

Η ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΙΧΝΙΔΙΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

3^η Θεματική ενότητα
Αλληλεπίδραση της διδακτικής των μαθηματικών με την εξέλιξη των
μαθηματικών εννοιών, την εξέλιξη της ψηφιακής τεχνολογίας, τις
μαθησιακές δυσκολίες και τις ειδικές ικανότητες.

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία προτείνουμε μια εναλλακτική προσέγγιση σε κάποιες μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα του Γυμνασίου. Ο σκοπός μας είναι ο καθηγητής να διατηρήσει ή ακόμα καλύτερα να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών του για τα Μαθηματικά. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε παιχνίδια που έχουν αυστηρή μαθηματική ερμηνεία. Τα μαθηματικά πίσω από τα παιχνίδια αυτά είναι όχι μόνο υπαρκτά, αλλά και υπέροχα. Η χρήση τέτοιων παιχνιδιών στη διδασκαλία είναι ένας επιπλέον τρόπος για να δείξουμε και να αναδείξουμε στους μαθητές τη χρησιμότητα και τη χρηστικότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Abstract

In the present work, we present an alternative approach for some mathematical concepts for High school Algebra. Our aim is to preserve or even better to increase student's interest for Mathematics to a higher level. To achieve this we use games that can be explained using strict mathematical interpretation. These games can be explained with strict and wonderful mathematics. Furthermore using this kind of games in teaching

we have a way to show the usefulness and the usability of mathematics in our everyday life.

Εισαγωγή

Οι καθηγητές των μαθηματικών, ανεξάρτητα από την αγάπη τους για τα μαθηματικά ή τη διδασκαλία, προσπαθούν καθημερινά να βρουν τρόπους ώστε το μάθημα να είναι όσο πιο ενδιαφέρον γίνεται. Συχνές είναι οι περιπτώσεις που οι μαθητές θεωρούν ότι μόνο η αριθμητική χρειάζεται στην καθημερινότητά τους, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να χάνουν το ενδιαφέρον τους για το μάθημα.

Καλώς ή κακώς, οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν «στημένα» τα διάφορα παραδείγματα των σχολικών βιβλίων (είτε με τη μορφή δραστηριοτήτων, είτε με τη μορφή λυμένων παραδειγμάτων, είτε με τη μορφή ασκήσεων προς μαθηματική επεξεργασία). Κάθε συγγραφέας ενός σχολικού βιβλίου μαθηματικών χρησιμοποιεί ιδέες από την ζωή για να δημιουργήσει μαθηματικά προβλήματα. Οι ιδέες αυτές είναι άλλοτε επιτυχημένες και άλλοτε λιγότερο επιτυχημένες και στη συντριπτική τους πλειοψηφία χρησιμοποιούν αριθμούς που εξυπηρετούν την εκτέλεση των πράξεων.

Επιπλέον, κάθε συγγραφέας ενός βιβλίου μαθηματικών, αλλά και κάθε διδάσκοντας, επιβάλλεται να χρησιμοποιήσει μαθηματική ορολογία. Αυτό δημιουργεί ένα σοβαρό μειονέκτημα, διότι ο μη γνώστης της ορολογίας δεν μπορεί να επικοινωνήσει επαρκώς.

Ένας τρόπος, που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ένας καθηγητής μαθηματικών για να ξεφύγει από το συνηθισμένο μοτίβο διδασκαλίας και να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά, είναι να τους παρουσιάσει κάποια παιχνίδια που έχουν μαθηματική εξήγηση. Έτσι, η αυστηρή και τεχνική ορολογία απουσιάζει, οπότε είναι ευκολότερο για όλους τους μαθητές να συμμετέχουν παίζοντας με τα μαθηματικά.

Για την παιδαγωγική και διδακτική αξία των μαθηματικών παιχνιδιών έχουν εκφραστεί κατά το παρελθόν αρκετοί επιφανείς μαθηματικοί.

Ο Howard Eves [1, 2] είχε πει πως η παρουσίαση ενός μαθηματικού θέματος πρέπει να εμπεριέχει και στοιχεία της τέχνης του κλόουν και του θαυματοποιού για να είναι ενδιαφέρουσα.

