ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in R$, να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, $x \in \Delta$.

Μονάδες 9

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0}(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_0$

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

ε) Αν Ρ(Α) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \neq \emptyset$, τότε

$$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_\kappa)$$

Μονάδες 10

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ ε) Σ
Στο (ε), το Α αποτελείται από διακριτά μεταξύ τους στοιχεία, κατά τον ορισμό του συνόλου.

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144°
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
ΣΥΝΟΛΟ				

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14

Μονάδες 4

Β1. Είναι $\omega_3 = 144° \Rightarrow \dfrac{\nu_3}{60} = \dfrac{144°}{360°} \Rightarrow \nu_3 = 24$.

Έστω $\nu_1 = \nu_2 = x$. Τότε αφού 48 μαθητές πήραν βαθμό στο διάστημα [10, 16), θα είναι:

$N_3 = 48 \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 48 \Rightarrow 2x + 24 = 48 \Rightarrow x = 12$

Αφού 6 πήραν τουλάχιστον 18, θα είναι $\nu_5 = 6$, άρα $\nu_4 = \nu - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_5) = 60 - 54 = 6$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ και $f_i\% = \dfrac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$, συμπληρώνουμε τις άλλες στήλες.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
[10 - 12)	11	12	0,2	20
[12 - 14)	13	12	0,2	20
[14 - 16)	15	24	0,4	40
[16 - 18)	17	6	0,1	10
[18 - 20]	19	6	0,1	10
ΣΥΝΟΛΟ		60	1	100

Β2. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \ldots = \dfrac{864}{60} = 14,4$

Β3. Στο διάστημα [10, 14) πήραν βαθμό $\nu_1 + \nu_2 = 24$ μαθητές.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \dfrac{\nu+1}{\nu+4}$ και $P(B-A) = \dfrac{\nu-1}{2\nu}$

όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu=4$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A'\cup B'$

Μονάδες 5

Γ1. Είναι $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A \Rightarrow P(A-B) = P(A)$

και ομοίως: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow B - A = B \Rightarrow P(B-A) = P(B)$

Γ2. Ακόμα είναι:

$A \cup B = \Omega \Rightarrow P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow \dfrac{\nu+1}{\nu+4} + \dfrac{\nu-1}{2\nu} = 1 \Rightarrow \nu^2 - 3\nu - 4 = 0 \Rightarrow \nu = 4$, αφού $\nu > 0$.

Γ3. Αντικαθιστώντας την τιμή $\nu = 4$: $P(A) = \dfrac{5}{8}$, $P(B) = \dfrac{3}{8}$

Γ4. $A' = \Omega - A = B$, $B' = \Omega - B = A \Rightarrow A' \cup B' = \Omega \Rightarrow P(A' \cup B') = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής

Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και

τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{300s^2}\left(t - \bar{x}\right)^3, \quad t \in R \quad \text{και} \quad s \neq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_\nu)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$

Μονάδες 6

Δ1. Είναι $f'(t) = \frac{3}{300s^2}(t-\bar{x})^2(t-\bar{x})' = \frac{1}{100s^2}(t-\bar{x})^2 \geq 0$, οπότε η f είναι γνησίως άυξουσα.

Δ2. Είναι $f''(t) = \frac{2}{100s^2}(t-\bar{x})(t-\bar{x})' = \frac{2}{100s^2}(t-\bar{x})$.

Είναι $f''(t) = 0 \Rightarrow t = \bar{x}$

Για $t < \bar{x} \Rightarrow f'' < 0$, για $t > \bar{x} \Rightarrow f'' > 0$, οπότε η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = \bar{x}$ την τιμή: $f'(\bar{x}) = 0$

Δ3. $f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{100s^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\bar{x}}{s}\right)^2 = 100 \Rightarrow \left|\frac{\bar{x}}{s}\right| = 10 \Rightarrow CV = 0,1$. Είναι ομοιογενές.

Δ4. $$\bar{X} = \frac{f'(t_1)+f'(t_2)+\ldots+f'(t_\nu)}{\nu} = \frac{1}{100s^2}\cdot\frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+\ldots+(t_\nu-\bar{x})^2}{\nu} =$$

$$= \frac{1}{100s^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2}{\nu}\frac{1}{100s^2}\cdot s^2 = \frac{1}{100}$$