

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το τρίγωνο ABC να είναι ορθογώνιο είναι

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2.$$

2. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι $x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{3xyz} \leq 1$.

3. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

4. Αν $xy > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}.$$

5. Αν $x, y > 0$, αποδείξτε ότι $x^y + y^x > 1$.

6. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $K = 1 - \sin^5 x - \cos^5 x$.

7. Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq (xy + yz + zx - 1)^2.$$

8. Έστω τρίγωνο ABC και M σημείο του επιπέδου του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{MA \cdot MB}{ab} + \frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} \geq 1,$$
$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}.$$

9. Να λυθεί η εξίσωση $6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$.

10. Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$x(y^2 - \sqrt{y}) + y(z^2 - \sqrt{z}) + z(x^2 - \sqrt{x}) \geq 0.$$

11. Να βρείτε τους $x, y \in R$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5}, \quad \sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{4}{5}.$$

12. Αν $x, y \geq 0$ με $x + y = 1$, να βρεθούν οι άκρες τιμές της παράστασης

$$K = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}.$$

13. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABC με $BC = a, AB = CA = b$ και $a > b$. Αν η διχοτόμος $BD = b$, αποδείξτε ότι

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 1.$$

14. Σε τετράπλευρο $ABCD$ ας είναι G_1, G_2 τα βαρύκεντρα των τριγώνων OAB και OCD και H_1, H_2 τα ορθόκεντρα των τριγώνων OBC, OAD . Αποδείξτε ότι $G_1G_2 \perp H_1H_2$.

15. Έστω ημικύκλιο διαμέτρου AB και X σταθερό σημείο του τμήματος AB . Αν P σημείο του τόξου AB , αποδείξτε ότι η τιμή της παράστασης $\frac{\tan \widehat{APX}}{\tan \widehat{PAX}}$ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου P .

16. Σε ισοσκελές τρίγωνο ABC είναι $AB = AC = b$ και $BC = a$. Αν ισχύει $\hat{A} = 100^\circ$, αποδείξτε ότι $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

17. Αν P, Q πολυώνυμα τέτοια ώστε $P^2(x) = Q^3(x) + a$, για κάθε $x \in C$, όπου $a \in C^*$, αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα είναι σταθερά.

18. Αποδείξτε ότι $\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

19. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, αποδείξτε ότι

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})^n.$$

20. α) Αποδείξτε ότι $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

β) Κατασκευάστε πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού, η οποία έχει ρίζες $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}$.

21. Να βρεθούν οι γωνίες τριγώνου ABC , ώστε να ελαχιστοποιείται η παράσταση $K = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$.

22. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = \sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)}.$$

23. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Οι IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία X, Y, Z αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{IA}{IX} + \frac{IB}{IY} + \frac{IC}{IZ} \geq 3, \quad IX + IY + IZ \geq IA + IB + IC, \quad \frac{1}{IX} + \frac{1}{IY} + \frac{1}{IZ} \geq \frac{3}{R},$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

24. Αποδείξτε ότι ένας ακέραιος αριθμός $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0$, διαιρείται με το 9 αν και μόνο αν το $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ διαιρείται με το 9, διαιρείται με το 11 αν και μόνο αν το $a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n$ διαιρείται με το 11. Εφαρμογή: Δίνεται ότι $15! = 130a67b368c00$. Βρείτε τα a, b, c .

25. Έστω τρίγωνο ABC , σημείο D στην BC ώστε $BC = 3BD$, σημείο E στην CA ώστε $CA = 3CE$ και σημείο Z στην AB ώστε $AB = 3AZ$. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ABC και DEZ έχουν το ίδιο κέντρου βάρους.

26. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$15(x^3 + y^3 + z^3 + xy + yz + zx) + 9xyz \geq 7.$$

27. Αν $x, y, z, t > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y + 2z + 3t} + \frac{y}{z + 2t + 3x} + \frac{z}{t + 2x + 3y} + \frac{t}{x + 2y + 3z} \geq \frac{2}{3},$$

και γενικεύστε για n θετικούς αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n .

28. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$K = \prod_{n=1}^7 \cos \frac{n\pi}{15}.$$

29. Αποδείξτε ότι $\tan^2 1^\circ + \tan^2 2^\circ + \dots + \tan^2 89^\circ = 4005$.

30. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \geq \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}.$$

31. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z \geq xyz$, αποδείξτε ότι $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$.

32. Αν $a, b, c > 0$, αποδείξτε ότι

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

33. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

34. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} + \frac{z}{\sqrt{1-z}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

35. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{9}{4(x+y+z)} \geq \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)}.$$

36. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}.$$

37. Αν $a, b > 0$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

38. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

39. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2\left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right).$$

40. Αν $a, b > 0$, αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \frac{a + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leq \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3} \leq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}.$$

41. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{2(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz} + \frac{9(x + y + z)^3}{x^2 + y^2 + z^2} \geq 33.$$

42. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x^2 + yz}{y + z} + \frac{y^2 + zx}{z + x} + \frac{z^2 + xy}{x + y} \geq x + y + z.$$

43. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x^3 + xyz}{y + z} + \frac{y^3 + xyz}{z + x} + \frac{z^3 + xyz}{x + y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

44. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A \cos B \cos C \geq \frac{1}{2}.$$

45. Έστω p πρώτος με $p \equiv 1 \pmod{3}$ και ας είναι $q = \left[\frac{2p}{3}\right]$. Αν ισχύει

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{q(q-1)} = \frac{m}{n},$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι p/m .

46. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\cos \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} \cot \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right).$$

47. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \geq (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

48. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, αποδείξτε ότι $x^2yz + y^2zx + z^2xy \leq \frac{1}{3}$.

49. Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 32$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $K = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$.

50. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι:

α) $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$,

β) $9(x^3 + y^3 + z^3) \geq (x + y + z)^3$

γ) βρείτε τη γενίκευση για n θετικούς αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n .

51. Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^2}{x + y + y^3z} + \frac{y^2}{y + z + z^3x} + \frac{z^2}{z + x + x^3y} \geq 1.$$

52. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται στις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία M, N, P αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$abMN^2 + bcNP^2 + caPM^2 = 4(ABC)^2, \quad \frac{MN^2}{h_a h_b} + \frac{NP^2}{h_b h_c} + \frac{PM^2}{h_c h_a} = 1,$$

$$MN + NP + PM \leq s\sqrt{\frac{2r}{R}} \leq s.$$

53. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 4 - \frac{2r}{R}.$$

54. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\sin \frac{\pi}{14} + 6 \sin^2 \frac{\pi}{14} - 8 \sin^4 \frac{\pi}{14}$.

55. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$a(b + c - a)^2 + b(c + a - b)^2 + c(a + b - c)^2 \leq 6\sqrt{3}R^2(2R - r).$$

56. Έστω $a, b, c, d \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1$ και $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \frac{10}{3}$. Αποδείξτε ότι $a, b, c, d \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

57. Αποδείξτε ότι έχει το πολύ μία ακέραια ρίζα το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2003x^3 + (2004 + a)x^2 - 2005x + a, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

58. Αν $a, b, c, d \in [0, 1]$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{a}{bcd + 1} + \frac{b}{cda + 1} + \frac{c}{dab + 1} + \frac{d}{abc + 1}.$$

59. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}.$$

60. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : R \rightarrow R$ που ικανοποιούν τη σχέση $f(f(f(x))) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in R$.

