mu^2\frac{x+y}{2}} \quad (6)$$

$$\mathbf{\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z\eta\mu\omega\le\eta\mu^4\frac{x+y+z+\omega}{4}} \quad (7)$$

$$\mathbf{\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z\le\eta\mu^3\frac{x+y+z}{3}} \quad (8)».$$

- Για να αποδείξουμε την (6) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

  $$2\eta\mu x\eta\mu y\le2\eta\mu^2\frac{x+y}{2},$$

  αρκεί: $\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)\le1-\sigma\upsilon\nu(x+y)$,

  αρκεί: $\sigma\upsilon\nu(x-y)\le1$, ισχύει.
- Σύμφωνα με την (6) και επειδή $x,y,z,\omega\in(0,\pi)$,έχουμε:

$$\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z\eta\mu\omega \le \eta\mu^2\frac{x+y}{2}\eta\mu^2\frac{z+\omega}{2} = \left(\eta\mu\frac{x+y}{2}\eta\mu\frac{z+\omega}{2}\right)^2 \le$$

$$\le \left(\eta\mu^2\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+\omega}{2}}{2}\right)^2 = \eta\mu^4\frac{x+y+z+\omega}{4} \Rightarrow (7).$$

♦ Επειδή $x, y, z, \frac{x+y+z}{3} \in (0,\pi)$, σύμφωνα με την (7), έχουμε:

$$\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z\eta\mu\frac{x+y+z}{3} \le \eta\mu^4\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z\eta\mu\frac{x+y+z}{3} \le \eta\mu^4\frac{x+y+z}{3}$$ (και επειδή $\eta\mu\frac{x+y+z}{3} > 0) \Rightarrow (8).$

• Από την (3), λόγω της (8), έχουμε:

$$\text{συνΑ+ συνΒ+ συνΓ} = 1+4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \le 1+4\eta\mu^3\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}}{3} =$$

$$= 1+4\eta\mu^3\frac{A+B+\Gamma}{6} = 1+4\eta\mu^3 30^0 = 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{συνΑ+ συνΒ+ συνΓ} \le \frac{3}{2}.$$

• • Θα μπορούσε κάποιος μετά τις ισότητες (5) να προχωρήσει ως εξής:

Επειδή: $\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$ κτλ και $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$,

η πρώτη από τις ισότητες (5) γίνεται:

$$\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{E^2}{\tau\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4E^2 = \tau\alpha\beta\gamma \ (9).$$

Επίσης, επειδή: $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$ κτλ. η δεύτερη από τις ισότητες (5) γίνεται:

$$\frac{\tau E}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 4\tau E \ (10).$$

Από τις (9) και (10) έπεται ότι:

$$4E^2 = \tau.4\tau E \Rightarrow E = \tau^2 \Rightarrow \rho\tau = \tau^2 \Rightarrow \rho = \tau \ (11).$$

Από την (10) και επειδή : $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ βρίσκουμε ότι τ=R. Από αυτή και την (11) έπεται ότι ρ=R!!!, άτοπο. Άρα κάποια από τις υποθέσεις είναι ψευδής.

—Το 1997 στις Γενικές Εξετάσεις της $1^{ης}$ δέσμης το θέμα 3Β ήταν το εξής:

«Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε ,υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha} \qquad (1)$$

για κάθε x,y$\in$ R. Να δείξετε ότι:

i) g(0) = -α. ii) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$, για κάθε x$\in \mathbb{R}$ ».

Λύση. i) Θέτοντας στην (1) x=y=0, βρίσκουμε:

$$g(0) = e^0 g(0) + e^0 g(0) + \alpha \Rightarrow g(0) = -\alpha.$$

ii) Έστω ένας αριθμός $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την (1) με $x = x_0$, έχουμε για κάθε $y \in \mathbb{R}$:

$$g(x_0 + y) = e^y g(x_0) + e^{x_0} g(y) + x_0 y + \alpha.$$

Παραγωγίζοντας (ως προς y) έχουμε:

$$g'(x_0 + y) = e^y g(x_0) + e^{x_0} g'(y) + x_0.$$

Άρα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g'(x + y) = e^y g(x) + e^x g'(y) + x.$$

