

Κεφάλαιο 1^ο

Συναρτήσεις

• Συναρτήσεις:

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία f , με την οποία κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Αν με τη συνάρτηση f το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in \mathbb{R}$, τότε γράφουμε: $y = f(x)$. Το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το y είναι η εξαρτημένη.

Στοιχεία συνάρτησης:

- 1) Τύπος $f(x) = y$.
- 2) Πεδίο ορισμού (συμβολίζεται με A ή A_f) είναι το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές το x για να απεικονίσει η f . Το αναζητούμε στον $x'x$.
- 3) Σύνολο τιμών (συμβολίζεται με $f(A)$) είναι το σύνολο που περιλαμβάνει μόνο τις εικόνες των στοιχείων του πεδίου ορισμού. Το αναζητούμε στον $y'y$.
- 4) Γραφική παράσταση (συμβολίζεται με C_f) είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου $C_f = \{(x, f(x)) / x \in A_f\}$, δηλαδή είναι το σχήμα που προκύπτει αν τοποθετήσουμε στο ορθοκανονικό σύστημα τα σημεία $(x, f(x))$, $x \in A_f$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε αναφέρει, όταν λέμε ότι η συνάρτηση f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ σημαίνει ότι το σημείο ανήκει στην C_f και προφανώς θα επαληθεύει τον τύπο της. Δηλαδή θα ισχύει $f(\alpha) = \beta$.

• Πράξεις με συναρτήσεις:

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A . Τότε:

1. Άθροισμα των δύο συναρτήσεων ορίζεται η συνάρτηση $s(x) = f(x) + g(x)$ με $x \in A$.
2. Διαφορά των δύο συναρτήσεων ορίζεται η συνάρτηση $d(x) = f(x) - g(x)$ με $x \in A$.
3. Γινόμενο των δύο συναρτήσεων ορίζεται η συνάρτηση $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ με $x \in A$.
4. Πηλίκο των δύο συναρτήσεων ορίζεται η συνάρτηση $t(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ με $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.
5. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και f συνάρτηση, τότε ορίζεται η συνάρτηση λf με πεδίο ορισμού το A και τύπο $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

• Μονοτονία συνάρτησης:

1. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ονομάζεται γνησίως μονότονη.

• Ακρότατα συνάρτησης:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

Τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, αν υπάρχει περιοχή του x_0 τέτοια ώστε για κάθε x στην περιοχή αυτή του x_0 να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$.

Τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, αν υπάρχει περιοχή του x_0 τέτοια ώστε για κάθε x στην περιοχή αυτή του x_0 να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$.

Σημείωση 1 : Στον παραπάνω ορισμό με την έκφραση «περιοχή του x_0 » εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής (α, β) το οποίο περιέχει το x_0 . (Γενικά ορίζεται ως περιοχή του x_0 κάθε σύνολο της μορφής (α, β) , με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ή κάθε ένωση διαστημάτων της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$).

• Όριο συνάρτησης:

Όταν λέμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ εννοούμε την τάση που παρουσιάζουν οι εικόνες να πλησιάζουν στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ τον αριθμό λ καθώς ο x πλησιάζει το x_0 στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

• Πράξεις ορίων:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda_2$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε τις ιδιότητες:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lambda_1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \lambda_1^v$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lambda_1}$$

- **Όριο συνάρτησης δύο κλάδων:**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$. Για να υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 πρέπει να

ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$.

- **Συνέχεια συνάρτησης:**

➤ Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **συνεχής στο $x_0 \in A$** όταν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Δηλαδή το όριο της f στο x_0 και η εικόνα του x_0 είναι ίσες.

Στην περίπτωση που έχουμε συνάρτηση δύο κλάδων, όπως παραπάνω, τότε για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο x_0 , πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = f(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω έχουμε ότι για την δίκλαδη συνάρτηση f με

τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$ και στην σχέση $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = f(x_0)$:

Αν ισχύουν τα δύο πρώτα τότε υπάρχει το όριο της f στο x_0 , ενώ αν ισχύουν και τα τρία τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

➤ Η f λέγεται **συνεχής στο A** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίο ορισμού της A .

- **Παράγωγος τιμή της f στο $x = x_0$:**

Ορισμός: Έστω στοιχείο $x_0 \in A$ (A : πεδίο ορισμού της συνάρτησης f). Αν υπάρχει το όριο

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος τιμή της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Γράφουμε τότε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Η παράγωγος τιμή της συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει τον **στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** ενός μεγέθους $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.

Ο ρυθμός μεταβολής του διαστήματος ισούται με την ταχύτητα και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ισούται με την επιτάχυνση. Δηλαδή $s'(t) = v(t)$ και $v'(t) = a(t)$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι και συνεχής σε αυτό, όμως αν είναι συνεχής δεν γνωρίζουμε αν είναι και παραγωγίσιμη. Πχ η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά όχι και παραγωγίσιμη σε αυτό.