61. Αν είναι $(1 + x^4 + x^8)^{100} = a_0 + a_1x + \dots + a_{800}x^{800}$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$A = a_0 + a_1 + \dots + a_{800}, \quad B = a_0 + a_2 + \dots + a_{800}, \quad C = a_1 + a_3 + \dots + a_{799},$$

$$D = a_0 + a_4 + \dots + a_{800}, \quad E = a_1 + a_5 + \dots + a_{797}.$$

62. Έστω τρίγωνο ABC , στο οποίο οι $\cot A, \cot B, \cot C$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αποδείξτε ότι $G\hat{B}A = G\hat{A}C$, όπου G είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

63. Σε τρίγωνο ABC , οι διάμεσοι AM, CN τέμνονται στο σημείο G . Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $BMCN$ είναι περιγράψιμο αν και μόνο αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με βάση την AC .

64. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

65. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cot A + \cot B + \cot C \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}.$$

66. Αν $x, y > 0$ με $x^2 + y^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2.$$

67. Έστω ορθογώνιο $ABCD$. Η κάθετη ευθεία της AC στο C τέμνει τις AB, AD στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$BE\sqrt{CZ} + DZ\sqrt{CE} = AC\sqrt{EZ}.$$

68. Αν $x, y, z \in [\frac{1}{2}, 1]$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$f = \frac{x+y}{z+1} + \frac{y+z}{x+1} + \frac{z+x}{y+1}.$$

69. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC $\cos A \cos B \cos C \leq (\frac{r}{R\sqrt{2}})^2$.

70. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq (\cos A + \cos B + \cos C)^2.$$

71. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC εμβαδού E ισχύουν:

$$8R(R-2r) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, (ab+bc+ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}} \geq 4E.$$

72. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}.$$

73. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}.$$

74. Αν $x, y, z > 2$ και $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, αποδείξτε ότι $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$.

75. Αν $x, y, z > 0$ και $xy+yz+zx = 3$, αποδείξτε ότι $x^3+y^3+z^3+6xyz \geq 9$.

76. Αν $a, b, c > 1$, αποδείξτε ότι

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

77. Έστω τρίγωνο ABC και w'_a, w'_b, w'_c οι πλευρές του τριγώνου που σχηματίζεται από τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του. Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{1}{\sqrt{w'_a}} + \frac{1}{\sqrt{w'_b}} + \frac{1}{\sqrt{w'_c}} \right)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4r}.$$

78. Έστω μη ορθογώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} \tan A & \tan B & \tan C \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \end{bmatrix} = 0.$$

79. Να λυθεί η εξίσωση $\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x = 6, 4$.

80. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Αποδείξτε ότι

$$\frac{IA^2}{m_a^2} + \frac{IB^2}{m_b^2} + \frac{IC^2}{m_c^2} \leq \frac{4}{3}.$$

81. Αποδείξτε ότι $\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$.

82. Αν $x, y, z > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x^n}{y+z} + \frac{y^n}{z+x} + \frac{z^n}{x+y} \geq \frac{x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}}{2}.$$

83. Αν $x, y, z > 0$ και $xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} + \frac{4(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq xy + yz + zx.$$

84. Αν $x, y > 0$, $x \neq y$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \geq \sqrt{xy}.$$

85. Αποδείξτε ότι αν $x \geq 0$, $2 \sinh x + \tanh x \geq 3x$.

86. Αν $x, y, z \in [0, 1]$ και $(1-x)(1-y)(1-z) = xyz$, αποδείξτε ότι

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \geq \frac{3}{4}.$$

87. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3 y^3 z^3} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

88. Σε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$2s(m_a + m_b + m_c) \geq 3(am_a + bm_b + cm_c).$$

89. Έστω τρίγωνο ABC και ας είναι T_a, T_b, T_c οι διχοτόμοι των γωνιών του εκτεινόμενες μέχρι τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι:

$$T_a T_b T_c \geq \frac{8}{9} \sqrt{3} abc, \quad T_a + T_b + T_c \leq 5R + 2r.$$

90. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{C-A}{2} + \cos^2 \frac{A-B}{2} \geq 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

91. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C,$$

και με τη βοήθεια αυτής, αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$(1 + \cos 2A)(1 + \cos 2B)(1 + \cos 2C) + \cos 2A \cos 2B \cos 2C \geq 0.$$

92. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{7}{4} + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}.$$

93. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2 + 16 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

94. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \eta \leq (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C),$$

ανάλογα με το αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο αντίστοιχα.

95. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\cos A \cos B \cos C \leq 8 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{8}.$$

96. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ με $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} > 0$, το οποίο έχει n πραγματικές ρίζες. Αποδείξτε ότι:

α) $f(2) \geq 3^n$,

β) $f(x) \geq (x+1)^n$, για κάθε $x \geq 0$,

γ) $a_k \geq \binom{n}{k}$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n-1$.

97. Αν $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n για το οποίο ισχύει $P(k) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n+1$, βρείτε το $P(n+2)$.

98. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\ln x$ δε μπορεί να παρασταθεί στη μορφή $\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου f, g πολυώνυμα του x .

99. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f , οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

για κάθε x, y με $xy \neq 1$.

100. Αποδείξτε ότι $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$.

101. Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων

$$xy + yz + zx = 1, \quad 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

102. Αν $a_1, a_2, \dots, a_n \in [-2, 2]$ και $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, αποδείξτε ότι $|a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3| \leq 2n$.

103. Έστω P ένα πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές. Αν ισχύει η ανισότητα $P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$ για $x = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει για κάθε $x > 0$.

104. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 1$.

105. Αποδείξτε ότι

$$(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 3^\circ)\dots(1+\tan 43^\circ) < 2^{11} < (1+\tan 2^\circ)(1+\tan 4^\circ)\dots(1+\tan 44^\circ).$$

106. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει $\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right) \geq \frac{2r}{R}$.

107. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι:

α) υπάρχει τρίγωνο με πλευρές $a(s-a), b(s-b), c(s-c)$,
β)

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 \geq \frac{9}{4}.$$

108. Ας είναι τρίγωνο ABC με διαμέσους m_a, m_b, m_c και ας είναι M_a, M_b, M_c τα μήκη των διαμέσων που εκτείνονται μέχρι τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$\frac{M_a}{m_a} + \frac{M_b}{m_b} + \frac{M_c}{m_c} \geq 4.$$

109. Ας είναι G το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC και A', B', C' τα σημεία στα οποία τέμνουν οι GA, GB, GC τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι:

$$\sum GA' \geq \sum GA, \quad \sum \frac{GA}{GA'} = 3, \quad \prod GA \geq \prod GA'.$$

110. Έστω τρίγωνο ABC και O το περίκεντρό του. Οι AO, BO, CO τέμνουν τις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία A', B', C' αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$OA' + OB' + OC' \geq \frac{3R}{2}.$$

111. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\frac{2}{3} \sum \cos A \geq \prod \cos \frac{B-C}{2} \geq \frac{4}{9} \sum \sin B \sin C.$$

112. Έστω τρίγωνο ABC και m_a, m_b, m_c οι διάμεσοί του. Αποδείξτε ότι από τα m_a, m_b, m_c κατασκευάζεται τρίγωνο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του συναρτήσει του εμβαδού του τριγώνου ABC .

113. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

114. Αν $a, b, c \in (0, 1)$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

115. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

116. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c = 1$ αποδείξτε ότι

$$6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

117. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = xyz$, αποδείξτε ότι

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}.$$

118. Αν I είναι το έγκεντρο του τριγώνου ABC και οι IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E, Z αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\frac{IA}{ID} + \frac{IB}{IE} + \frac{IC}{IZ} \geq 3.$$

119. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\prod (b+c) \leq 8sR(2R+r), \quad \sum bc(b+c) \leq 8sR(R+r), \quad \sum a^3 \leq 8s(R^2 - r^2).$$

120. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2).$$

121. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι ισχύει

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \leq 6(1 + \cos A \cos B \cos C).$$

122. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = xyz$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}.$$

123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \sin 3x \sin^3 x + 4 \cos 3x \cos^3 x - 3 \cos 2x$. Αποδείξτε ότι $|f(x)| \leq 1$.