από αυτή με y=0, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x .$$

Σχόλιο 2. Δεν υπάρχει συνάρτηση $g: R \to R$ και αριθμός $\alpha \in R$ ώστε να ισχύει η ισότητα (1) για κάθε $x, y \in R$ (αυτό , όπως είπαμε και παραπάνω, δεν μειώνει στο ελάχιστο την ορθότητα της προηγούμενης λύσης). Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν. Προηγουμένως από την (1) με x=y=0 βρήκαμε ότι $g(0) = -\alpha$. Θέτοντας στην (1) x=1 και y=0 βρίσκουμε ότι:

$$g(1)=g(1)+eg(0)+\alpha \Rightarrow e(-\alpha) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(1-e) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Έτσι από την (1), έχουμε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$:

$$g(x + y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy . \qquad (2)$$

Από την (2) με x=1 και y=1, βρίσκουμε ότι:

$$g(2)=eg(1)+eg(1)+1 \Rightarrow g(2)=2eg(1)+1 \qquad (3)$$

Από την (2) με y=2, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x+2) = e^2 g(x) + e^x g(2)+2x \overset{(3)}{=} e^2 g(x)+e^x \left[2eg(1)+1\right]+2x \Rightarrow$$

$$g(x+2) = e^2 g(x) + 2e^{x+1} g(1) + e^x + 2x . \qquad (4)$$

Από την (2) με y=1, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x+1) = eg(x) + e^x g(1) + x . \qquad (5)$$

θέτοντας σ' αυτή όπου x το x+1 έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x+1+1) = eg(x+1) + e^{x+1} g(1) + x + 1 \overset{(5)}{=} e\left[eg(x) + e^x g(1) + x \right] + e^{x+1} g(1) +$$

$$+ x + 1 \Rightarrow g(x+2) = e^2 g(x) + 2e^{x+1} g(1) + ex + x + 1 (6).$$

Από τις (4) και (6) βρίσκουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x + 2x = ex + x + 1 \Rightarrow e^x - 1 = ex - x \Rightarrow e^x - 1 = x(e-1) .$$

Από την τελευταία ισότητα με x=2 βρίσκουμε:

$e^2 - 1 = 2(e-1) \Rightarrow (e+1)(e-1) = 2(e-1) \Rightarrow e + 1 = 2 \Rightarrow e = 1$, άτοπο.

—— Θα λύσουμε ακόμα την εξής άσκηση:

« Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$\textbf{αν } 2\alpha + \frac{3}{\alpha} = 4 \textbf{, τότε } \alpha^2 + \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2 = 1 \text{ ».}$$

Λύση. Έχουμε:

$$2\alpha+\frac{3}{\alpha}=4\Rightarrow\left(2\alpha+\frac{3}{\alpha}\right)^2=16\Rightarrow 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}+2.2\alpha.\frac{3}{\alpha}=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}+12=16\Rightarrow 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}=4\Rightarrow\alpha^2+\frac{9}{4\alpha^2}=1\Rightarrow\alpha^2+\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2=1.$$

Σχόλιο 3. Τι το ιδιαίτερο έχει η άσκηση αυτή; **Δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\alpha\neq 0$ που να ισχύει η υπόθεση.** Πράγματι, τότε θα είχαμε:

$$2\alpha+\frac{3}{\alpha}=4\Rightarrow 2\alpha^2-4\alpha+3=0\Rightarrow\alpha^2-2\alpha+\frac{3}{2}=0\Rightarrow\alpha^2-2\alpha+1+\frac{1}{2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha-1)^2+\frac{1}{2}=0,\ \text{άτοπο.}$$

Σχόλιο 4. Αν και, όπως είπαμε και παραπάνω, τα θέματα του τύπου αυτού (με ψευδή υπόθεση) δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν λανθασμένα, η γνώμη μου είναι ότι τέτοιου είδους θέματα δεν πρέπει να τίθενται σε εξετάσεις που αφορούν μαθητές (Γυμνάσιο, Λύκειο, Πανελλαδικές). Και τούτο για δύο λόγους:

α) Αν ένας μαθητής φθάσει στο συμπέρασμα ότι η υπόθεση είναι ψευδής θα γνωρίζει ότι έχει λύσει την άσκηση και ότι πρέπει να σταματήσει εκεί; Νομίζω όχι, σύμφωνα με αυτά που διδάσκεται. **Κατά πάσα πιθανότητα θα νομίζει ότι ο ίδιος κάπου έχει κάνει λάθος και θα σπαταλήσει το χρόνο του προσπαθώντας να βρει το λάθος του**.