Ο γνωστός μαθηματικός W. Sawyer [3] ισχυρίζεται με τη σειρά του πως «η εκπαίδευση θα έπρεπε να περιλαμβάνει στοιχεία τα οποία παίζουν το ρόλο ενός παγωμένου ντους», δηλαδή να δημιουργούν σοκ στον ακροατή και να τον διατηρούν ξύπνιο και σε εγρήγορση όσον αφορά την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά.

Ο Martin Gardner [4] έγραψε πως ο ιδανικότερος τρόπος για να προκαλέσεις το ενδιαφέρον των μαθητών σου είναι να παρουσιάσεις ένα μαθηματικό παιχνίδι, μία σπαζοκεφαλιά, ένα μαγικό τρυκ κάτι που οι παραδοσιακοί καθηγητές μαθηματικών το αποφεύγουν αφού δεν το θεωρούν σοβαρό. Αναφέρει επίσης [5] ότι ένα καλό μαθηματικό παιχνίδι μπορεί να ερεθίσει τη φαντασία ενός μαθητή πολύ γρηγορότερα απ' ότι μια πρακτική εφαρμογή.

Ο G. Polya [6] αναφέρει ότι τα μαθηματικά κατέχουν τη διόλου τιμητική διάκριση να είναι το λιγότερο δημοφιλές μάθημα στο σχολικό πρόγραμμα. Οι μελλοντικοί δάσκαλοι περνούν από το δημοτικό σχολείο μαθαίνοντας να απεχθάνονται τα μαθηματικά. Επιστρέφουν στο δημοτικό σχολείο για να διδάξουν μία γενιά να τα απεχθάνεται. Στην Ελλάδα, οι περισσότεροι δάσκαλοι είναι πρώην μαθητές τρίτης δέσμης ή θεωρητικής κατεύθυνσης κάτι που, σε γενικές γραμμές, επιβεβαιώνει τις θέσεις του Polya. Έτσι, οι καθηγητές στα Γυμνάσια έχουν να υπερκεράσουν ένα ακόμη πρόβλημα. Ένας καθηγητής για να μειώσει τις επιπτώσεις του προβλήματος αυτού, μπορεί να χρησιμοποιήσει παιχνίδια για να αυξήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, αλλά και να τους δείξει το δρόμο για να επιλύουν προβλήματα και ασκήσεις. Η ευχαρίστηση ενός μαθητή όταν δει ότι μπορεί να τα καταφέρει στα μαθηματικά, μπορεί να μας οδηγήσει σε θετικότερα αποτελέσματα. Ο Polya [6, 7] διατύπωσε έξι βασικές προτάσεις για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα αυτό.

- Διατύπωσε μία υπόθεση και προσπάθησε να την ελέγξεις.
- Βρες ένα απλούστερο πρόβλημα από το δοθέν και προσπάθησε να το λύσεις.
- Φτιάξε έναν πίνακα και από τα στοιχεία αυτού προσπάθησε να συμπεράνεις, αλλά και να καταλήξεις στο αποτέλεσμα.
- Κάνε ένα διάγραμμα, μία εικόνα ή ένα σχήμα σχετικό με το πρόβλημα.
- Δούλεψε αντίστροφα.
- Βρες το μοτίβο του προβλήματος (αν έχει).

Η υιοθέτηση οποιουδήποτε από τα παραπάνω βήματα είναι ικανή να δώσει την απαραίτητη ώθηση στο μαθητή για να λύσει ένα δοσμένο πρόβλημα, οπότε και να προκληθεί αύξηση του ενδιαφέροντός τους.

Αργότερα ο Lakatos [7] προωθώντας τις ιδέες του Polya, ηγήθηκε ενός νέου κινήματος στη φιλοσοφία των μαθηματικών, στρέφοντας την προσοχή των φιλοσόφων σε ερωτήματα σχετικά με τον τρόπο ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης, τη φύση της μαθηματικής εξήγησης και την επίλυση προβλήματος. Έτσι, οι Polya και Lakatos έστρεψαν την προσοχή των

μαθηματικών στην εύρεση τρόπων ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν ικανότητες στην επίλυση προβλημάτων.

Οι βασικοί παράγοντες που ευθύνονται για την μείωση του ενδιαφέροντος των μαθητών [8, 9] και ως εκ τούτου η προσπάθειά μας θα πρέπει να είναι η υποβάθμιση του ρόλου τους, είναι:

- το φορμαλιστικό πρόγραμμα διδασκαλίας,
- η τεστομανία και η βαθμοθηρία,
- η απαιτητικότητα της προχωρημένης γνώσης και
- οι ανταγωνιστικοί παράγοντες της ζωής.