Αν όμως η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε σίγουρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

- **Παράγωγος συνάρτηση της f :**

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη (έχει παράγωγο τιμή). Τότε ορίζεται μία νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το B , με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (την παράγωγο τιμή της f στο x). Η συνάρτηση αυτή λέγεται **πρώτη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f' .

Σημείωση : Ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της f και συμβολίζουμε με f'' την παράγωγο συνάρτησης της f' . Ομοίως τρίτη παράγωγο f''' της f καλούμε την παράγωγο της f'' κ.ο.κ. Οι παράγωγοι τέταρτης τάξης και πάνω αντί τόνων συμβολίζονται με $f^{(v)}(x)$ (για παράγωγο v -τάξης).

- **Εφαπτομένη καμπύλης :**

Η εφαπτομένη καμπύλης είναι μία ευθεία η οποία εφάπτεται στην καμπύλη σε ένα μόνο σημείο, έστω $(x_0, f(x_0))$ (δεν αποκλείεται να την τέμνει όμως σε άλλο σημείο).

Η γενική μορφή της εξίσωσης είναι: $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + \beta$, όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας , με

$$\lambda = f'(x_0) = \varepsilon \varphi \omega ,$$

όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. Ισχύει $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

Οι συντεταγμένες του σημείου $(x_0, f(x_0))$ επαληθεύουν και την εξίσωση της καμπύλης και την εξίσωση της εφαπτομένης .

Όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι, δηλ. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Όταν δύο ευθείες είναι κάθετες τότε ισχύει : $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι κατακόρυφες ευθείες $x=a$ δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης.

• Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

1) Αν $f(x) = c$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$. Δηλαδή $(c)' = 0$.

2) Αν $f(x) = x$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1$. Δηλαδή $(x)' = 1$.

3) Αν $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = v x^{v-1}$.

$$\text{Δηλαδή } (x^v)' = v x^{v-1} .$$

4) Αν $f(x) = x^u$, $u \in \mathbb{Z}^*$ και $x \in \mathbb{R}^*$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = u x^{u-1}$.

$$\text{Δηλαδή } (x^u)' = u x^{u-1} .$$

5) Αν $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}_+^*$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$\text{Δηλαδή } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} .$$

6) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{Δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

7) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Δηλαδή $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

8) Αν $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

$$\text{Δηλαδή } (a^x)' = a^x \cdot \ln a .$$

9) Αν $f(x) = e^x$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x$. Δηλαδή $(e^x)' = e^x$.

10) Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$. Δηλαδή $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

11) Αν $f(x) = \eta \mu x$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \sigma \upsilon \nu x$. Δηλαδή $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$.

12) Αν $f(x) = \sin x$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \cos x$.

Δηλαδή $(\sin x)' = \cos x$.

13) Αν $f(x) = \cos x$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ με $f'(x) = -\sin x$.

Δηλαδή $(\cos x)' = -\sin x$.

14) Αν $f(x) = \tan x$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ με $f'(x) = \sec^2 x$.

Δηλαδή $(\tan x)' = \sec^2 x$.

Τα παραπάνω περιγράφονται εν συντομία στον ακόλουθο πίνακα:

$(c)' = 0$	
$(x)' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\tan x)' = \sec^2 x$
$(e^x)' = e^x$	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	

• **Κανόνες παραγώγισης**

1. $[\lambda \cdot f(x)]' = \lambda \cdot f'(x)$

3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

• **Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

• **Γενική μορφή παραγώγων**
(παράγωγοι βασικών σύνθετων συναρτήσεων):

$$1. \left[f^{\alpha}(x) \right]' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2. \left[\sqrt{f(x)} \right]' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x).$$

$$3. \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x).$$

$$4. \left[e^{f(x)} \right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x).$$

$$5. \left[\ln f(x) \right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$6. \left[\eta\mu(f(x)) \right]' = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$7. \left[\sigma\upsilon\nu(f(x)) \right]' = -\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x).$$

• **Εφαρμογές παραγώγων: (Το κριτήριο της πρώτης παραγώγου)**

1) Έστω f μία συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [a, b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , δηλαδή στο (a, b) . Τότε:

A) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

B) Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

2) Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$ με $f'(x_0) = 0$. Τότε:

A) Αν $f'(x_0) > 0$ στο διάστημα (a, x_0) και $f'(x_0) < 0$ στο διάστημα (x_0, b) τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x = x_0$ μέγιστο το $f(x_0)$ στο διάστημα (a, b) .

