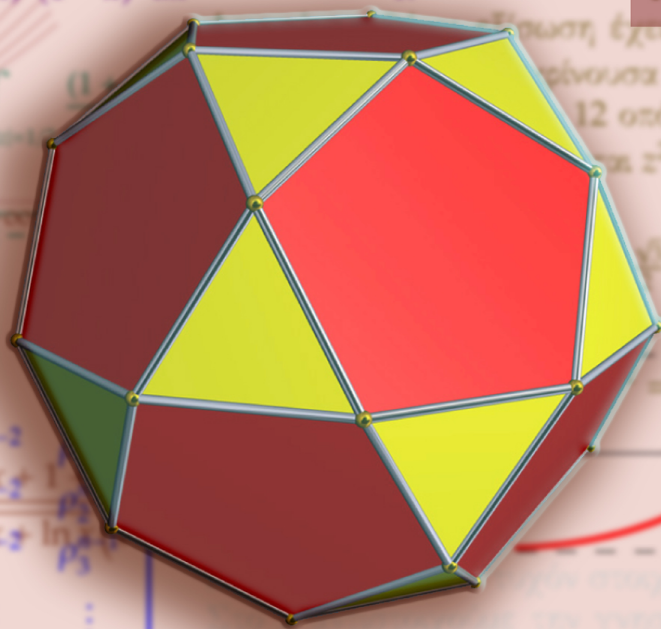
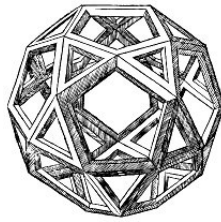


ΕΙΚΟΣΙΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΝ Μαθηματικό Δελτίο

Τεύχος 1ο
Νοέμβριος 2010



www.mathematica.gr



Εικοσιδωδεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στις οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο ιωαννεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συνεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2})$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή: <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron>

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Ο δικτυακός τόπος [mathematica.gr](http://www.mathematica.gr) ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (<http://www.mathematica.gr>) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Διευθύνοντα Μέλη του [mathematica.gr](http://www.mathematica.gr)

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΕΣ

• Αιρετά Μέλη

1. Μιχάλης Λάμπρου (Mihalis_Lambrou) Γενικός Συντονιστής
2. Νίκος Μαυρογιάννης (nsmavrogiannis) Γενικός Συντονιστής
3. Μπάμπης Στεργίου (Μπάμπης Στεργίου) Γενικός Συντονιστής
4. Κωνσταντίνος Σερίφης (k-ser) Οικονομικός Υπεύθυνος
5. Σπύρος Καρδαμίτσης (Καρδαμίτσης Σπύρος) Συντονιστής
6. Μίλτος Παπαρηγοράκης (m.papargiorakis) Συντονιστής
7. Θωμάς Ραϊκόφτισαλης (Ραϊκόφτισαλης Θωμάς) Συντονιστής

• Μόνιμα Μέλη

1. Γρηγόρης Κωστάκος (grigkost) Διαχειριστής
2. Αλέξανδρος Συγκελάκης (cretanman) Διαχειριστής

ΕΠΙΜΕΛΗΤΕΣ

1. Ανδρέας Βαρβεράκης (ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΑΡΒΕΡΑΚΗΣ)
2. Λεωνίδας Θαρραλίδης (Ionis)
3. Φωτεινή Καλδή (Φωτεινή)
4. Νίκος Κατσιπίης (nkatsipis)
5. Αναστάσιος Κοιρώνης (Κοιρώνης Αναστάσιος)
6. Χρήστος Κυριαζής (chris_gatos)
7. Γιώργος Μπαλόγλου (gbaloglou)
8. Ροδόλφος Μπόρης (R BORIS)
9. Γιώργος Ρίζος (Rigio)
10. Δημήτρης Σκουτέρης (dement)

11. Σωτήρης Στόγιας (swsto)

12. Αχιλλέας Συνεφακόπουλος (achilleas)

13. Κωνσταντίνος Τηλέγραφος (Τηλέγραφος Κώστας)

14. Δημήτρης Χριστοφίδης (Demetres)

ΜΕΛΗ

1. Σπύρος Βασιλόπουλος (spyras)

