

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Όριο Συνάρτησης Στο $x_0 \in \mathbb{R}$ - Ιδιότητες Ορίων

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

11 Νοεμβρίου 2013

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda - \mu,$$

$$(\beta) \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mu \in \mathbb{R}^* \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1.$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right) = -\frac{1}{4}.$$

3. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |3x - 2|}{x - 1}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 1| + x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^5 - 5x + 1| - |x^3 - 3x + 1|}{x}.$$

4. Αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ x^2 + 5x + 2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

5. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2013x)}{x}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+9} - 3}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2014x)}{\eta\mu(2013x)}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sigma\phi x - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi x}$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}.$$

6. Να αποδείξετε ότι:

(α) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και $|f(x)| \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

(β) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

(γ) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^2(x) - 6f(x) \leq x^2 - 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.

8. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}-1} \eta\mu \frac{1}{x} \right).$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right)}{\eta\mu x} = 0.$

9. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 1,$$

να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x - 2}.$

10. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) - f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2 - \eta\mu^2 x} = 10.$$

11. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + \alpha + 3}{x - 2} = \beta, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

12. Να βρείτε τα όρια των $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 2g(x)) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - f(x)) = 2.$$