B) Αν $f'(x_0) < 0$ στο διάστημα (α, x_0) και $f'(x_0) > 0$ στο διάστημα (x_0, β) τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x = x_0$ ελάχιστο το $f(x_0)$ στο διάστημα (α, β) .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Έχουμε 3 είδη σημείων τα οποία μπορούν να είναι τοπικά ακρότατα:

- A) Άκρα διαστήματος,
- B) Σημεία x_0 στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x_0) = 0$.
- Γ) Σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά είναι συνεχής.

Η f δεν έχει ακρότατα αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, δηλαδή αν η f' έχει σταθερό πρόσημο στο (α, β) .

• Μεθοδολογία Επίλυσης Προβλημάτων Μεγίστου – Ελαχίστου:

1. Εντοπίζουμε τις μεταβλητές του προβλήματος. Ονομάζουμε x μία από αυτές και εκφράζουμε τις υπόλοιπες συναρτήσεις της x . Προσοχή χρειάζεται για το τι τιμές μπορούν να πάρουν οι παραπάνω μεταβλητές (πχ μεταβλητές που εκφράζουν χρόνο, βάρος, απόσταση, εμβαδό κλπ πρέπει να είναι τουλάχιστον μη αρνητικές).
2. Εντοπίζουμε την ποσότητα της οποίας αναζητούμε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή. Δημιουργούμε μία συνάρτηση f η οποία να υπολογίζει την ποσότητα αυτή. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται το πεδίο ορισμού της f το οποίο καθορίζεται από τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x της συνάρτησης (βάσει τόσο της φύσης της μεταβλητής όσο και των περαιτέρω περιορισμών του προβλήματος).
3. Μελετούμε την συνάρτηση f ως προς μονοτονία και ακρότατα. Από τα συμπεράσματα της παραπάνω μελέτης, απαντούμε στην εκάστοτε ερώτηση του προβλήματος. (Η λύση της άσκησης δεν τελειώνει ποτέ με την εύρεση της μονοτονίας και των ακροτάτων της f αλλά μόνο με την σαφή απάντηση στην ερώτηση της εκφώνησης του προβλήματος).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ*Βασικά στοιχεία συναρτήσεων*

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{x^3 - 15x}{5}$$

$$\text{ii. } f(x) = \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 2}$$

$$\text{iii. } f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2}$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{x^2 - 16}{5x^2 - 3x + 1}$$

$$\text{v. } f(x) = \frac{x + \frac{3}{2}}{4x^6 + (3x - 2)^4}$$

$$\text{vi. } f(x) = \frac{4(x - 3)(x + 2)}{3(x + 5)(x - 1)^2}$$

$$\text{vii. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x - 12}$$

$$\text{viii. } f(x) = \sqrt{3x - 6}$$

$$\text{ix. } f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3}$$

$$\text{x. } f(x) = \sqrt[6]{5 - |x - 1|}$$

$$\text{xi. } f(x) = \sqrt[7]{\frac{x}{x - 1}}$$

$$\text{xii. } f(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 16}$$

$$\text{xiii. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x^2 - 16}$$

$$\text{xiv. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 100} + \sqrt{x + 10}}{x^2 - 144}$$

$$\text{xv. } f(x) = \log(10x - 200)$$

$$\text{xvi. } f(x) = \ln(4 - x^2)$$

$$\text{xvii. } f(x) = \sqrt{\ln(x - 1)}$$

$$\text{xviii. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - \log x}}$$

$$\text{xix. } f(x) = \log(2 - \log x)$$

$$\text{xx. } f(x) = \ln(25 - x^2) + \sqrt{\frac{x + 3}{x - 4}}$$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

$$\text{ii. } f(x) = \frac{3x - 1}{\eta\mu^2 x - 1}$$

$$\text{iii. } f(x) = \sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$\text{v. } f(x) = \frac{1 + \ln x}{\ln^2 x - \ln x - 2}$$

3. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x^2 + \lambda x + 9}}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

4. Να υπολογίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \lambda x + 4}}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-2) - 1$ και $g(x) = e^{x-3} - 1$.
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(3)$, $f(e+2)$, $g(3)$, $g(-1)$
 - Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
 - Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(3,0)$ και $B(4,1)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.
 - Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -\frac{5}{8}$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \leq 1 \\ 6-3x, & x > 1 \end{cases}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ και $f(2)$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - 2$ και $g(x) = e^x - 1$.
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\pi)$, $f(\ln 2)$, $g(0)$, $g(e)$.
 - Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$.
 - Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$.
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
 - Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f+g$;
 - Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ παίρνει θετικές τιμές.
 - Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(2,0)$, $B(1,1)$, $\Gamma\left(3, \frac{3}{8}\right)$, $\Delta(0,0)$, $E(0,1)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση C_f της f ή την γραφική παράσταση C_g της g .
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta + \sqrt{4-x^2}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-2,-2)$ και $B(2,2)$, να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$.