2. Κωνσταντίνος Βήτας (vittasko)

3. Παναγιώτης Γιαννόπουλος (p_gianno)

4. Κώστας Ζυγούρης (kostas.zig)

5. Γιώργης Καλαθάκης (exdx)

6. Χρήστος Καρδάσης (ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΡΔΑΣΗΣ)

7. Βασίλης Μαυροφρύδης (mathxl)

8. Θανάσης Μπεληγιάννης (mathfinder)

9. Μάκης Πολλάτος (mathematica)

10. Κωνσταντίνος Ρεκούμης (rek2)

11. Γιώργος Ροδόπουλος (hsiodos)

12. Αντώνης Σπυριδάκης (A.Spyridakis)

13. Σταύρος Σταυρόπουλος (Σταύρος Σταυρόπουλος)

14. Βασίλης Στεφανίδης (bilstef)

15. Σεραφείμ Τσιπέλης (Σεραφείμ)

16. Χρήστος Τσιφάκης (xr.tsif)

Ο ι Α σ κ ή σ ε ι ς

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έχω υπόψη μου τρεις τριψήφιους αριθμούς x_1, x_2, x_3 . Θα μου δώσετε εσείς τρεις αριθμούς y_1, y_2, y_3 και εγώ θα σας δώσω τον αριθμό $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Σκοπός σας είναι να διαλέξετε τα y_1, y_2, y_3 κατάλληλα ώστε να μπορέσετε να υπολογίσετε τους x_1, x_2, x_3 . Γίνεται;

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Φωτεινή Καλδή) Σε ένα κουρείο ο πελάτης ρώτησε τον κουρέα τι του οφείλει και εκείνος απάντησε: «Ανοιξε το συρτάρι, δες πόσα έχει μέσα, βάλε άλλα τόσα και πάρε 10 ευρώ». Το ίδιο έγινε και άλλες δύο φορές με άλλους δύο πελάτες και την τελευταία φορά δεν έμεινε τίποτα στο συρτάρι. Πόσα ευρώ βρήκε στο συρτάρι ο πρώτος και πόσα οι άλλοι δύο;

Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μπάμπης Στεργίου) Ένας μαθητής έχει γράψει στο τετράδιό του τους αριθμούς 2001, 2002, 2003, ..., 2010 και προσπαθεί να τους τοποθετήσει δίπλα-δίπλα χωρίς κόμμα, όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά, ώστε ο αριθμός με 40 ψηφία που θα προκύψει να είναι πρώτος; Θα πετύχει άραγε κάποια στιγμή ο μαθητής το σκοπό του ή αγωνίζεται μάταια;

ΑΣΚΗΣΗ 4 (qwerty) Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $4^{17} \cdot 5^{30}$;

Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Μπάμπης Στεργίου) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = 1024^{50}, \beta = 5^{200}, \gamma = 243^{60}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\sqrt{360 - 36h} = 123 \cdot \sigma\upsilon\nu(1 - h) - 34567.$$

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 (Κώστας Καπένης) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$1. \sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{6}}}$$

$$2. \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 (Μπάμπης Στεργίου) Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, να γίνει γινόμενο η παράσταση: $A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

Μαθηματικά Α' Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Αν $x + \frac{1}{y} = 1$ και $y + \frac{1}{z} = 1$ να βρεθεί το γινόμενο xyz .

ΑΣΚΗΣΗ 10 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να λύσετε την εξίσωση

$$|x^2 + x - 2| = x^3 - 1 - |x + 1|.$$

Μαθηματικά Α' Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Η διχοτόμος της γωνίας BAD ενός παραλληλογράμμου $ABGD$ (που δεν είναι ρόμβος), τέμνει τις ευθείες BG και GD στα σημεία K και Λ αντιστοίχως. Να δείχθει ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία G, K, Λ βρίσκεται επί του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία B, G, Δ .