Μαθηματικά παιχνίδια

Τα μαθηματικά παιχνίδια μπορούν να δώσουν την ώθηση που χρειαζόμαστε για να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, στην Α΄ Γυμνασίου μπορούμε να αναδείξουμε τη χρησιμότητα της επιμεριστικής ιδιότητας από το γρήγορο υπολογισμό του γινομένου $78 \cdot 34$. Ακολουθώντας παραθέτουμε ενδεικτικά μερικά τέτοια παιχνίδια για τις τάξεις του Γυμνασίου και αφορούν την Άλγεβρα [10, 11, 12, 13].

Διαιρούνται με το 33

Προτεινόμενη τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Διαιρετότητα

Εκφώνηση

Αν ένας διψήφιος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 33, τότε και ο διψήφιος που προκύπτει με αντεστραμμένες τις θέσεις των ψηφίων του είναι επίσης πολλαπλάσιο του 33.

Συζήτηση

Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει πολύ απλή μαθηματική επεξεργασία, δεδομένου ότι οι διψήφιοι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 33 είναι οι 33, 66, 99, όπου αντιστρέφοντας τη θέση των ψηφίων προκύπτουν οι ίδιοι αριθμοί. Η ομορφιά της αιτιολόγησης κρύβεται στην μαθηματική απόδειξη, αν και είναι λίγο δύσκολη για την Α΄ Γυμνασίου. Βέβαια, το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να δοθεί με δυσκολότερη μορφή για μεγαλύτερη τάξη.

Για παράδειγμα, ο τριψήφιος αριθμός $\overline{xyz}$ διαιρείται με το 37, τότε και οι αριθμοί $\overline{yzx}$, $\overline{zxy}$ διαιρούνται με το 37.

Μαθηματική επεξεργασία

Αν x είναι το ψηφίο των δεκάδων και y το ψηφίο των μονάδων ο αρχικός αριθμός είναι ο $10x + y$ και είναι πολλαπλάσιο του 33, άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$10x + y = 33\lambda, \quad (1)$$

ή

$$y = 33\lambda - 10x. \quad (2)$$

Αντίστοιχα, ο αριθμός με ψηφίο δεκάδων y και ψηφίο μονάδων x είναι ο $10y + x$, οπότε

$$10y + x = 33(10\lambda - 3x),$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 33.

Πλήθος ψηφίων

Προτεινόμενη τάξη: Α' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Δυνάμεις

Εκφώνηση

Ποιο είναι το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $10^{20} - 1$;

Συζήτηση

Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε κάποιος να το λύσει γράφοντας τον αριθμό 10^{20} και αφαιρώντας το 1, οπότε θα είχε το ακριβές αποτέλεσμα, άρα και το πλήθος των ψηφίων. Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να τεθεί είτε σε πιο δύσκολη μορφή (για παράδειγμα να ζητάμε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $10^{201} - 1$) είτε σε μεγαλύτερη τάξη (για παράδειγμα να ζητάμε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $10^{983} - 10^5$).

Μαθηματική επεξεργασία

Ο αριθμός 10^{20} έχει 21 ψηφία, όπου τα 20 τελευταία είναι μηδενικά και ο αριθμός αυτός είναι ο πρώτος με 21 ψηφία. Αφαιρώντας 1 προκύπτει ο μεγαλύτερος εικοσαψήφιος αριθμός, άρα ο αριθμός $10^{20} - 1$ έχει 20 ψηφία. Στο παιχνίδι αυτό θα μπορούσε κάποιος να λύσει ένα πιο εύκολο παιχνίδι (δεύτερο βήμα κατά τον Polya), βρίσκοντας το πλήθος των ψηφίων των αριθμών $10^2 - 1$, $10^3 - 1$, $10^4 - 1$, οπότε θα αναδειχθεί και το μοτίβο του παιχνιδιού (έκτο βήμα).

Υπολογίζοντας τον αριθμό

Προτεινόμενη τάξη: Β' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Εξισώσεις πρώτου βαθμού

Εκφώνηση 1η

Σκεφτείτε έναν αριθμό. Διπλασιάστε τον και αφαιρέστε 5. Στο αποτέλεσμα προσθέστε το τριπλάσιο του αρχικού αριθμού και στη συνέχεια προσθέστε 11. Ζητούμε τον αριθμό που βρήκε ο μαθητής, κάτι που μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τον αρχικό αριθμό που σκέφτηκε ο μαθητής.

