

Υποδείξεις - Λύσεις
Ασκήσεων Επανάληψης στην Ανάλυση
του Σπύρου Καπελλίδη

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=4558>

Αχιλλέας Συνεφασκόπουλος

19 Ιουλίου 2010

1. Όχι, δεν υπάρχει, διότι δεν είναι καλώς ορισμένη στο a , αφού η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 3 = x$ είναι αδύνατη (στο $\mathbb{R}$).
3. Όχι, δεν υπάρχουν. Αν υπήρχαν, θα ίσχυε $f(x^3) = f(x)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, οι $f(0), f(1), f(-1)$ θα ήταν λύσεις της εξίσωσης $y^2 = y$, που είναι αδύνατον, αφού εύκολα βλέπουμε ότι η f θα πρέπει να είναι 1-1.
4. Η f ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x)^2 + \frac{1}{4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, ο αριθμός $a = f(1/2)$ είναι θετικός και ικανοποιεί την εξίσωση

$$a = a^2 + \frac{1}{4}$$

Επιλύοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση βρίσκουμε $a = 1/2$ και άρα μπορούμε να πάρουμε $c = 1/2$.

5. Έχουμε $f(f(1)) = 1$ και $f(1)^2 = f(f(f(1))) = f(1)$. Άρα $f(1) = 0$ ή 1 . Αλλά αν ήταν $f(1) = 0$ θα είχαμε

$$0 = f(0) = f(f(1)) = 1,$$

άτοπο. Συνεπώς, $f(1) = 1$.

8. Για $a > b > 0$ και $\lambda = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1$ έχουμε

$$f(a) = f\left(\lambda \cdot \frac{a}{\lambda}\right) > f\left(\frac{a}{\lambda^2}\right) = f(b).$$

9. Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες είναι η

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b \\ \frac{g(c) - g(b)}{c - b}(x - b) + f(b), & b \leq x \leq c \\ g(x), & c \leq x \leq d \end{cases}$$

10. Θέτοντας $x = 0$ στη δοθείσα εύκολα προκύπτει ότι $f(0) = 0$. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$0 < \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{1}{f(x)^4 + 1} < 1.$$

Επομένως

$$0 \leq |f(x)| \leq |x|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο παρεμβολής.

11. Με απαγωγή σε άτοπο: Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη συνέχεια της f και το θεώρημα Bolzano, θα είναι $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε θα είναι $f(f(x)) > f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(f(x)) < f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άτοπο.

12. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και γνήσια θετική ισχύει

$$1 < \frac{f(\frac{3x}{2})}{f(x)} < \frac{f(2x)}{f(x)}$$

για κάθε $x > 0$. Από το δοθέν όριο και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι το ζητούμενο όριο είναι 1.

16. Για μια τέτοια f , θα πρέπει να είναι

$$f(x) = Ae^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

για κάθε $x \leq 0$ και

$$f(x) = Be^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$$

για κάθε $x > 0$. Από τη συνέχεια της f στο 0, πρέπει

$$A - \frac{1}{2} = B + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Επίσης θα είναι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -A + \frac{1}{2}$$

και

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -B + \frac{1}{2},$$

απόπου παίρνουμε ότι

$$A = B \quad (2)$$

Το σύστημα των (1) και (2) δεν έχει λύση.

17. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1} - 1}{x + 1}, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1. \end{cases}$$

Για $x \neq -1$ εφαρμόζουμε κανόνα πηλίκο, ενώ για $x = -1$ έχουμε

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - x - 2}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{2(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

από κανόνα L'Hospital.

18. Αφού η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι παντού θετική, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν μόνο σε διάστημα μηδενικού μήκους. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει

$$|\sin x| = |x|$$

που έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

21. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$f'(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{du}{1 + u^4} du$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση είναι γνήσια θετική παντού, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνήσια θετική αν και μόνο αν $x^3 > x^2$, δηλ., αν και μόνο αν $x > 1$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

23. α) Λόγω συνέχειας, κι αφού $-1 < f(1) < 4$ και $-1 < f(e) < 4$, η f θα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σε εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[1, e]$, έστω στα σημεία x_1 και x_2 . Από θεώρημα Fermat το συμπέρασμα έπεται.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής (ή Rolle) στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2 .

24. Καταρχήν, η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - \lambda x^2 - 1$ έχει το πολύ δυο ρίζες, αφού η $f'(x) = \frac{2(1-\lambda x^2)}{x}$ έχει ακριβώς μια. Από την ανισότητα $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ με το '=' αν και μόνο αν $x = 1$ παίρνουμε την

$$\ln \left(\frac{x^2}{e^2} \right) \leq \frac{x^2}{e^2} - 1$$

με το '=' αν και μόνο αν $x = e$. Η παραπάνω γράφεται ισοδύναμα

$$2 \ln x \leq \frac{1}{e^2} x^2 + 1$$

με το '=' αν και μόνο αν $x = e$.

Συνεπώς, αν $\lambda > \frac{1}{e^2}$, η εξίσωση δεν έχει καμμιά λύση, ενώ αν $\lambda = \frac{1}{e^2}$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, +\infty)$.

Αν $0 < \lambda < \frac{1}{e^2}$, τότε $f(1) = -\lambda - 1 < 0$, $f(e) = 1 - \lambda e^2 > 0$ και $f(e^\xi) > 0$ όπου $\xi > 1$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{2\xi - 1}{e^{2\xi}} < \lambda$.

Από Bolzano, υπάρχουν δυο ρίζες της $f(x) = 0$, η μια στο $(1, e)$ και η άλλη στο (e, e^ξ) . Από την αρχική μας παρατήρηση αυτές είναι οι μόνες που υπάρχουν σε αυτήν την περίπτωση.

25. Είναι $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 1$. Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \left(\int_x^1 2e^{t^2} dt \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t 2e^{t^2} dx \right) dt \\ &= \int_0^1 2te^{t^2} dt \\ &= e - 1. \end{aligned}$$