ΑΣΚΗΣΗ 12 (Φωτεινή Καλδή) Σε τρίγωνο ABG είναι $\hat{B} = 15^\circ$, $\hat{G} = 30^\circ$. Στην πλευρά BG παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AG$. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Άλγεβρα

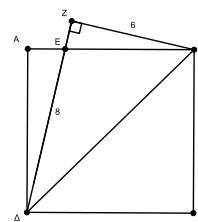
ΑΣΚΗΣΗ 13 (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αν $a > 0$ και $\sqrt{a} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, να εξετάσετε αν υπάρχει αριθμητική πρόοδος ώστε οι αριθμοί $1, \sqrt{a}, a$ να είναι όροι αριθμητικής προόδου (οποιασδήποτε τάξης).

ΑΣΚΗΣΗ 14 (Σπύρος Καρδαμίτσης) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x - 12$ το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 1$

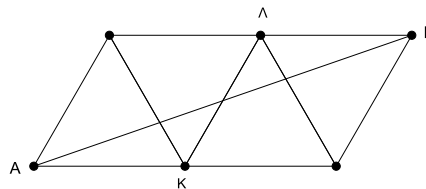
1. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$
2. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 1$

Μαθηματικά Β' Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 (Μιχάλης Νάννος) Δίνεται $\Delta E = 8$, $ZB = 6$, $\hat{\Delta ZB} = 90^\circ$. Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $ABGD$.



ΑΣΚΗΣΗ 16 (Νίκος Μαυρογιάννης) Στο σχήμα τα 4 τρίγωνα είναι ισοπλευρά με πλευρά 1. Βρείτε το AB .



Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 (Μάκης Χατζόπουλος) Έστω $\Delta\Lambda$ διχοτόμος τριγώνου ABG . Αν ισχύει η ισότητα

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}) \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = (\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}) \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

βρείτε το είδος του τριγώνου ABG ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

ΑΣΚΗΣΗ 18 (Χρήστος Λώλης) Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 6\mu$$

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 18\mu - 24$$

$$\text{και } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\mu^2,$$

τότε:

1. Να βρεθεί το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$.
2. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$

3. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα.

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 (Σπύρος Καρδαμίτσας) Ένα σώμα κινείται σ' ένα άξονα και η θέση του σε χρόνο $t = 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = t(t-4)2 + 3$ όπου ο χρόνος t μετρείται σε sec και το $x(t)$ σε m. Να βρείτε:

1. Την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και την αρχική του ταχύτητα.
2. Τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο καθώς και την επιτάχυνση του σ' αυτές τις χρονικές στιγμές.
3. Πότε το σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση.
4. Την χρονική στιγμή το κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος ελαχιστοποιείται.

ΑΣΚΗΣΗ 20 (Κώστας Τηλέγραφος) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - (x - \alpha)^2}, & x \in [0, \alpha) \\ -\frac{x}{2} + \frac{3\alpha}{2}, & x \in [\alpha, 3\alpha] \end{cases}$$

1. Να δείξετε ότι η f συνεχής
2. Αν η γραφική της παράσταση είναι καμπύλη σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής να βρείτε την διάμεσο της κατανομής

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 (math68) Δίνεται στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση:

$$z^2 - (\Delta + 2)\sqrt{3}z + 5\Delta + 6 = 0$$

όπου Δ η διακρίνουσά της, η οποία έχει ρίζες μιγαδικές και μη πραγματικές.

1. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = z_1^{-2012} z_2^{-2015} + z_1^{-2015} z_2^{-2012}$$

3. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $a = z_1^{-2012} z_2^{-2015}$ και $b = z_1^{-2015} z_2^{-2012}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 22 (Νίκος Ζαφειρόπουλος) Δίνεται ο μιγαδικός z με

$$|z - 4i| \leq 2$$

$$\text{και } |z - 2i| = 2.$$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου του z .

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 (Φωτεινή Καλδή) Υπάρχουν συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι 1-1 και να ικανοποιούν την ανίσωση:

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4};$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Για κάθε πραγματικό αριθμό x διαφορετικό του 0 και του 1, ισχύει $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 (Χρήστος Κυριαζής) Υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία να ισχύει: $f' = f \circ f$;

ΑΣΚΗΣΗ 26 (Χρήστος Καρδάσης) Αν f συνεχής στο $[a, b]$, με $f(a) = a, f(b) = b$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε x που ανήκει στο (a, b) , να δείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε x στο $[a, b]$.