Συζήτηση

Αυτό είναι ένα έξυπνο πρόβλημα εξίσωσης, η οποία δεν είναι φανερή στον μαθητή. Με αυτό το πρόβλημα θα μας δοθεί η δυνατότητα να δείξουμε τις δυνατότητες που έχουμε χρησιμοποιώντας εξισώσεις. Επιπλέον, με τη βοήθεια αυτού του παραδείγματος θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για αόριστη εξίσωση (ή ταυτότητα), όπως θα δείξουμε στην επόμενη εκφώνηση.

Μαθηματική επεξεργασία

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε πρακτικά να λύσουμε μια εξίσωση πρώτου βαθμού, που έχει τη μορφή

$$2x - 5 + 3x + 11 = \alpha, \quad (3)$$

όπου α είναι το αποτέλεσμα που βρήκε ο μαθητής. Συνεπώς, ο αριθμός που σκέφτηκε ο μαθητής είναι ο

$$x = \frac{\alpha - 6}{5}. \quad (4)$$

Εκφώνηση 2η

Σκεφτείτε έναν αριθμό. Διπλασιάστε τον και αφαιρέστε 5. Στο αποτέλεσμα προσθέστε το τριπλάσιο του αρχικού αριθμού και στη συνέχεια προσθέστε 11. Στο αποτέλεσμα αφαιρούμε το πενταπλάσιο του αρχικού αριθμού.

Συζήτηση

Στην περίπτωση αυτή η γνώση του αποτελέσματος που βρήκε ο μαθητής δεν μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τον αρχικό αριθμό που σκέφτηκε. Το παραπάνω πρόβλημα είναι καλύτερο να τεθεί ως ανοικτό πρόβλημα προς τους μαθητές, ώστε έχοντας καταλάβει τη διαδικασία του παιχνιδιού, να μπορέσουν να δουν μέσω του παιχνιδιού και την αόριστη εξίσωση.

Μαθηματική επεξεργασία

Αυτό συμβαίνει διότι η εξίσωση που έχουμε να λύσουμε είναι η

$$2x - 5 + 3x + 11 - 5x = \alpha, \quad (5)$$

όπου α είναι το αποτέλεσμα που βρήκε ο μαθητής. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι πάντα ίσο με 6, οπότε αυτός θα είναι και ο αριθμός που

βρήκε ο μαθητής, άρα ο αρχικός αριθμός δεν μπορεί να προσδιορισθεί. Ο λόγος είναι ότι έχουμε καταλήξει σε μια αόριστη εξίσωση.

Γνωρίζοντας τον αριθμό

Προτεινόμενη τάξη: Γ' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Αλγεβρικές παραστάσεις

Εκφώνηση

Σκεφτείτε έναν αριθμό. Εξαπλασιάστε τον. Στο αποτέλεσμα προσθέστε 3. Στη συνέχεια διαιρέστε με το 3 και προσθέστε 7. Βρείτε το μισό του αποτελέσματος και στη συνέχεια προσθέστε 3. Αφαιρέστε από το αποτέλεσμα τον αρχικό αριθμό που σκεφτήκατε. Θα πρέπει όλοι να έχετε βρει 7.

Συζήτηση

Οι μαθητές που δεν το έχουν ξανακούσει θα μας χαρακτηρίσουν «μάγους», ενώ όλοι οι μαθηματικοί γνωρίζουν ότι τα πράγματα είναι πραγματικά πολύ απλά. Ο λόγος είναι ότι πρακτικά έχουμε μια αλγεβρική παράσταση που είναι σταθερή και ανεξάρτητη του αρχικού αριθμού. Το πρόβλημα μπορεί να πάρει μια πιο απλή μορφή, για να γίνει και σε μικρότερη τάξη.

Μαθηματική επεξεργασία

Αν x είναι ο αρχικός αριθμός η παράσταση είναι η

$$A = \frac{\frac{6x+3}{2} + 7}{3} + 3 - x, \quad (6)$$

όπου κάνοντας τις πράξεις απαλείφεται η μεταβλητή x και βρίσκουμε ότι $A = 7$.