Όρια συναρτήσεων

11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (θεωρήστε δεδομένο ότι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων είναι τέτοιο ώστε να έχει νόημα η αναζήτηση ορίου για καθεμία από αυτές):

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 7x - 5)$	vii. $\lim_{x \rightarrow 0} (3\eta\mu^2 x + x + 1)(\sigma\upsilon\nu x + 3\epsilon\phi x)$
ii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4)$	viii. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu^3 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x)\sqrt{x+2}$
iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 6x - 3)$	ix. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^2 + \ln x - 2}{x^2}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+3)(3x-1)}{x^2 - x + 2}$	x. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^3 x + \ln x^3 + \sqrt{x^2 - 1}}{\eta\mu^2(x-1) + \sigma\upsilon\nu(x^2 - 1)}$
v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+6}(x+2)}{3x-1}$	xi. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \ln x$
vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1} \cdot 2^{x-1}}{\sqrt{x+1} \cdot (x-2)}$	xii. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\ln^2(x+1) + \sigma\upsilon\nu^2 x}$

12. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (με δεδομένο ότι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων είναι τέτοιο ώστε να έχει νόημα η αναζήτηση ορίου για καθεμία από αυτές):

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$	xi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$
ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$	xii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$
iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$	xiii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x^2 + x}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{x^2 - 4}$	xiv. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$
v. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	xv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x^2}$
vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$	xvi. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$
vii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$	xvii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$
viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6}$	xviii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1}{\sqrt{x} - 1}$
ix. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$	xix. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$
x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 - 5x - 10}{x^2 - 3x + 2}$	

$$\text{xx. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

14. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 4x + 3}$.

15. Να υπολογίσετε τα ακολουθα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$, β) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 81}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$.

16. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \cdot \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right]$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2} - 1}$, δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$,

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x^2 - x}$.

17. Έστω η συνάρτηση $f(h) = \frac{|h|(h+1)}{h}$. Έχει όριο η f στο $h = 0$;

18. Αν $f(x) = \sqrt{x} + 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h^2 + 2h}$.

19. Να υπολογίσετε τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$, β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4}$, δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

20. Αν $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x) - 2}$.

21. Ομοίως για $f(x) = x^2 + x + 1$, υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x < 2 \\ ax + 3, & x \geq 2 \end{cases}$. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = 2$.

23. Να προσδιοριστούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = -1$, με $f(x) = \begin{cases} ax + \beta - 1, & x < -1 \\ (\alpha - 1)x^2 + 2\beta, & x \geq -1 \end{cases}$.

24. Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 0 \\ ax - 2\beta, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $x = 0$.

Παράγωγος συνάρτησης

25. Με τη βοήθεια του ορισμού, να υπολογίσετε την παράγωγο τιμή της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i. $f(x) = 3x + 4, x_0 = 5$

ii. $f(x) = x^2 + 2, x_0 = 3$

iii. $f(x) = x^2 + 2x + 5, x_0 = 1$

iv. $f(x) = x^3 + x^2 + 5, x_0 = -1$

v. $f(x) = \sqrt{x+3}, x_0 = -2$

26. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

ii. $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2$

iii. $f(x) = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x - 5$

iv. $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln x - 1$

v. $f(x) = 2x^2 + \frac{108}{x}$

27. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

ii. $f(x) = (x + 1) \ln x$

iii. $f(x) = (1 + \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

iv. $f(x) = \sqrt{x}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

v. $f(x) = x(1600 - 2x)$

28. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

ii. $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

iii. $f(x) = x + \frac{9}{x}$

iv. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

v. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$

29. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$

ii. $f(x) = (\sqrt{x} + \ln x)^3$

iii. $f(x) = (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^{100}$

iv. $f(x) = \eta\mu 3x$

v. $f(x) = \eta\mu x^3$

vi. $f(x) = \eta\mu^3 x$

vii. $f(x) = \eta\mu^3 3x$

viii. $f(x) = \eta\mu^3 (3x)^3$

ix. $f(x) = \eta\mu^3 (3x^3)^3$

x. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$

xi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x^4$

xii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x$

xiii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 4x$

xiv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 (4x)^4$

xv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 (4x^4)^4$

30. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = \ln x$

ii. $f(x) = \ln x^2$

iii. $f(x) = \ln^2 x$

iv. $f(x) = \ln^2 x^2$

v. $f(x) = \ln 5x$

vi. $f(x) = \ln 5x^2$

vii. $f(x) = \ln (5x)^2$

viii. $f(x) = \ln^3 5x$

ix. $f(x) = \ln^3 5x^2$

x. $f(x) = \ln^3 (5x)^2$

31. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f όταν:

i. $f(x) = \ln(\eta\mu^2 x)$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(\sigma\upsilon\nu x)$

