

**Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου**  
**Ολιγόλεπτη Γραπτή Δοκιμασία**  
**Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού**

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίτης

21 Οκτωβρίου 2013

**Θέμα Α**

**A1.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

**A2.** Τι ορίζουμε ως μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ ;

**A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ).

i. Για κάθε  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  αν  $|z_1| = |z_2|$  τότε  $z_1 = z_2$ .

ii. Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει ότι  $|\bar{z}| = |-z|$ .

iii. Αν  $z \in \mathbb{C}$  και  $|z|^2 = z^2$ , τότε  $z \in \mathbb{R}$ .

iv. Αν  $|z| = 1$ , τότε  $|z + i|^2 = 2 + 2\text{Im}(z)$ .

v. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους.

vi. Αν  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| = 2$ , τότε ο μιγαδικός αριθμός  $w = z + \frac{4}{z}$  είναι πραγματικός.

vii. Αν  $z \in \mathbb{C}$  και ισχύει ότι  $\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z - \bar{z}}{2}i + 2 = 0$ , τότε η ελάχιστη τιμή του  $|z|$  ισούται με 2.

**Θέμα Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z + 2| = 2|z - 1| \tag{1}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση (1), να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 4.$$

**B3.** Αν ο μιγαδικός αριθμός  $z$  ικανοποιεί την εξίσωση (1), να αποδείξετε ότι η εικόνα του  $w = iz + 2 - 2i$  ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος B1.

*Σας εύχομαι επιτυχία!*