β) Ας υποθέσουμε ότι ένας μαθητής φτάνει στο συμπέρασμα ότι η υπόθεση είναι ψευδής και ότι γνωρίζει ότι σ' αυτή την περίπτωση έχει λύση την άσκηση. Ο βαθμολογητής θα θεώρηση σωστή μια τέτοια λύση; Πολύ αμφιβάλλω, όπως είπα και παραπάνω.

3. Η ισοδυναμία

Η ισοδυναμία είναι μια από τις βασικότερες έννοιες στα μαθηματικά. Βεβαίως, άλλο εννοούμε όταν λένε ότι δύο εξισώσεις(ή δύο ανισώσεις, κτλ.) είναι ισοδύναμες και άλλο όταν λέμε ότι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες. Όπως είναι γνωστό, δύο εξισώσεις(ή δύο ανισώσεις, κτλ.) λέμε ότι είναι ισοδύναμες αν, και μόνο αν, έχουν τις ίδιες λύσεις, δηλαδή κάθε λύση της μιας είναι και λύση της άλλης.

Δύο προτάσεις πότε λέμε ότι είναι ισοδύναμες; Ακριβέστερα, αν p και q είναι δύο προτάσεις, πότε λέμε ότι η πρόταση: p⇔q (διαβάστε: «p ισοδυναμεί q»), είναι αληθής και πότε είναι ψευδής; Αυτό, όπως και η συνεπαγωγή, ορίζεται στη Μαθηματική Λογική, ως εξής:

Η πρόταση:p⇔q είναι αληθής μόνο αν οι προτάσεις p και q είναι ταυτοχρόνως αληθείς ή ταυτοχρόνως ψευδείς. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι ψευδής.

p	q	p⇔q
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

— Σημειώνουμε ότι σε μια ισοδυναμία: p⇔q δεν υπάρχει « υπόθεση» και «συμπέρασμα», όπως σε μία συνεπαγωγή.

— Μερικοί άλλοι τρόποι εκφράσεως της ισοδυναμίας p⇔q ,είναι οι εξής;

«p αν, και μόνο αν,q»
«p πρέπει και αρκεί q»
«p τότε, και μόνο τότε,q»
«p και q είναι ισοδύναμες»
«p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη της q»

4. Ισοδυναμία και ορισμοί

Στα μαθηματικά (και όχι μόνο) , με την βοήθεια των ισοδυναμιών δίνουμε τους διάφορους ορισμούς. Βεβαίως, την ισοδυναμία στους ορισμούς την **δεχόμαστε** και δεν έχει την έννοια της ισοδυναμίας δύο γνωστών προτάσεων, όπως επίσης και η ισοδυναμία δύο εξισώσεων δεν έχει την ίδια έννοια με την ισοδυναμία δύο προτάσεων (§3) (γι' αυτό συμβολικά γράφουμε: $\underset{o\rho.}{\Leftrightarrow}$ και όχι: $\Leftrightarrow$).Δηλαδή, όταν θέλουμε να ορίσουμε: μια νέα έννοια Α και λέμε: **«Α αν, και μόνο αν, Β»** ,εννοούμε ότι: « Όταν λέμε Α **δεχόμαστε** ότι ισχύει το Β και όταν ισχύει το Β **δεχόμαστε** να λέμε Α».