124. Αν $a, b, c, d \in R$ με $a^2 + b^2 \leq 1$, $c^2 + d^2 \leq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq 2\sqrt{2}.$$

125. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\frac{x+y}{z} \frac{bc}{s-a} + \frac{y+z}{x} \frac{ca}{s-b} + \frac{z+x}{y} \frac{ab}{s-c} \geq 4(a+b+c),$$

όπου $x, y, z > 0$.

126. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\sum \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \leq \left(\frac{2R-r}{s} \right)^2.$$

127. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

128. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\sin B \sin C \leq 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}.$$

129. Σε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2}{am_a + bc} + \frac{b^2}{bm_b + ca} + \frac{c^2}{cm_c + ab} > \frac{3}{2}.$$

130. Ας είναι a, n ακέραιοι και p πρώτος με $p > |a| + 1$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + ax + p$ δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο με σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

131. Αν $x, y, z > 0$ με $x+y+z = 1$ αποδείξτε ότι $7(xy+yz+zx) \leq 2+9xyz$.

132. Αν $x, y, z \in R$ τέτοιοι ώστε $xyz + x + z = y$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1}.$$

133. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και M, N, P οι προβολές του βαρύκεντρου στις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{4}{27} < \frac{(MNP)}{(ABC)} \leq \frac{1}{4}.$$

134. Αν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε $d > 0, a + c > b + d, a + b + c + d > 0$, αποδείξτε ότι $b^2 \geq 3ac$.

135. Αν $x \neq \frac{k\pi}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} \geq \sqrt{10}.$$

136. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι n, k_1, k_2, \dots, k_n αν ισχύουν

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4, \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

137. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq 3 + \frac{2(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}.$$

138. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = xyz$, αποδείξτε ότι

$$x^5(yz - 1) + y^5(zx - 1) + z^5(xy - 1) \geq 54\sqrt{3}.$$

139.α) Αποδείξτε ότι $t \leq \tan t \leq t + t^3$, όταν $t \in (0, 1]$

β) Υπολογίστε το

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_0^\pi \tan(y \sin x) dx.$$

140. Αποδείξτε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει

$$a \tan A + b \tan B + c \tan C \geq 10R - 2r.$$

141. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{x^2 + yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 + zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 + xy}{(z+x)(z+y)}.$$

142. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\sum \frac{y^2 - x^2}{z + x} \geq 0.$$

143. Υπολογίστε τη τιμή της παράστασης

$$K = (\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ) \dots (\sqrt{3} + \tan 89^\circ).$$

144. Αν $x, y, z > 0$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (1+x)(1+y)(1+z).$$

145. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και στις προεκτάσεις των πλευρών BC (προς το C), CA (προς το A), AB (προς το B), θεωρούμε σημεία D, E, Z αντίστοιχα ώστε $CD = AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι αν το τρίγωνο DEZ είναι ισόπλευρο, και το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

146. Αν $x, y > 0$ με $x^2 + y^2 = 1$, αποδείξτε ότι $x^3 + y^3 \geq \sqrt{2}xy$.

147. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύουν:

$$\frac{1}{2 - \cos A} + \frac{1}{2 - \cos B} + \frac{1}{2 - \cos C} \geq 2, \quad \frac{1}{5 - \cos A} + \frac{1}{5 - \cos B} + \frac{1}{5 - \cos C} \leq \frac{2}{3}.$$

148. Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι

$$\sum x(y + z - x)^3 \leq 4xyz(x + y + z).$$

149. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sqrt{\frac{15}{4} + \cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)}.$$

150. Αν $x, y, z > 0$ και $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{z}{z + xy} \geq 1.$$

151. Αν $x, y, z \in R$ με $\cos x + \cos y + \cos z = \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$, αποδείξτε ότι $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z \leq 0$.

152. Δίνεται κύκλος c και μία διάμετρος του AB . Στη προέκταση της διαμέτρου προς το B θεωρούμε σημείο C και μία τέμνουσα CDE του κύκλου. Αποδείξτε ότι είναι σταθερή η τιμή της παράστασης

$$K = \tan \widehat{CAD} \tan \widehat{CAE}.$$

153. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$ab(s-c)^2 + bc(s-a)^2 + ca(s-b)^2 \geq \frac{sabc}{2}.$$

154. Έστω ABC ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(c+a)}{abc} \geq 2 + \sqrt{2}.$$

155. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y(y+z)^2} + \frac{y}{z(z+x)^2} + \frac{z}{x(x+y)^2} \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)}.$$

156. Αν $x, y, z > 0$ με $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{4x+1} + \frac{1}{4y+1} + \frac{1}{4z+1} \geq 1.$$

157. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^3.$$

158. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$0 \leq m_a^2 - w_a^2 \leq \frac{(b-c)^2}{2}.$$

159. Έστω κύκλος (O, r) και σημείο του A . Αν M, N, P σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$, αποδείξτε ότι $M \equiv A$ ή $N \equiv A$ ή $P \equiv A$.

160. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq \sqrt{\frac{16(x+y+z)^3}{3(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

161. Αν $a, b > 0$ με $a^b + b = b^a + a$, να αποδείξετε ότι $1 + ab \geq a + b$.

162. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\sum a \cos A \leq \frac{2}{3} \sum m_a \sin A \leq s.$$

163. Αν $x, y, z \in [0, 1)$ και $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης

$$K = \frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}.$$

164. Μία ανισότητα $P \geq Q$, όπου P, Q παραστάσεις που περιέχουν στοιχεία του τριγώνου ABC , ονομάζεται ισχυρή (αντ. ασθενής) όταν ισχύει $P - Q \leq M$ (αντ. $P - Q \geq M$), όπου $M = \frac{R-2r}{R}$. Δίνονται οι ανισότητες

$$i) \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$ii) \quad \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B.$$

Αποδείξτε ότι η $i)$ είναι ισχυρή ενώ η $ii)$ είναι ασθενής.

165. Έστω P πολυώνυμο βαθμού $n > 1$ με συντελεστή του x^n το 1 και με n αρνητικές ρίζες. Αποδείξτε ότι $P'(0)P(1) \geq 2n^2P(0)$. Βρείτε πότε ισχύει η ισότητα.

166. Αν a, b, c είναι πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$(a+b)(b+c)(c+a) + (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \geq 9abc.$$

167. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Αν M, N, P είναι τα μέσα των πλευρών του, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, αποδείξτε ότι $IM^2 + IN^2 + IP^2 \geq r(R+r)$.

168. Έστω τετράπλευρο $ABCD$ με $AB = BC = CD$ και $AC \neq BD$. Αν E είναι το σημείο τομής των AC, BD αποδείξτε ότι

$$AE = DE \Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 120^\circ.$$

169. Έστω μη ισόπλευρο τρίγωνο ABC . Να αποδείξτε ότι υπάρχει σημείο P στο εσωτερικό του, ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα PA, PB, PC να μην αποτελούν πλευρές τριγώνου.

170. Έστω κυρτό εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$. Να αποδείξετε ότι $(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \geq (AC + BD)^2$. Να εξετάσετε τότε ισχύει η ισότητα.

171. Έστω $x > 1$. Αποδείξτε ότι $\ln x \geq \frac{3(x^2-1)}{x^4+4x+1}$ και με τη βοήθεια αυτής ότι αν $a, b > 0$, $a \neq b$,

$$\frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{1}{3} \left(2\sqrt{ab} + \frac{a+b}{2} \right).$$

172. Έστω τρίγωνο ABC με $A - B = 120^\circ$ και $R = 8r$. Υπολογίστε το $\cos C$.

