1 . Υπάρχει συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ώστε

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x\le a \\ x, & x\ge a \end{cases};$$

2. Να βρείτε το a ώστε η σχέση

$$f(x)=\begin{cases} 3x+7, & x<3a+2 \\ 7x+1, & x\ge 2a+5 \end{cases}$$

να ορίζει συνάρτηση.

3. Υπάρχουν συναρτήσεις $f,g:R\to R$, τέτοιες ώστε $f(g(x))=x^2$ και $g(f(x))=x^3$, για κάθε $x\in R$;

4. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=x^2+\frac{1}{4}$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(c)=c$.

5. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $(f\circ f)(x)=x^2$ και $f(0)=0$ Να βρείτε το $f(1)$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda(x-1)}, & x\ne 1 \\ \lambda, & x=1 \end{cases}$. Να βρείτε τη θετική τιμή του λ για την οποία η f είναι 1-1.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1): Η f είναι 1-1

(2): Για οποιαδήποτε δύο μη κενά υποσύνολα του R ισχύει $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$

8. Για τη συνάρτηση f, η οποία ορίζεται στο $(0,+\infty)$ ισχύει $f(\lambda x)>f(\frac{x}{\lambda})$, για κάθε $x>0$ και για κάθε $\lambda>1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

9. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a,b,c,d για τους οποίους ισχύει $a<b<c<d$ και οι συναρτήσεις f,g οι οποίες ορίζονται και είναι συνεχείς στα διαστήματα $[a,b]$ και $[c,d]$ αντιστοίχως. Να βρείτε μία συνεχή συνάρτηση $h:R\to R$, για την οποία ισχύει $h(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[c,d]$

10. Για μία συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $[f(x)]^5+f(x)=x$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η εξίσωση $f(f(x))=x$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

12. Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1 \text{ , να βρείτε το } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{3}{2}x)}{f(x)}$$

13. Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς :

$$\frac{\eta\mu 1}{\eta\mu 2},\ \frac{\eta\mu(\frac{3}{2})}{\eta\mu(\frac{5}{2})},\ \frac{\eta\mu 2}{\eta\mu 3}$$

14. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει : $\int_{2-x}^{x^2} f(t)dt \geq x^2+x-2, \forall x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστο τον κρίσιμο σημείο στο διάστημα (1,4)

15. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=5$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}-\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

16. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+f'(x)=\begin{cases}\eta\mu x & ,x\leq 0\\ \sigma\upsilon\nu x & ,x>0\end{cases}$

17. Αν $f(x)=\int_1^e t^x dt, x\in\mathbb{R}$ να βρείτε την $f'(x)$.

18. Να λύσετε την εξίσωση $\int_{|\eta\mu x|}^{|x|}\frac{e^t}{t^2+1}dt=0$

19. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1] με

1. $f(x)\neq x, \forall x\in(0,1)$
2. $f(0)=0$ και $f(1)=1$

να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n-1} f^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)<n$, όπου n ακέραιος >2.

20. Υπάρχουν αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης $f(x)=6x-1, x\in R$, οι οποίες δεν έχουν την μορφή $\int_a^x f(t)dt$;

21. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την :

$$f(x) = \int_1^x \left(\int_{t^2}^{t^3} \frac{du}{1+u^4} \right) dt, x \in R .$$

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-1000)^{100} + x^{100}, x \in R$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

β) Να δείξετε ότι $1000^{100} > 900^{100} + 100^{100}$.

23. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2, f(e) = e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι :

α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε :

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

24. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης :

$$2 \ln x = \lambda x^2 + 1, \lambda > 0$$

25. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον χ΄χ και τον ψ΄ψ, όπου $f(x) = \int_1^x 2e^{t^2} dt$.