Το κόλπο με τον αριθμό 1.089

Προτεινόμενη τάξη: Γ' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Αλγεβρικές παραστάσεις

Εκφώνηση

Σκεφτείτε έναν τριψήφιο αριθμό, που τα ψηφία των εκατοντάδων και των μονάδων να είναι διαφορετικά. Αντιστρέψτε τη σειρά των ψηφίων και αφαιρέστε το μικρότερο από το μεγαλύτερο. Στη διαφορά που βρήκατε κάντε το ίδιο, απλά προσθέστε τους δύο αριθμούς. Βρήκατε 1.089.

Συζήτηση

Και στο πρόβλημα αυτό προκύπτει στην ουσία μια σταθερή αλγεβρική παράσταση, με τη διαφορά ότι οι εμπλεκόμενες μεταβλητές είναι τρεις και όχι μία. Το συγκεκριμένο παιχνίδι μπορεί να προχωρήσει και με μια μικρή

παραλλαγή. Μπορεί κάποιος να πάει σε ένα βιβλίο στην σελίδα 10 στην όγδοη γραμμή, να βρει την ένατη^{9η} λέξη και να την απομνημονεύσει, οπότε το παιχνίδι θα αποκτήσει επιπλέον μυστήριο.

Μαθηματική επεξεργασία

Αν x το ψηφίο των μονάδων, y το ψηφίο των δεκάδων και z το ψηφίο των εκατοντάδων, ο αρχικός αριθμός είναι ο

$$100x + 10y + z, \quad (7)$$

ενώ με αντεστραμμένη φορά των ψηφίων είναι ο

$$100z + 10y + x. \quad (8)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $x > z$, οπότε η ζητούμενη διαφορά είναι

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 100(x - z - 1) + 9 \cdot 10 + 10 + z - x.$$

Αυτό σημαίνει ότι στον αριθμό με ψηφίο εκατοντάδων $x - z - 1$, ψηφίο δεκάδων 9 και ψηφίο μονάδων $10 + z - x$ [δηλαδή, στον αριθμό $100(x - z - 1) + 9 \cdot 10 + 10 + z - x$], πρέπει να προσθέσουμε τον αριθμό με ψηφίο εκατοντάδων $10 + z - x$, ψηφίο δεκάδων 9 και ψηφίο μονάδων $x - z - 1$, δηλαδή τον αριθμό

$$100(10 + z - x) + 9 \cdot 10 + x - z - 1 = 1.089 + 99z - 99x.$$

Συνεπώς το άθροισμά τους είναι πάντα σταθερό, αφού

$$99x - 99z + 1.089 + 99z - 99x = 1.089.$$

Πράξεις στα γρήγορα

Προτεινόμενη τάξη: Γ' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Ταυτότητες

Εκφώνηση

Μπορείτε να βρείτε χωρίς να γράψετε το τετράγωνο του 991;

Συζήτηση

Η εύρεση του τετραγώνου ενός μεγάλου αριθμού με τη χρήση χαρτιού και μολυβιού είναι μια απλή διαδικασία. Χωρίς να γράψει όμως κάποιος είναι μια επίπονη διαδικασία που μπορεί να οδηγήσει και σε λάθη.

Μαθηματική επεξεργασία

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη χρήση της ταυτότητας

$$x^2 = (x - y)(x + y) + y^2, \quad (9)$$

οπότε

$$\begin{aligned} 991^2 &= (991 - 9)(991 + 9) + 9^2 \\ &= 982 \cdot 1.000 + 81 \end{aligned}$$

$$= 982.081.$$

Στην ουσία, χρησιμοποιούμε σαν «πάτημα» ένα στρογγυλό αριθμό (το 1.000 στην περίπτωση μας) για να μας διευκολύνει στις πράξεις. Τέτοιες τεχνικές χρησιμοποιούν όλοι οι άνθρωποι που εκτελούν γρήγορα πράξεις «με το νου».

Τετράγωνα αριθμών που τελειώνουν σε 5

Προτεινόμενη τάξη: Γ' Γυμνασίου

Διαπραγματευόμενη έννοια: Ταυτότητες

Εκφώνηση

Γνωρίζουμε ότι: $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1.225$, $45^2 = 2.025$ κ.τ.λ. Ποιος «κανόνας» φαίνεται να υπάρχει; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και βρείτε τα 215^2 , 7.345^2 .