173. Αν $a, b, c, d > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4.$$

174. Αν $n \geq 2$ φυσικός αριθμός, αποδείξτε ότι

$$(n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1.$$

175. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x+y+z) \geq 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x+y+z \geq 4\sqrt{3}.$$

176. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sum \frac{bc}{b+c} \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{a+b+c}{8}.$$

177. Έστω τρίγωνο ABC με τις γωνίες B, C οξείες. Αποδείξτε ότι η παράσταση $K = \frac{1}{h_a^2} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ είναι θετική, μηδέν ή αρνητική, ανάλογα με το αν η γωνία A είναι αμβλεία, ορθή ή οξεία αντίστοιχα.

178. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$3\sqrt{\frac{3r}{s}} \leq \sqrt{\tan \frac{A}{2}} + \sqrt{\tan \frac{B}{2}} + \sqrt{\tan \frac{C}{2}} \leq \sqrt{\frac{s}{r}}.$$

179. Έστω μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$a \cos^3 A + b \cos^3 B + c \cos^3 C \geq \frac{abc}{8R^2}.$$

180. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} - 2(\cot A + \cot B + \cot C) \geq \sqrt{3}.$$

181. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{\sqrt{xyz}} + \sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{xy}{z}}.$$

182. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 16.$$

183. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο με εμβαδό E , αποδείξτε ότι

- i) $\sqrt{\cot A} + \sqrt{\cot B} + \sqrt{\cot C} \leq \frac{E}{r^2}$ και
 ii) $\sum \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \leq ab + bc + ca$.

184. Έστω τρίγωνο ABC στο οποίο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη πλευρά BC είναι ίση με την πλευρά AB . Αποδείξτε ότι

$$\tan B = 3 \tan C \quad \text{και} \quad \sin A = 2 \sin(B - C).$$

185. Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{y+z}{\sqrt{x}} + \frac{z+x}{\sqrt{y}} + \frac{x+y}{\sqrt{z}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 3.$$

186. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^2 + y}{y + z} + \frac{y^2 + z}{z + x} + \frac{z^2 + x}{x + y} \geq 2.$$

187. Αν $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} \geq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}.$$

188. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 3$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

189. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$, αποδείξτε ότι:

$$xyz \geq 27, \quad xy + yz + zx \geq 27,$$

$$x + y + z \geq 9, \quad xy + yz + zx \geq 2(x + y + z) + 9.$$

190. Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο C . Αν A', B', C' είναι τα σημεία τομής των υψών h_a, h_b, h_c με τον C , αποδείξτε ότι

$$AB \cdot BC \cdot CA \geq 3\sqrt{3A'B \cdot A'C \cdot B'C \cdot B'A \cdot C'A \cdot C'B}.$$

191. Έστω τρίγωνο ABC εμβαδού E . Αποδείξτε ότι

$$\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} \geq \frac{2E}{R}.$$

192. Έστω τρίγωνο ABC του οποίου οι γωνίες μετρούνται σε ακτίνια. Αποδείξτε ότι:

$$\sum \frac{b+c-a}{A} \geq \frac{6s}{\pi}, \quad \sum \frac{b+c-a}{aA} \geq \frac{9}{\pi}.$$

193. Έστω μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sum \frac{\sin B + \sin C}{A} > \frac{12}{\pi}.$$

194. Αν A, B, C γωνίες τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\sum \sin B \sin C \leq 3 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

195. Αν $x, y, z, w > 0$ με

$$\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} + \frac{1}{1+w^4} = 1,$$

αποδείξτε ότι $xyzw \geq 3$.

196. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx}.$$

197. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Αποδείξτε ότι

$$6r \leq IA + IB + IC \leq \sqrt{12(R^2 - Rr + r^2)}.$$

198. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{\sqrt{x+y+z} + \sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{x+y+z} + \sqrt{y}}{z+x} + \frac{\sqrt{x+y+z} + \sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{x+y+z}}.$$

199. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$8(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 9 + \sum \cos(A-B) \leq \csc^2 \frac{A}{2} + \csc^2 \frac{B}{2} + \csc^2 \frac{C}{2}.$$

200. Έστω τρίγωνο ABC και M το μέσο της πλευράς BC . Αποδείξτε ότι

$$\cos \frac{B-C}{2} \geq \sin \widehat{AMB} \geq 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

201. Έστω τρίγωνο ABC με ορθή τη γωνία C . Βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\frac{r}{R}$.

202. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$(x+y+z) \left(\frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

203. Αν A, B, C οι γωνίες τριγώνου ABC , μετρούμενες σε ακτίνια, αποδείξτε ότι

$$(\sin A + \sin B + \sin C)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) \geq \frac{27\sqrt{3}}{2\pi}.$$

204. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$3 \max\left\{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right\} \geq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

205. Αν $a, b, c \geq 1$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}.$$

206. Έστω $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 3$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{z^2}{x+1} \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{x}{y+1} + \frac{y}{z+1} + \frac{z}{x+1} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{x^2}{y^2+1} + \frac{y^2}{z^2+1} + \frac{z^2}{x^2+1} \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{z^2+1} + \frac{z}{x^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

207. Αν $x, y, z \in (0, 1)$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{3}{2}.$$

208. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Οι BI, CI τέμνουν τις AC, AB στα σημεία B', C' αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το $AB' \cdot AC'$ είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο του AI^2 αν και μόνο αν η γωνία A είναι αμβλεία, ορθή ή οξεία αντίστοιχα.

209. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \geq (xy + yz + zx)^3.$$

210. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$, αποδείξτε ότι $x + y + z \leq 3$.

211. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

212. Αν $a, b, c, d > 0$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + bcd + acd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}.$$

213. Έστω τρίγωνο ABC στο οποίο ισχύει $3A + 2B = 180^\circ$. Αποδείξτε ότι $a^2 + bc - c^2 = 0$.

214. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{a}{m_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{m_b}\right)^2 + \left(\frac{c}{m_c}\right)^2 \geq 4.$$

215. Έστω τρίγωνο ABC και M το μέσο της πλευράς BC . Αποδείξτε ότι $\cot \widehat{MAC} - \cot \widehat{MAB} = 2 \cot \widehat{AMB}$.

216. Αν $x_i > 0$ με $i = 1, 2, 3, \dots, n$ αποδείξτε ότι

$$\left(1 + \frac{x_1^2}{x_2}\right)\left(1 + \frac{x_2^2}{x_3}\right) \cdots \left(1 + \frac{x_n^2}{x_1}\right) \geq (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n).$$

217. Αν $x \in (0, \pi)$ αποδείξτε ότι $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.

218. Έστω τρίγωνο ABC και G το κέντρο βάρους του. Αν E είναι το μέσο της πλευράς AB και Z της AC , αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι εγγράψιμο αν και μόνο αν $b^2 + c^2 = 2a^2$.

219. Έστω τρίγωνο ABC εμβαδού E . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν ισχύει $ch_a + ah_b + bh_c = 6E$.

220. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x + y + z}{3\sqrt{3}} \geq \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2}}.$$

221. Αν $a, b, c > 0$ και $x \geq \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} - 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{(b + cx)^2}{a} + \frac{(c + ax)^2}{b} + \frac{(a + bx)^2}{c} \geq abc.$$

222. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca$.

223. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

224. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$ και $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a^n + b^n + 1} + \frac{1}{b^n + c^n + 1} + \frac{1}{c^n + a^n + 1} \leq 1.$$

225. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

226. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c \geq abc$, αποδείξτε ότι $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

227. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{bc}{a^2 + bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

228. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x+y+z} \left(\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{z+x} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

229. Αν $x, y, z \in (0, 1)$ με $x + y + z = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{\frac{x}{x+yz}} + \sqrt{\frac{y}{y+zx}} + \sqrt{\frac{z}{z+xy}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{xyz}}{(1-x)(1-y)(1-z)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

230. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sum \frac{b^2 + c^2}{m_a} \leq 12R, \quad \sum \frac{b^2 + c^2}{h_a} \geq 12R.$$

231. Αν A, B, C γωνίες τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\sum \cos \frac{A}{2} \cdot \sum \csc \frac{A}{2} - \sum \cot \frac{A}{2} \geq 6\sqrt{3}.$$

232. Αν $x, y \in [0, 1]$ αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

233. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b$ έχει τέσσερις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη από $\sqrt{3}$.