Δυστυχώς, μερικά βιβλία, μεταξύ αυτών τα σχολικά και μερικά πανεπιστημιακά , δεν δίνουν τους ορισμούς υπό μορφή ισοδυναμιών, αλλά υπό μορφή συνεπαγωγών , που είναι μεγάλο λάθος, με αποτέλεσμα να προκαλούν σύγχυση. Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

1) ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Στη σελίδα 18, γράφει:
« Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία». Με άλλα λόγια, μας λέει ότι: « Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία , τότε οι γωνίες αυτές λέγονται συμπληρωματικές». Ακριβέστερα, μας λέει ότι:

$$(\hat{\omega}+\hat{\varphi}=1o\rho\theta\acute{\eta})\Rightarrow(\hat{\omega} \text{ και } \hat{\varphi} \text{ είναι συμπληρωματικές}).$$

Και τώρα γεννάται το ερώτημα, από πού προκύπτει ότι: « Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία;». Προφανώς από πουθενά. Ο σωστός ορισμός είναι ο εξής:
« Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν, <u>και μόνο αν</u>, έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία».

Σχόλιο. Αν ένας σας έλεγε ότι :«Δύο άνθρωποι λέγονται πρώτα ξαδέλφια, αν οι πατεράδες τους είναι αδέλφια ». Δηλαδή: «Αν οι πατεράδες τους είναι αδέλφια, τότε λέγονται πρώτα ξαδέλφια», είναι βέβαιο ότι θα αντιδρούσατε και θα του λέγατε ότι αυτό δεν είναι σωστό. Και θα είχατε δίκιο, γιατί δύο άνθρωποι είναι πρώτα ξαδέλφια και σε άλλες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, όταν οι μανάδες τους είναι αδελφές. Αλλά ο ορισμός αυτός είναι εντελώς όμοιος με τον παραπάνω ορισμό, καθώς και με όλους τους άλλους ορισμούς , που δίνει το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας , όπως και όλα τα αλλά σχολικά βιβλία και όχι μόνο.

2) ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Ενιαίου λυκείου. Στη σελίδα 80, γράφει:
« Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται άρτια, αν για κάθε $x\in$ Α ισχύει: $-x\in$ Α και f(-x)=f(x)».
Ο σωστός ορισμός είναι ο εξής:
« Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται άρτια, αν, <u>και μόνο αν</u>, για κάθε $x\in$ Α ισχύει: $-x\in$ Α και f(-x)=f(x)».

3) ΑΛΓΕΒΡΑ Β Ενιαίου λυκείου. Στη σελίδα 94, γράφει:
« Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από το προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού»
Ο σωστός ορισμός είναι ο εξής:
« Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν, <u>και μόνο αν,</u> κάθε όρος της προκύπτει από το προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού»

4) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου. Στη σελίδα 213, γράφει:
« Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός».

Ο σωστός ορισμός είναι ο εξής:
« Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν, <u>και μόνο αν,</u> υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός».

5. Απόδειξη ισοδυναμίας:p⇔q

1^ος τρόπος. Δείχνουμε ότι: p ⇒ q και q ⇒ p.

2^ος τρόπος. Κατασκευάζουμε μια διαδοχή (αληθών) ισοδυναμιών της μορφής:

p ⇔ r ⇔ t ⇔…u ⇔ q ή q ⇔ u ⇔…⇔ r ⇔ p.

3^ος τρόπος. Δείχνουμε ότι: p ⇔ r και q ⇔ r.

- Βεβαίως υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να αποδείξουμε μια ισοδυναμία , όπως για παράδειγμα η μέθοδος της εις άτοπο αγωγής κτλ.

6. Μία απλή αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση

Η παρακάτω πρόταση είναι χρήσιμη σε πολλά ζητήματα των μαθηματικών. Κυρίως όμως είναι χρήσιμη όταν ζητάμε να βρούμε ένα ή περισσότερα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμούς, συναρτήσεις, διανύσματα κτλ.).

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν (Σ) είναι μια σχέση ή ένα σύστημα σχέσεων και για τις σχέσεις: $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\nu$ **ισχύουν οι συνεπαγωγές:**

$$(\Sigma) \Rightarrow \sigma_1, (\Sigma) \Rightarrow \sigma_2, ..., (\Sigma) \Rightarrow \sigma_\nu, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} (\Sigma) \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ . \\ . \\ . \\ \sigma_\nu \end{cases}$$

Με άλλα λόγια: **« Κάθε σχέση (ή σύστημα σχέσεων) ισοδυναμεί με τον εαυτόν της μαζί με όποιες και όσες σχέσεις θέλουμε από εκείνες που συνεπάγονται από τη σχέση αυτή».**

Απόδειξη. Έστω ότι οι σχέσεις του (Σ) είναι αληθείς. Τότε, λόγω των συνεπαγωγών (1), κάθε μία από τις σχέσεις $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\nu$ είναι αληθής. Το αντίστροφο είναι προφανές.

- Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής τις παραπάνω πρότασης.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x και y , για τους οποίους ισχύουν:

$$x < 5, \quad 3x - 2y > 9, \quad 2x + 5y > 6.$$

Λύση. Έχουμε, για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} x<5 \\ 3x-2y>9 \\ 2x+5y>6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x<5 \\ 15x-10y>45 \\ 4x+10y>12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x<5 \\ 19x>57 \\ 3x-2y>9 \\ 2x+5y>6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3<x<5 \\ 3x-2y>9 \\ 2x+5y>6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=4 \\ 12-2y>9 \\ 8+5y>6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=4 \\ -\dfrac{2}{5}<y<\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{x=4} \\ \text{y=o ή y=1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \text{x=4} \\ \text{y=0} \end{cases} \text{ή} \begin{cases} \text{x=4} \\ \text{y=1} \end{cases} \right)$$

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: (x=4 , y=0) και (x=4 , y=1).

ΑΣΚΗΣΗ 2. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει: $z^2 = 3-4i$.
Λύση. Ένας μιγαδικός αριθμός z=x+yi , $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ζητούμενος αν , και μόνον αν:

$$z^2 = 3-4i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)^2 = 3-4i \\ \left|(x+yi)^2\right| = |3-4i| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2xyi = 3-4i \\ |x+yi|^2 = \sqrt{3^2+(-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{x=2 ή x=-2}) \\ (\text{y=1 ή y=-1}) \\ \text{xy=-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{x=2, y=-1}) \text{ και} \\ (\text{x=-2, y=1}) \end{cases}$$

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:z=2-i και z=-2+i .

ΑΣΚΗΣΗ 3. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , για τους οποίους ισχύει:

$$\mathbf{z^7.\overline{z}^3 = 1}.$$

(Σχολικό βιβλίο Γ τάξης Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης σελίδα 122 άσκηση 5)
Λύση. Έχουμε,για κάθε $z \in \mathbb{C}$:

$$z^7.\overline{z}^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z^7.\overline{z}^3 = 1 \\ \left|z^7.\overline{z}^3\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^4.z^3.\overline{z}^3 = 1 \\ |z|^{10} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^4.|z|^6 = 1 \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^4 = 1 \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow (\text{z=1 ή z=-1 ή z=i ή z=-i}).$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: z=1 , z=-1 , z=i και z=-i.

Σχόλιο. Το σχολικό βιβλίο στις λύσεις (σελίδα 105 α΄ τρόπος) διακόπτει τις ισοδυναμίες με τη λέξη «Επομένως» που σημαίνει : «Συνεπάγεται». Έτσι όμως όλες οι ισοδυναμίες που γράφει θα έπρεπε να είναι συνεπαγωγές και στο τέλος να επαληθεύσει αν οι αριθμοί που βρήκε επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση. Γιατί αυτό δεν συνάγεται από πουθενά, αφού οι ισοδυναμίες διακόπτονται. Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι αντίστροφες συνεπαγωγές ,αν και ισχύουν, δεν χρειάζονται στην απόδειξη. Τώρα, αν τις έγραψαν μόνο και μόνο επειδή ισχύουν, τότε θα έπρεπε να γράψουν και το θεώρημα του Πυθαγόρα και όχι μόνο!!!

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Α. Κ. Κυριακόπουλου:** «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ».
2. **Α. Κ. Κυριακόπουλου:** «ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ) ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ».
3. **Αριστείδου Φ. Πάλλα:** «ΕΤΗΣΙΟΝ ΔΕΛΤΙΟΝ 1947».
4. **Περιοδικό**: «ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ΔΕΛΤΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ» (Αριθ. 10, 1947)
5. **Περιοδικό :**Απολλώνιος. Έκδοση του παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας (Τεύχος 4^{o} ,2004)