Συζήτηση

Καταρχήν όλα τα τετράγωνα καταλήγουν στο 25. Συνεπώς, μας αρκεί να βρούμε πως προκύπτουν οι εκατοντάδες 2, 6, 12, 20 σε σχέση με τους 15, 25, 35, 45, αντίστοιχα. Κοιτώντας λίγο προσεκτικά βλέπουμε ότι $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$, δηλαδή προκύπτουν από το γινόμενο των δεκάδων με το πλήθος των δεκάδων αυξημένο κατά ένα.

Μαθηματική επεξεργασία

Αν x είναι το πλήθος των δεκάδων ενός αριθμού, αυτός θα είναι ο $10x + 5$, οπότε

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x + 1) + 25, \quad (10)$$

που επιβεβαιώνει τον κανόνα που διατυπώσαμε.

- Για την εύρεση του 215^2 και αφού γνωρίζουμε ότι ο αριθμός 215 έχει 21 δεκάδες, έχουμε $21 \cdot 22 = 462$ και κατ' επέκταση $215^2 = 46.225$.
- Για την εύρεση του 7.345^2 και αφού γνωρίζουμε ότι ο αριθμός 7.345 έχει 734 δεκάδες, έχουμε $734 \cdot 735 = 539.490$ και κατ' επέκταση $7.345^2 = 53.949.025$.

Αξίζει στο σημείο αυτό να προσθέσουμε ότι αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για αριθμούς που τελειώνουν σε 76, αφού τα τετράγωνά τους δίνουν αριθμούς που τελειώνουν σε 76.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, παρουσιάσαμε μερικά μαθηματικά παιχνίδια, αλλά προφανώς υπάρχουν και άλλα σε αυτές ή σε αντίστοιχες έννοιες. Για

παράδειγμα, τα παιχνίδια λογικής που χρησιμοποιούν το άτοπο, παιχνίδια που χρησιμοποιούν προόδους, παιχνίδια που αναδεικνύουν τη διαφορά συνεπαγωγής και ισοδυναμίας, παιχνίδια που χρησιμοποιούν μέγιστα και ελάχιστα σε συναρτήσεις δευτέρου βαθμού θα μπορούσαν να εφαρμοσθούν. Κάθε διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει τους κατάλληλους γρίφους που θα ενεργοποιήσουν τους μαθητές του, ανάλογα με το επίπεδο της τάξης του. Ας μην ξεχνούμε τι έχει πει και ο Serge Lang: «Κάθε δάσκαλος πρέπει να πορευτεί σύμφωνα με το δικό του τρόπο, τη δική του όσφρηση. Καθένας πρέπει να χρησιμοποιήσει τα δικά του μέσα για να συγκινήσει τους μαθητές. Χρειαζόμαστε τα πάντα χωρίς αποκλεισμούς.»

Ενδεικτική βιβλιογραφία

1. Eves Howard, Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών έως το 1650, *Εκδόσεις Τροχαλία*, 1989.
2. Eves Howard, An introduction to the History of Mathematics, *New York: Saunders College publishing*, 1992.
3. Sawyer N. W., Prelude to Mathematics, *Dover Publications*, 1982.
4. Gardner Martin, Το πανηγύρι των μαθηματικών, *Εκδόσεις Τροχαλία*, 1986.
5. Gardner Martin, Το τσίρκο των μαθηματικών, *Εκδόσεις Τροχαλία*, 1997.
6. Polya Gyorgy, Πώς να το λύσω (επιμέλεια Τάσου Πατρώνη), *Εκδόσεις Καρδαμίτσα*, 1991.
7. Κολέζα Ευγενία, Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών, *Εκδόσεις Τόπος*, 2009.
8. Τουμάσης Μπάμπης, Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών, *Εκδόσεις Κωστόγιαννος*, 1999.
9. Τουμάσης Μπάμπης, Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών, *Εκδόσεις Gutenberg*, 1999.
10. Ball Johnny, Σκέψου έναν αριθμό. Τα μαθηματικά είναι παιχνίδι! *Εκδόσεις Σαββάλας*, 2006.
11. Perelman Yakov, Διασκεδαστικά Μαθηματικά, Μέρος 2: Άλγεβρα, *Εκδόσεις Κάτοπτρο*, 2001.
12. Λιπορδέξης Σάκης, Λυγερός Νίκος, Φωτιάδης Νίκος, Μαθηματικές προκλήσεις, *Εκδόσεις Αρχιμήδης*, 2007.
13. Chernyak B. Y., Rose M. R., Το κοτόπουλο από το Μίνσκ, *Εκδόσεις Σαββάλας*, 2001.