234. Ας είναι I το έγκεντρο τριγώνου ABC και D το σημείο τομής της AI με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αν E, Z είναι τα ίχνη των προβολών του I στα τμήματα BD, CD και ισχύει $IE + IZ = \frac{1}{2}AD$, υπολογίστε τη γωνία A .

235. Αν A, B, C είναι γωνίες τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sum \sin A \leq \sum \cos \frac{B-C}{2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \cos \frac{A}{2}.$$

236. Έστω τρίγωνο ABC .

Αν I είναι το έγκεντρό του, αποδείξτε ότι $ab + bc + ca \leq (IA + IB + IC)^2$.

Αν το τρίγωνο είναι μη αμβλυγώνιο, αποδείξτε ότι $s^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.

237. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}}{3} \leq \sqrt[3]{x \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3}}.$$

238. Αν $x, y > 0$ αποδείξτε ότι

$$x^4 + y^4 + 3 \geq x + y + 3 \frac{3xy + 1}{4} \sqrt[3]{\frac{3xy + 1}{4}}.$$

239. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

240. Αν $a, b, c > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}.$$

241. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c = 3$, αποδείξτε ότι $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

242. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

243. Έστω το τρίγωνο ABC και ας είναι r_m η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που ορίζεται από τις διαμέσους του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι

$$r_m \leq \frac{3abc}{4(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

244. Έστω το τρίγωνο ABC και ας είναι R_m η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που ορίζεται από τις διαμέσους του τριγώνου ABC . Αποδείξτε ότι

$$R_m \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a + b + c)}.$$

245. Έστω τρίγωνο ABC με εσωτερικές διχοτόμους w_a, w_b, w_c και ας είναι W_a, W_b, W_c οι εξωτερικές διχοτόμοι προεκτεινόμενες ως τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$W_a + W_b + W_c \geq \frac{4}{3}(w_a + w_b + w_c).$$

246. Έστω τρίγωνο ABC εμβαδού E . Αποδείξτε ότι $27E^2 \leq a^3b^3c^2$.

247. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}(\csc 2A + \csc 2B + \csc 2C).$$

248. Ας είναι $x, y, z \in R$ με $xyz(x + y + z) > 0$ και έστω τρίγωνο ABC με πλευρές a, b, c , διαμέσους m_a, m_b, m_c και εμβαδό E . Αποδείξτε ότι:

$$|yza^2 + zxb^2 + xyc^2| \geq 4E\sqrt{xyz(x + y + z)},$$

$$|yzm_a^2 + zxm_b^2 + xym_c^2| \geq 3E\sqrt{xyz(x + y + z)}.$$

249. Αν $a, b, c \geq 0$ με $a + b + c = 1$, αποδείξτε ότι

$$ab + bc + ca \leq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc$$

και αναφέρετε τότε ισχύει η ισότητα σε κάθε περίπτωση.

250. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$(\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq \left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\cos C}\right)^2.$$

251. Οι αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$ και ισχύει $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Αποδείξτε ότι $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}$.

252. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

253. Αν a, b, c πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}} \geq \sqrt{3}.$$

254. Έστω τρίγωνο ABC και ο πραγματικός αριθμός $p \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{w_a^p} + \frac{1}{w_b^p} + \frac{1}{w_c^p} \geq \left(\frac{4R}{s}\right)^{\frac{p}{3}} \left(\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p}\right).$$

255. Αν σε τρίγωνο ABC η ευθεία του *Euler* είναι παράλληλη στην πλευρά BC , αποδείξτε ότι $\tan B \tan C = 3$.

256. Αν $a, b, c > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2.$$

257. Αν a, b, c είναι πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2),$$

και μετά αποδείξτε την παραπάνω ανισότητα αν οι a, b, c είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί.

258. Αν $a, b, c, r > 1$ αποδείξτε ότι

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r,$$

και διατυπώστε ανάλογη ανισότητα για $n+1$ πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_n και r .

259. Έστω P εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABC . Αν r_1, r_2, r_3 είναι οι αποστάσεις του σημείου P από τις πλευρές του τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$(r_1 + r_2 + r_3)^2 \leq \frac{ab + bc + ca}{2R}.$$

260. Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο εμβαδού E και a ς είναι E' το εμβαδό του ορθικού τού τριγώνου. Αποδείξτε ότι $27R^4 E' \leq 4E^3$.

261. Αν $x, y, z > 0$ με $4xyz = x + y + z + 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} + \frac{x^2 + y^2}{z} \geq 2(xy + yz + zx)$$

262. Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού 5 ώστε το $f(x) + 1$ να διαιρείται από το $(x - 1)^3$ και το $f(x) - 1$ να διαιρείται από το $(x + 1)^3$.

263. Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) για τα οποία ισχύει $m^3 + n^3 = 13(m + n)$.

264. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{y + z}{x + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)}} + \frac{z + x}{y + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)}} + \frac{x + y}{z + \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)}} \leq 2.$$

265. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$\frac{abc(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2abc + (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

266. Αν $a, b, c, d > 0$ με $abcd = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1 + ab}{1 + a} + \frac{1 + bc}{1 + b} + \frac{1 + cd}{1 + c} + \frac{1 + da}{1 + d} \geq 4.$$

267. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

268. Αν $a, b, c, d > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}.$$

269. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}.$$

270. Αν $x, y, z > 0$ με $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

271. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1.$$

272. Έστω I το έγκεντρο τριγώνου ABC . Οι IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E, Z αντίστοιχα. Αν $r_a, r_b, r_c, r_d, r_e, r_z$ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ABC και DEZ , αποδείξτε ότι $r_a + r_b + r_c \leq r_d + r_e + r_z$.

273. Αν $x, y, z > -1$ αποδείξτε ότι

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

274. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

275. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+3}.$$

276. Να λύσετε το σύστημα

$$x^3 - 3x = y, \quad y^3 - 3y = z, \quad z^3 - 3z = x.$$

277. Αν $a, b, c \in [0, 1]$, βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$f = \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1}.$$

278. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c = 1$, αποδείξτε ότι

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

279. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = \sqrt{xyz}$, αποδείξτε ότι

$$xy + yz + zx \geq 9(x + y + z).$$

280. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

281. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι $x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

282. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$ αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

283. Αν $a, b, c > 0$ με $a+b+c = 1$, αποδείξτε ότι $7(ab+bc+ca) \leq 2+9abc$.

284. Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

285. Έστω τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών A, B, C τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία A', B', C' . Αν $E = (ABC)$ και $E' = (A'B'C')$, αποδείξτε ότι $16E'^3 \geq 27R^4E$.

286. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 3$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x^2}{y^3+1} + \frac{y^2}{z^3+1} + \frac{z^2}{x^3+1} \leq \frac{3}{2}.$$

287. Αν $a, b > 0$ αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

288. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

289. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα a, b . Κατασκευάστε με κανόνα και διαβήτη το ευθύγραμμο τμήμα $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

290. Αν $a, b, c > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

291. Αν $a, b, c, d, e > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde} + \frac{q}{20},$$

όπου $q = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 + (\sqrt{d} - \sqrt{e})^2$.

292. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \cdot e^{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}$$

293. Έστω M σημείο στο επίπεδο ισοπλεύρου τριγώνου ABC . Αν x, y, z είναι οι αποστάσεις του M από τις κορυφές του τριγώνου και p, q, r οι αποστάσεις του M από τις πλευρές του, αποδείξτε ότι

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2).$$

294. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, για τα οποία ισχύει $P(x^2) = P(x)P(x-1)$, για κάθε x .