iii. $f(x) = \sqrt{\ln^3 3x}$

iv. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta\mu(\ln x^3)}}$

v. $f(x) = \sqrt{(x^3 + \sigma\upsilon\nu x)^5} - (\sqrt{3x} - \ln(\epsilon\phi x))$

vi. $f(x) = \ln(\eta\mu x) + \eta\mu(\ln x)$

vii. $f(x) = \eta\mu(\ln^2 x) + \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x) - \sigma\upsilon\nu(\eta\mu^2 x)$

viii. $f(x) = \ln^2(\sigma\upsilon\nu^2((3x)^2))$

32. Να αποδείξετε ότι για καθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις f , η παράγωγός της είναι η g όταν:
- $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $g(x) = 2\sqrt{x^2+1}$
 - $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
 - $f(x) = \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1}$, $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$
 - $f(x) = x[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)]$, $g(x) = 2\eta\mu(\ln x)$.
33. Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x = -2$, η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^3+5, & x \leq -2 \\ \sqrt[3]{x+10}-1, & x > -2 \end{cases}$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη.
34. Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + |x-3|$ στο $x = 3$.
35. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.
36. Αν $f(x) = x^2$, να δείξετε ότι $f'(a+\beta) = f'(a) + f'(\beta)$.
37. Να βρείτε τις παραγώγους τιμές των συναρτήσεων :
- $f(x) = x \cdot \eta\mu^2 x$, για $x = \pi$,
 - $f(x) = [(x+1)\sigma\upsilon\nu x]^2$, για $x = 0$
 - $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$, για $x = \frac{\pi}{3}$,
 - $f(x) = x \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, για $x = \frac{\pi}{4}$.
38. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:
- $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{x}{\eta\mu x}$,
 - $g(x) = \frac{x - \ln x}{x}$,
 - $h(x) = \ln(\ln x)$,
 - $\varphi(x) = \eta\mu \sqrt{\ln x}$.
39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^5, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$. α) να βρείτε την παράγωγο της f και β) να εξετάσετε την f' ως προς την συνέχεια.

40. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - x}{[f(x)]^2 + 1}$, με την f να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρείτε την $g'(0)$ αν γνωρίζουμε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$.
41. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$. Να δείξετε ότι: $xf''(x) + \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{4}f(x) = 0$.
42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \mu\sigma\upsilon\nu(\theta x) + \nu\eta\mu(\theta x)$. Να δείξετε ότι: $f''(x) + \theta^2 f(x) = 0$.
43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - x^2$. Να δείξετε ότι: $(1-x)f''(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
44. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 με $g(x_0) \neq 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, με $Q'(x_0) = 0$. Να δείξετε ότι $Q(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
45. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = f(x) \ln x + \frac{f(x)}{\sqrt{x}-1}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $g'(4)$ αν $f(4) = 4$ και $f'(4) = 0$.
46. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $y' = y$ όταν $y = x^3$.
47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x+3|$. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .
48. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f'(x) + \gamma \cdot f''(x) = e^x$.
49. Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) - f(-x) = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
50. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων: α) $\eta\mu^3(\ln x)$, β) $\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$, γ) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$, δ) $\ln(\eta\mu x)$, ε) $\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$, στ) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$.

51. Έστω f μία συνάρτηση περιττή (δηλ. $f(-x) = -f(x)$) και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: $f(0) = f''(0) = 0$.
52. Αν $f(x) = ae^{vx} + be^{-vx}$, να δείξετε ότι: $f''(x) = v^2 f(x)$.
53. Αν $f(x) = e^x \eta \mu x$, να δείξετε ότι: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.
54. Αν $f(x) = g^2(x) - 3g(x) + 2e^x$ με $g(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 2002$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $f'(0)$.
55. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων: α) $f(x) = (x^2 + 5x - 3)^{10}$,
β) $f(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$, γ) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x + x^2}$, δ) $f(x) = \varepsilon \varphi(\sigma \upsilon \nu x)$, ε) $f(x) = e^{\eta \mu x}$.
56. Αν $f(x) = \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sigma \upsilon \nu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.
57. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε να ισχύει: $P(x) - P'(x) = x^2 - 5$,
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$. Να βρείτε:
- Την παράγωγο τιμή της f στο $x_0 = -2$,
 - Τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0 = -2$,
 - Την εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο $x_0 = -2$.
59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Να βρείτε:
- Την παράγωγο τιμή της f στο σημείο $x_0 = 0$,
 - Τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$,
 - Την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.
60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε:
- Την παράγωγο τιμή της f στο $x_0 = 1$,
 - Την παράγωγο τιμή της f στο $x_0 = 2$,
 - Τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(-1, f(-1))$,
 - Την παράγωγο τιμή της f στο τυχαίο σημείο $x = \alpha$,
 - Τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης 4,
 - Την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: y = 6x - 3$.
61. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 - Να εξετάσετε αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.
 - Να εξετάσετε αν η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - 4$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(2, 4)$;
62. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 3$ στο σημείο $(2, 5)$.
63. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ στο σημείο $(1, 1)$.
64. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + 2$ έχει στο σημείο της $(-1, 2)$ εφαπτομένη που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

65. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 + x^2$ στο σημείο $(-1, 0)$.
66. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x + 4$, στο σημείο $(-1, -7)$.
67. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$ και η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ε .
68. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, όταν : α) $f(x) = x + \sqrt{x} - 1$, $x_0 = 9$, β) $f(x) = \ln x + \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
69. Να βρεθούν τα σημεία της παραβολής $y = x^2 + 3$ στα οποία οι εφαπτόμενες της διέρχονται από το σημείο $A(1, 0)$.
70. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x) = 2x^2 + x + 3$ στο σημείο $M(0, 3)$.
71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x)$. Να βρεθούν : α) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες. β) να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από την ευθεία $y = e$. γ) Να βρεθεί η $f'(x)$. δ) Να βρεθεί το $f'\left(\frac{e}{2}\right)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνει. ε) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $K\left(\frac{e}{2}, f\left(\frac{e}{2}\right)\right)$.
72. Έστω C_f η γραφική παράσταση της f με $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9x - 12$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στην C_f και η εφαπτομένη της C_f στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$.
73. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο οι συναρτήσεις είναι κάθετες.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 6$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ε .
75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & x < -2 \\ x^2 + \gamma x, & x \geq -2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $(-2, f(-2))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y - 3 = 0$.
76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. i) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα κοινά σημεία με την ευθεία $y = x$. ii) Να βρεθεί η κάθετη στην εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο κοινό της σημείο με τετμημένη διάφορη από το μηδέν.
77. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$. α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$. β) Δείξτε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες είναι κάθετες.
78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $y = 2x + \beta$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της $A(1, 3)$.
79. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 1$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'Ox$.
80. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
81. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, στο σημείο που κόβει αυτή τον άξονα $x'Ox$. Να δείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας xOy των αξόνων.
82. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$ και το σημείο $A(1, y_0)$ που είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f, g . Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1, y_0)$, να βρείτε τις τιμές των α, β και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

83. Να δείξετε ότι για τα σημεία $(x_0, \sin x_0)$ της C_f της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ισχύει: $x_0 + \sin x_0 = 0$.
84. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.
85. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = \frac{\eta\mu x}{\sin x + 2}$, στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Μονοτονία - Ακρότατα

86. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^2 - 2x + 4$

ii. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

iii. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

iv. $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$

v. $f(x) = e^{x-1} + x + 1$

vi. $f(x) = \ln x + x + 1$

87. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{2}{3}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x}$

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$. Να βρεθούν:

i. Το πεδίο ορισμού της f .

ii. Η f' .

iii. Η μονοτονία της f .

iv. Τα τοπικά ακρότατα της f .

v. Η f'' .

vi. Η μονοτονία της f' .

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \eta \mu x}$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

i. Να βρεθεί η f' .

ii. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 1$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x + 10$.

i. Να βρεθεί η f' και η f'' .

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f'(x) = 0$.

iii. Να βρεθεί το πρόσημο της f' .

iv. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

v. Να μελετηθεί η f' ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

91. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 4}$.
92. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.
93. Ομοίως για την συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^5$.
94. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$. α) να βρεθεί το πεδίο ορισμού, β) να μελετήσετε την μονοτονία, γ) να βρεθούν τα ακρότατα.
95. Ομοίως για την $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$.
96. Ομοίως για την $f(x) = x^2 \sqrt{9 - x^2} + 2$.
97. Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.
98. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 e^{-x}$. α) να βρείτε τις f' , f'' , β) να εξετάσετε μονοτονία και ακρότατα.
99. Έστω $f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της $f'(x)$ είναι -1 .
100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδειχθεί ότι $f'(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
 - ii. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.
 - iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της f .
101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2} + 4x + 2$.
- i. Να βρεθεί η παράγωγος της f .
 - ii. Να προσδιοριστούν οι τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

102. Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(2x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$ με $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρεθούν τα ακρότατα της $h(x)$.
103. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6x + 1$. i) να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να δέχεται τοπικό ακρότατο στα σημεία $x = 1$ και $x = -2$. ii) Να μελετηθεί η μονοτονία της f και να προσδιορισθεί το είδος των ακρότατων, αφού αντικατασταθούν τα a, b .
104. Να εξετάσετε την συνάρτηση $f(x) = (\sin x + \eta \mu x)e^x$, $x \in (0, 2\pi)$ ως προς την μονοτονία.
105. Να εξετάσετε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, ως προς τα ακρότατα.
106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο το 1, να βρείτε τις τιμές των a, β . Στη συνέχεια να βρείτε και τα υπόλοιπα ακρότατα της f , αν υπάρχουν.
107. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ως προς την μονοτονία της.
108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^4 + 4a^3x + \beta$, $a > 0$. Αν η συνάρτηση παρουσιάζει για $x = 1$ μέγιστο το 8, να βρείτε τις τιμές των a, β .
109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 3x + a^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
110. Έστω $f(x) = \sin 2x - 2\eta \mu x - 2$, $x \in (0, 2\pi)$. Να βρείτε τα ακρότατα της $f(x)$.
111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(1+x) - x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , την f' και την f'' .
 - Να βρείτε την μονοτονία της f' .
 - Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στην αρχή των αξόνων.
 - Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f' .
 - Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.
 - Να αποδείξετε ότι $x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$, για κάθε $x > -1$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$ και οι αριθμοί α και β με $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1$ και $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και να εξετάσετε αν η C_f έχει άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας.
- ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\alpha - 1)$ και $f(\beta - 1)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- iv. Να αποδείξετε ότι αν $f(\mu) = f(\nu)$, τότε $\mu = \nu$, για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.
- v. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

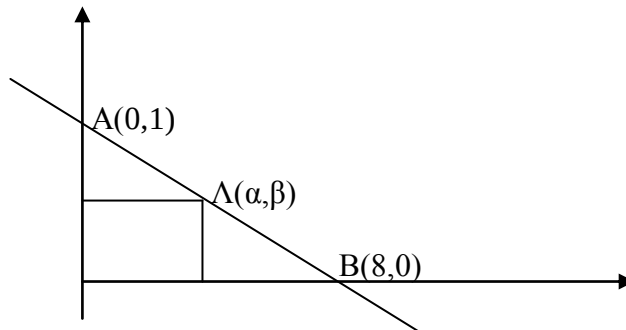
113. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

- i. Να βρείτε την μονοτονία της f και τα τοπικά της ακρότατα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.
- iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$.

Προβλήματα

114. Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1000€ . Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:
 $K(t) = t^2 + 250t^{-1}$. α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος; β) Πόσο είναι αυτό;
115. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν 1600m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει την μικρότερη περίμετρο.
116. Ένα κινητό σε χρόνο t sec διανύει διάστημα S σε μέτρα που δίνεται από τον τύπο :
 $S(t) = t^3 + t^2 + t - 3$, $0 \leq t \leq 10$. Να βρείτε : α) την αρχική ταχύτητα του κινητού ,
 β) ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του θα είναι $2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$,
 γ) ποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση θα είναι $8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.
117. Μια επιχείρηση έχει διαπιστώσει ότι το ποσό σε εκατομμύρια δραχμές που της οφείλουν διάφοροι πελάτες της , δίνεται από τον τύπο : $P(x) = \frac{3}{5}x^5 - 2x^3 + 15x - 1$, όπου x είναι ο αριθμός των χρεωστών της. Να βρείτε για ποιο αριθμό χρεωστών ο ρυθμός μεταβολής του χρέους είναι ελάχιστος και ποιος είναι αυτός.
118. Για το τρίγωνο $AB\Gamma$, με AD το ύψος του, ισχύει: $AD = f(x) = e^x + 1$ και $B\Gamma = g(x) = x - 2 \ln x$ με $x > 0$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του AD , του $B\Gamma$ και του εμβαδού του τριγώνου για $x = 1$.
119. Μια πέτρα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω . Το ύψος που βρίσκεται η πέτρα την χρονική στιγμή $t \in [0, 7]$, δίνεται από την συνάρτηση $h(x) = 35t - 5t^2$. Να βρείτε: α) την αρχική ταχύτητα που βλήθηκε η πέτρα, β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση τις χρονικές στιγμές $t = 3$ και $t = 4$, γ) το υψηλότερο σημείο στο οποίο θα φθάσει η πέτρα.
120. Ένας βιομήχανος μπορεί να στείλει αμέσως σε πελάτες , φορτίο 200 τόνων με κέρδος 30000€ τον τόνο. Αν περιμένει λίγο καιρό θα προσθέτει στο φορτίο 10 τόνους την εβδομάδα αλλά το κέρδος από όλο το φορτίο θα μειώνεται κατά 1000€ τον τόνο κάθε εβδομάδα. Πότε πρέπει να στείλει το φορτίο ώστε να έχει μέγιστο κέρδος ;
121. Ένας καλλιεργητής γνωρίζει ότι κάποια συγκεκριμένη στιγμή η παραγωγή μήλων είναι 100 κιλά ανά εβδομάδα , ενώ η τιμή των μήλων είναι 2€ το κιλό. Αν η παραγωγή αυξάνεται κατά 5 κιλά την εβδομάδα και η τιμή του κιλού μειώνεται κατά 0,05€ την εβδομάδα, τότε να βρείτε πότε τα έσοδα του καλλιεργητή θα είναι μέγιστα.

122. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΟΚΛΜ του παρακάτω σχήματος .



123. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.
124. Ένα καφενείο βγάζει το καλοκαίρι τραπέζια στην πλατεία. Αν βγάλει 12 τραπέζια τότε τα ημερήσια έσοδα θα είναι 20€ για κάθε τραπέζι. Αν όμως βγάλει περισσότερα τραπέζια τότε ο συνωστισμός επηρεάζει την κίνηση και τα ημερήσια έσοδα μειώνονται κατά 0,5€ για κάθε τραπέζι. Πόσα τραπέζια μπορεί να βγάλει το καφενείο ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδα;
125. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(2,0)$. Να βρεθεί το σημείο της f στο οποίο η απόσταση από το A να είναι ελάχιστη.
126. Το κόστος παραγωγής x προϊόντων μιας βιομηχανίας δίνεται από τον τύπο $C(x) = 3800 + 5x + 0,001x^2$. Η τιμή πώλησης ανά μονάδα όταν παραχθούν x προϊόντα διαμορφώνεται κάθε φορά στην τιμή $P(x) = 50 - 0,001x$. Να βρεθούν το πλήθος των προϊόντων που πρέπει να παραχθούν από την βιομηχανία ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.
127. Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου $\frac{x^2}{4} + 25x + 25$ δραχμές. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι $1000 - \frac{x}{2}$ δραχμές, πόσα ταψάκια πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.
128. Η ενέργεια $w(t)$, που αποδίδεται από ένα πηνίο, μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης: $w(t) = 6t^2 - t^4$, και μετριέται σε joules. α) να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο (την ισχύ του πηνίου) τη χρονική στιγμή

$t = t_0$, β) σε ποια χρονική στιγμή το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ; γ) πόσα joules είναι η μέγιστη ισχύς;

129. Σε ένα σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία $A(0, x+1)$ και $B(x^2 + 2x, 0)$ με $x > 0$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x , όταν $x = 2$.
130. Βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης $A = 2x + y$, αν τα x, y είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $\sqrt{5}$.
131. Να χωρίσετε τον αριθμό 30 σε δύο μέρη x, y με $x > 0$ και $y > 0$, έτσι ώστε η παράσταση $A = x^2y - 2002$ να έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή και ποια είναι αυτή.
132. Η απόδοση μιας επένδυσης σε εκατομμύρια δραχμές ως συνάρτηση του χρόνου t (σε έτη) είναι $f(t) = \ln(t^2 + 25) - \ln 25$, $t \geq 0$. Βρείτε σε πόσα χρόνια ο ρυθμός μεταβολής της επένδυσης γίνεται μέγιστος.
133. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις $\alpha = x$, $\beta = x + 1$, $\gamma = x + 2$ ως προς x , όταν $x = 2$.
134. Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 3x + 4$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.
135. Ένας αγρότης έχει συρματόπλεγμα μήκους 200m για να περιφράξει από τις τρεις πλευρές ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το ορθογώνιο να έχει μέγιστο εμβαδόν;
136. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 200m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;
137. Ένας αγρότης χρησιμοποιεί ένα νέο λίπασμα. Το νέο λίπασμα αυξάνει το εισόδημα που δίνεται από την συνάρτηση: $E(t) = -\frac{4}{3}t^3 + 17t^2 + 104t + \frac{1780}{3}$. Το κόστος από την χρήση είναι: $K(t) = t^2 + 40t$. Βρείτε σε πόσα έτη ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους γίνεται μέγιστος.
138. Ένα φάρμακο για την υπόταση υπάρχει σε δισκία και σε σιρόπι. Η μεταβολή της πίεσης συναρτήσει του χρόνου t , από την χορήγηση των δισκίων δίνεται από την συνάρτηση $f(t) = te^{-t}$, $t > 0$ και με την χορήγηση σιροπιού από την συνάρτηση $g(t) = t^2e^{-t}$, $t > 0$.

Ποια από τις δύο μορφές του φαρμάκου δίνει μεγαλύτερη μέγιστη πίεση και ποιο φέρνει το αποτέλεσμα αυτό πιο γρήγορα ;

139. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο : $\Pi(x) = 19500 - \frac{x^3}{3}$. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 2000€ και επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 600€ για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.
140. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6€ την ώρα. Για τον συντονισμό και την επιστασία των εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10€ την ώρα. Ο αγρότης επιπλέον θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10€ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.
141. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.
- β) Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογώνιου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.
- (4^ο Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 2005)