295. Έστω p πρώτος και a, b, c, d θετικοί ακέραιοι ώστε $a^p + b^p = c^p + d^p$. Αποδείξτε ότι $|a-c| + |b-d| \geq p$.

296. Έστω η φραγμένη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία πληροί τις συνθήκες $f(2x) = 2f^2(x) - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Αποδείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in R$.

297. Αν $a, b, c > 0$ με $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}.$$

298. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές ώστε $P(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $Q_1(x), Q_2(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τέτοια ώστε $P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x)$ για κάθε $x \in R$.

299. Αν $a, b, c, d > 0$ με $abcd = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b + c + d + 1} + \frac{b}{c + d + a + 1} + \frac{c}{d + a + b + 1} + \frac{d}{a + b + c + 1} \geq 1.$$

300. Αν $a, b, c \in R^*$ διαφορετικοί ανά δύο, αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

301. Πάνω σε κύκλο θεωρούμε τρία τόξα AB, CD, EF 60° έκαστο και χωρίς κοινά σημεία. Αν K, L, M είναι τα μέσα των χορδών BC, DE, FA , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KLM είναι ισόπλευρο.

302. Έστω τετράγωνο πλευράς 1 και τετράπλευρο του οποίου οι κορυφές βρίσκονται μία σε κάθε πλευρά του τετραγώνου. Αν a, b, c, d είναι οι πλευρές του τετραπλεύρου, αποδείξτε ότι $2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$.

303. Υπάρχει συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow R$ τέτοια ώστε

$$f(x) = 1 + x \int_0^1 f(t) dt + x^2 \int_0^1 (f(t))^2 dt ;$$

304. Αν A, B, C γωνίες τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\sin A + \sin B \sin C \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα ;

305. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \left(\frac{1}{m_a^2} + \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_c^2} \right) \leq 9.$$

306. Αν G είναι το βαρύκεντρο τριγώνου ABC , αποδείξτε ότι

$$\sin G\widehat{BC} + \sin G\widehat{CA} + \sin G\widehat{AB} \leq \frac{3}{2}.$$

307. Έστω τρίγωνο ABC με έγκεντρο I . Αποδείξτε ότι

$$AC + AI = BC \text{ αν και μόνο αν } \widehat{A} = 2\widehat{B}.$$

308. Αν a, b, c πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}} \geq \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{a + b + c}.$$

309. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$a^b b^c c^a \leq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^{a+b+c}.$$

310. Αποδείξτε ότι αν $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, τότε $\tan x + \sin x > 2x$.

311. Έστω τρίγωνο ABC και D, E, F τα σημεία τομής των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών A, B, C με τις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \leq \frac{s^2}{3}.$$

312. Αν A, B, C είναι γωνίες τριγώνου, να βρείτε τις άκρες τιμές της παράστασης

$$K = \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A).$$

313. Η ακολουθία θετικών όρων (a_n) ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 0$. Απλοποιήστε την παράσταση

$$K = \sqrt{a_{n+5}^2 + a_{n+4}^2 + a_{n+3}^2 - a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 - a_n^2}.$$

314. Αν w_a, w_b, w_c είναι οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών A, B, C τριγώνου ABC , αποδείξτε ότι

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{w_c} + \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{w_a} + \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{w_b} = 0.$$

315. Αν ABC τρίγωνο, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{\sin A \sin B}{\sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{\sin B \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin C \sin A}{\sin^2 \frac{B}{2}}.$$

316. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a^6}{b^2 + c^2} + \frac{b^6}{c^2 + a^2} + \frac{c^6}{a^2 + b^2} \geq \frac{abc(a + b + c)}{2}.$$

317. Αν $x, y, z > 0$ και a, b, c πλευρές τριγώνου εμβαδού E , αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y+z}a^2 + \frac{y}{z+x}b^2 + \frac{z}{x+y}c^2 \geq 2\sqrt{3}E.$$

318. Σε κάθε τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι

$$i) \frac{m_a}{w_a} \geq \frac{(b+c)^2}{4bc}, \quad ii) \frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

319. Σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a}.$$

320. Έστω τρίγωνο ABC . Αν x, y, z πραγματικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\geq 2(-1)^{n+1}(yz \cos nA + zx \cos nB + xy \cos nC), \\ yza^2 + zxb^2 + xyc^2 &\leq R^2(x + y + z)^2, \\ xa^2 + yb^2 + zc^2 &\geq 4E\sqrt{xy + yz + zx}. \end{aligned}$$

321. Αν $ABC, A'B'C'$ δύο τρίγωνα με εμβαδά E, E' αντίστοιχα, αποδείξτε ότι ισχύει

$$aa' + bb' + cc' \geq 4\sqrt{3EE'}.$$

322. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{h_b + h_c}{r_a} + \frac{h_c + h_a}{r_b} + \frac{h_a + h_b}{r_c} = 6,$$

$$\cos^3 \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos^3 \frac{B}{2} \cos \frac{C-A}{2} + \cos^3 \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \frac{3s}{4R}.$$

323. Ας είναι ABC τρίγωνο και P σημείο στο επίπεδό του. Αν A', B', C' είναι οι προβολές του P στις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(aPA + bPB + cPC) \geq 2(AA' + BB' + CC').$$

324. Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ είναι όλες αρνητικές πραγματικές. Αποδείξτε ότι $4a - 9b \leq 1$.

325. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{5} \leq \frac{h_a - 2r}{h_a + 2r} + \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r} + \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r} < 1.$$

326. Αν $a, b, c, d > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

327. Αν a, b, c πλευρές τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{(a+c-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(a+c-b)} \geq ab + bc + ca.$$

328. Έστω τρίγωνο ABC και τα σημεία επαφής A', B', C' του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα. Ας είναι S_a το μήκος του τόξου $B'C'$ (που δεν περιέχει το A') και ανάλογα ορίζουμε τα S_b, S_c . Αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{S_a} + \frac{b}{S_b} + \frac{c}{S_c} \geq \frac{9\sqrt{3}}{\pi}.$$

329. Αποδείξτε ότι $\sin 40^\circ < \sqrt{\frac{3}{7}}$.

330. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\frac{3}{\pi} < \frac{\sin A}{\pi - A} + \frac{\sin B}{\pi - B} + \frac{\sin C}{\pi - C} < \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

331. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$a^{\sqrt[3]{3}} + b^{\sqrt[3]{3}} + c^{\sqrt[3]{3}} \geq a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}}.$$

332. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{2(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca)}.$$

333. Αν $a, b, c \geq 1$ ώστε $a + b + c = 2abc$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \geq \sqrt[3]{ab-1} + \sqrt[3]{bc-1} + \sqrt[3]{ca-1}.$$

334. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx + xyz = 4$, αποδείξτε ότι οι αριθμοί $(x+2)(y+2)$, $(y+2)(z+2)$, $(z+2)(x+2)$ αποτελούν μέτρα πλευρών τριγώνου.

335. Έστω τρίγωνο ABC με $a \geq b \geq c$. Ας είναι AH το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά BC . Αν $m = BH$, $n = CH$, αποδείξτε ότι η παράσταση $K = a(bm + cn) - bc(b + c)$ είναι θετική, αρνητική ή ίση με το μηδέν ανάλογα με το αν η γωνία A είναι αμβλεία, οξεία ή ορθή.

336. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

337. Αν η εξίσωση $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, αποδείξτε ότι $a^2 + b^2 \geq 8$.

338. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 2$, αποδείξτε ότι

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}.$$

339. Αν $a, b, c > 0$ με $abc \leq 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

340. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c = 1$, αποδείξτε ότι

$$6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

341. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

342. Αν $r, s > 0$ και n ακέραιος με $n > \frac{r}{s}$, να βρείτε θετικούς x_1, x_2, \dots, x_n ώστε να ελαχιστοποιείται η παράσταση

$$K = \left(\frac{1}{x_1^r} + \frac{1}{x_2^r} + \dots + \frac{1}{x_n^r} \right) (1+x_1)^s (1+x_2)^s \cdots (1+x_n)^s.$$

343. Αν $x, y, z > 0$ με $xy + yz + zx + 2xyz = 1$, αποδείξτε ότι

$$xyz \leq \frac{1}{8}, \quad x + y + z \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z),$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 4(x + y + z) \geq \frac{(2z-1)^2}{z(2z+1)},$$

όπου $z = \max\{x, y, z\}$.

344. Αν $a, b > 0$ με $(a-1)(b-1) \geq 0$, αποδείξτε ότι

$$a^b + b^a \geq 1 + ab + (1-a)(1-b) \min\{1, ab\}.$$

345. Αν $a, b, c > 0$ με $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2}{a^3 - bc + \frac{11}{27}} + \frac{b^2}{b^3 - ca + \frac{11}{27}} + \frac{c^2}{c^3 - ab + \frac{11}{27}} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

346. Αν $x, y, z > 0$ με $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1+x^2}{z+2} + \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} \geq 2.$$

347. Αν h, a η υποτείνουσα και το ύψος αντίστοιχα, ορθογωνίου τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$\frac{h}{a} + \frac{a}{h} \geq \frac{5}{2}.$$

348. Αν p, q είναι ζεύγος δίδυμων πρώτων αριθμών, αποδείξτε ότι οι αριθμοί $p^4 + 4, q^4 + 4$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

349. Έστω τρίγωνο ABC . Οι διχοτόμοι w_a, w_b, w_c τέμνουν τις πλευρές BC, CA, AB και τον περιγεγραμμένο κύκλο, στα σημεία A_1, B_1, C_1 και A_2, B_2, C_2 αντίστοιχα. Αν s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \geq \frac{s}{\sqrt{3}}.$$

350. Αν $a, b, c > 0$ με $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, αποδείξτε ότι

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

351. Αν $x, y, z \in (0, 1)$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1-x^2}{x} + \frac{1-y^2}{y} + \frac{1-z^2}{z} \right).$$

352. Να βρείτε τα τρίγωνα που έχουν την ιδιότητα τα μήκη των πλευρών του και τα μήκη των διαμέσων του να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

353. Να βρείτε τα τρίγωνα που έχουν την ιδιότητα τα μήκη των πλευρών του και τα μήκη των εσωτερικών διχοτόμων του να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

354. Αν $a, b, c \geq 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sum (1 - 2a^2)(b - c)^2 \geq 0.$$

355. Αν a, b, c είναι οι πλευρές τριγώνου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του, αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq 3\sqrt{3}R.$$

356. Αν $a, b, c, d, l, m > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{lb + mc} + \frac{b}{lc + ma} + \frac{c}{la + mb} \geq \frac{3}{l + m},$$

$$\frac{a}{mb + mc + md} + \frac{b}{lc + ld + la} + \frac{c}{md + la + mb} + \frac{d}{la + mb + lc} \geq \frac{8}{3(l + m)}.$$

357. Αν $a, b, c > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a + b + c}.$$

358. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}.$$

359. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί x, y, z οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις $|x| = |y| = |z| = 1$ και

$$\frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} + \frac{x^2 + y^2}{z} = 2(x + y + z).$$

360. Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + \ln n$, $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_1^\infty \frac{1}{a_i}$ αποκλείνει.

361. Αν ABC τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$(s^2 + r^2 + 4Rr)(s^2 + r^2 + 2Rr) \geq 4Rr(5s^2 + r^2 + 4Rr).$$

362. Έστω τρίγωνο ABC στο οποίο ισχύει $AB : AC = 1 : \sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι $h_a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}BC$. Πότε ισχύει η ισότητα;

363. Έστω $P_1P_2\dots P_n$ κανονικό n -γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αποδείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων μιας κορυφής από τις υπόλοιπες είναι ίσο με nR^{n-1} .

364. Έστω τρίγωνο ABC . Να βρείτε σημείο M επί της BC , ώστε τα τρίγωνα ABM, ACM να έχουν την ίδια περίμετρο. Ποιά είναι τότε η περίμετρος;

365. Αποδείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABC ισχύει

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A} + \frac{\cos B}{\sin^2 B} + \frac{\cos C}{\sin^2 C} \geq \frac{R}{r}$$

366. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 5 + \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{xy + yz + zx} \geq \frac{3(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} \geq 3 \left(\frac{x + y}{x + z} + \frac{y + z}{y + x} + \frac{z + x}{z + y} \right).$$

367. Αν $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \tan x} + \frac{\tan x + \cot x}{\cos x + \tan x} + \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \cot x} + \frac{\tan x + \cot x}{\sin x + \cot x}.$$

368. Η εξίσωση $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ έχει τρεις (όχι απαραίτητα άνισες) θετικές ρίζες. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1 + a + b + c}{3 + 2a + b} - \frac{c}{b}.$$

369. Αν ABC τρίγωνο εμβαδού E και $x, y, z > 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{x}{y+z}a^4 + \frac{y}{z+x}b^4 + \frac{z}{x+y}c^4 \geq 8E^2.$$

370. Έστω τρίγωνο ABC τρίγωνο με έγκεντρο I . Αν οι προεκτάσεις των εσωτερικών διχοτόμων IA, IB, IC τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E, F αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\frac{ID \cdot IF}{IB} = R, \quad \frac{IA \cdot IC}{IE} = 2r, \quad \frac{(DEF)}{(ABC)} = \frac{R}{2r}.$$

371. Έστω τρίγωνο ABC . Αν P σημείο στο επίπεδο του τριγώνου και $R_1 = PA, R_2 = PB, R_3 = PC$, αποδείξτε ότι

$$(x + y + z)(xR_1^2 + yR_2^2 + zR_3^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2,$$

όπου x, y, z πραγματικοί αριθμοί.

372. Αν $n > 2$ φυσικός αριθμός, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{2^3 3^4 4^5 \cdots n} < 2.$$

373. Το κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 και ισχύει $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \geq 4$. Αποδείξτε ότι είναι τετράγωνο.

374. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sum (b + c - a)\sqrt{a} \geq 4r(4R + r)\sqrt{\frac{4R + r}{3sR}}.$$

375. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$R - 2r \geq \frac{1}{12} \left(\sum \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} - \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{R} \right) \geq 0.$$

376. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$(s-a)\sqrt{a} + (s-b)\sqrt{b} + (s-c)\sqrt{c} \leq 3\sqrt{ER}.$$

378. Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο και O το περίκεντρό του. Η AO τέμνει την πλευρά BC στο σημείο P_1 και τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Q_1 . Τα σημεία P_2, Q_2, P_3, Q_3 ορίζονται ανάλογα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{OP_1 \cdot OP_2 \cdot OP_3}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2 \cdot P_3Q_3} \geq 1, \frac{OP_1}{P_1Q_1} + \frac{OP_2}{P_2Q_2} + \frac{OP_3}{P_3Q_3} \geq 3, \frac{AP_1 \cdot BP_2 \cdot CP_3}{P_1Q_1 \cdot P_2Q_2 \cdot P_3Q_3} \geq 27.$$

379. Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = \sqrt{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + q} + \sqrt{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + q} + \sqrt{\tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + q},$$

όπου A, B, C γωνίες τριγώνου και q μη αρνητικός σταθερός αριθμός.

380. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sqrt{s}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \sqrt{2}(r_a + r_b + r_c).$$

381. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}.$$

382. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{c^2a^2}{c+a} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2}.$$

383. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

384. Έστω τρίγωνα $ABC, A'B'C'$ με πλευρές a, b, c, a', b', c' αντίστοιχα και α είναι KLM το τρίγωνο με πλευρές $a+a', b+b', c+c'$. Αν τα τρίγωνα αυτά έχουν εμβαδά E, E', E_+ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{E} + \sqrt{E'} \leq \sqrt{E_+}.$$

385. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C \geq \frac{3R^3 + 3R^2r - 4s^2r}{3R^3}.$$

386. Αν ABC μη αμβλυγώνιο τρίγωνο με γωνίες A, B, C μετρούμενες σε ακτίνια, αποδείξτε ότι

$$ABC \left(\frac{\sin A}{B} + \frac{\sin B}{C} + \frac{C}{A} \right)^3 > 8.$$

387. Αν $a, b, c > 0$ με $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, αποδείξτε ότι

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

388. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{h_a}{w_a} + \frac{h_b}{w_b} + \frac{h_c}{w_c} \geq 1 + \frac{4r}{R}.$$

389. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\sum a \cos \frac{B-C}{2} \geq s \left(1 + \frac{2r}{R} \right).$$

390. Αν $x, y, z > 0$ αποδείξτε ότι

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

391. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{\sin B \sin C}{\sin A} \right)^2 + \left(\frac{\sin C \sin A}{\sin B} \right)^2 + \left(\frac{\sin A \sin B}{\sin C} \right)^2 \geq \frac{9}{4}.$$

392. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\cos C \cos A}{\cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\cos A \cos B}{\cos \frac{A-B}{2}} \leq \frac{3}{4}.$$

393. Έστω τρίγωνο ABC και G το βαρύκεντρό του. Αν A_1, A_2, A_3 είναι τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB αντίστοιχα και P τυχαίο σημείο του επιπέδου, αποδείξτε ότι

$$PA + PB + PC + 3PG \geq 2(PA_1 + PB_1 + PC_1).$$

394. Έστω τρίγωνο ABC και M σημείο του επιπέδου του. Αποδείξτε ότι

$$(MA + MB + MC)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 9.$$

395. Αν $x, y, z > 0$ με $z \geq x, z \geq y$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \sqrt{\frac{x+y}{z}}.$$

396. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{r_a^2}{a^2} + \frac{r_b^2}{b^2} + \frac{r_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}.$$

397. Αν $a, b, c, d > 0$ με $abcd = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

398. Ας είναι ABC, XYZ δύο τρίγωνα με πλευρές a, b, c, x, y, z και εμβαδά E_1, E_2 αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$a^2(y^2 + z^2 - x^2) + b^2(z^2 + x^2 - y^2) + c^2(x^2 + y^2 - z^2) \geq 16E_1E_2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα ;

399. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \leq \frac{s}{2r}.$$

400. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$m_a r_a + m_b r_b + m_c r_c \leq s^2.$$

401. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$ab + bc + ca \geq 2R^2 + 2Rr + \frac{8}{\sqrt{3}}E.$$

402. Αν $a, b, c, x, y, z \in R$ με $ab + bc + ca \geq 0, xy + yz + zx \geq 0$, αποδείξτε ότι

$$(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z \geq 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)}.$$

403. Έστω τρίγωνο ABC με εμβαδόν ίσο με $1/2$ τετραγωνικές μονάδες. Αποδείξτε ότι $a^2 + \csc A \geq \sqrt{5}$.

404. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$w_a + w_b + w_c \leq 3(R + r).$$

405. Έστω τρίγωνο ABC και οι σεβιανές AD, BE, CF που διέρχονται από το σημείο P . Αποδείξτε ότι

$$\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \geq 6, \quad \frac{AP}{PD} \cdot \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CP}{PF} \geq 8,$$

$$\frac{AD}{PD} \cdot \frac{BE}{PE} \cdot \frac{CF}{PF} \geq 27, \quad \frac{AD}{AP} + \frac{BE}{BP} + \frac{CF}{CP} \geq \frac{9}{2}.$$

406. Έστω μη ισόπλευρο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι το τρίγωνο GIH είναι αμβλυγώνιο.

407. Έστω τρίγωνο ABC και P σημείο του επιπέδου του. Αποδείξτε ότι

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

408. Έστω τρίγωνο ABC με I το έγκεντρό του και G το βαρύκεντρό του. Ας είναι r_A, R_A οι ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου IBC και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου GBC αντίστοιχα. Αναλόγως ορίζονται τα r_B, R_B, r_C, R_C . Αποδείξτε ότι

$$r_A + r_B + r_C \leq R_A + R_B + R_C.$$

409. Έστω μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \geq (1 + \sqrt{2 \cos A \cos B \cos C})^2.$$

410. Έστω τρίγωνο ABC και D, E, F τα παράκεντρα του. Αποδείξτε ότι

$$(DE + EF + FD)^2 \geq 8\sqrt{3}sR.$$

411. Έστω τρίγωνο ABC και τα σημεία P, Q, R στις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα. Αν ισχύει $QA + AR = RB + BP = PC + CQ$, αποδείξτε ότι

$$QR + RP + PQ \geq \frac{a+b+c}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

412. Έστω μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι ισχύει

$$a \cos^3 A + b \cos^3 B + c \cos^3 C \leq \frac{abc}{4R^2}.$$

413. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \geq \frac{1}{2Rr}.$$

414. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \geq 4.$$

415. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq s^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}.$$

416. Αν ABC οξυγώνιο τρίγωνο, αποδείξτε ότι

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 2\frac{s}{r} - 3\sqrt{3}.$$

417. Έστω τρίγωνο ABC και σημείο M στο εσωτερικό του. Αν d_a, d_b, d_c είναι οι αποστάσεις του M από τις πλευρές του τριγώνου, αποδείξτε ότι

$$2E \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R} \right) \geq d_a + d_b + d_c.$$

Είναι δυνατόν να ισχύει η ισότητα ;

418. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και P σημείο στο εσωτερικό του. Αποδείξτε ότι

$$(AP + BP + CP)^2 \geq \sqrt{3}(aPA + bPB + cPC).$$

419. Έστω τρίγωνο ABC . Αποδείξτε ότι

$$\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{s}{r}\right)^2}.$$

420. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Αποδείξτε ότι

$$a(IB + IC - 2IA) + b(IC + IA - 2IB) + c(IA + IB - 2IC) \geq 0.$$

421. Αν $x, y, z \geq 0$ με $xy + yz + zx = 1$, αποδείξτε ότι

$$(x + y + z - xyz) \sum \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 4.$$

422. Έστω n σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός. Ορίζουμε την ακολουθία $a_k = 2^{2^{n-k}} + k, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Αποδείξτε ότι

$$(a_1 - a_0)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) = \frac{7}{a_1 + a_0}.$$

423. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ για τις οποίες ισχύει $f(x + f(y)) = f(x) - y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$.

424. Αν $a, b, c > 0$ αποδείξτε ότι

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 2 \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

425. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a + b + c = 0$, αποδείξτε ότι

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geq 6abc.$$

426. Αν $a, b, c > 0$ με $ab + bc + ca = 1$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

427. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{2}(a+b)(b+c)(c+a) - 1.$$

428. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του πραγματικού αριθμού k αν για κάθε $a, b, c > 0$ με $a + b + c = ab + bc + ca$ ισχύει

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - k \right) \leq k.$$

429. Έστω τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{6}cm$, με $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι το πολύ ίσο με $3\sqrt{6}cm^2$.

430. Έστω τρίγωνο ABC και σημείο P στο εσωτερικό του. Αποδείξτε ότι

$$\frac{PA}{a^2} + \frac{PB}{b^2} + \frac{PC}{c^2} \geq \frac{1}{R}.$$

431.