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} dx$$

όπου $k \in (0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 (xgastone) Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(\pi/2) = 0$ και για την οποία ισχύει $f'(x) = -(1 + f^2(x))$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 (Γιώργος Τσικαλιουδάκης) Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$ τέτοιες ώστε: $f(x) > 0, 0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις: F, G, H :

- $F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in [0, 1]$
- $G(x) = \int_0^x g(t)dt, x \in [0, 1]$
- $H(x) = \int_0^x f(t)G(t)dt, x \in [0, 1]$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει:

$$H(x) < F(x)G(x).$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει:

$$\frac{H(x)}{F(x)} < \frac{H(1)}{F(1)} < 1.$$

3. Αν $H(1) + \int_0^1 g(t)F(t)dt = F(1) + G(1)$,

να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = -\frac{1-F(\xi)}{1-G(\xi)}$

4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H^2(x)}{F(x) \cdot G(x)}$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (Νίκος Μαυρογιάννης) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \alpha)^\nu (\beta - x)^\mu, x \in \mathbb{R},$$

όπου $\alpha < \beta$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\nu}{x - \alpha} + \frac{\mu}{x - \beta}.$$

2. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[\alpha, \beta]$ και ότι το ξ που μηδενίζει την f' είναι το $\xi = \frac{\mu}{\nu + \mu} \alpha + \frac{\nu}{\nu + \mu} \beta$.

3. Έστω $I(\nu, \mu) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Να δείξετε ότι

$$I(\nu, \mu) = \frac{\mu}{\nu + 1} I(\nu + 1, \mu - 1).$$

4. Αν μ, ν άρτιοι φυσικοί, να υπολογίσετε συναρτήσεις των α, β, ν, μ , το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται: από την C_f , τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα x' .

Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 (Σωτήρης Λουρίδας) Δίδονται οι αριθμοί $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| \neq 0$. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το σύστημα:

$$\begin{cases} xy = z_1 \\ x\bar{y} = z_2 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 (Σπράτος Παπαδόπουλος) Να βρεθεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $f(x) > 0$ και

$$f(x) = x + \int_x^{f(x)} \frac{\eta \mu t}{2t} dt$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Juniors

ΑΣΚΗΣΗ 33 (Κώστας Καπένης) Ποιός τετραψήφιος όταν πολλαπλασιαστεί με το 9 δίνει αποτέλεσμα τον αριθμό με αντεστραμμένα τα ψηφία του;

ΑΣΚΗΣΗ 34 (Κώστας Καπένης) Θέμα από Ινδία: 'Αν a, b, c πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους, τέτοιοι ώστε: $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t, t \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι: $t = -abc$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Seniors

ΑΣΚΗΣΗ 35 (Αντώνης Κυριακόπουλος) Να βρείτε πόσες το πολύ πλευρές μπορεί να έχει ένα κυρτό πολύγωνο (με περισσότερες από τρεις πλευρές), των οποίων το μήκος να είναι ίσο με το μήκος της μεγαλύτερης διαγωνίου του πολυγώνου αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ 36 (Μιχάλης Λάμπρου) Έστω $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού. Μπορείτε να προτείνετε κάποιον τρόπο ώστε αλληλάζοντας την σειρά των ψηφίων του $a_1, a_2, a_3, \dots$ να προκύψει ρητός αριθμός;

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 37 (Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 2010) Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$ και $B\Gamma = \beta$. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AO$ και την διαγώνιο ΔB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = BO$. Αν το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(i) \beta = \alpha\sqrt{3}$$

$$(ii) AZ = EO$$

$$(iii) EO \perp Z\Delta$$

ΑΣΚΗΣΗ 38 (Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 2010) Δίνεται τρίγωνο ΔABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω I το έγκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI, CI τέμνουν τον (O) , στα σημεία D, E, F , αντιστοίχως. Οι κύκλοι $(O_1), (O_2), (O_3)$, με διαμέτρους ID, IE, IF αντιστοίχως, τέμνουν τις πλευρές BC, AC, AB , στα ζεύγη των σημείων A_1, A_2 και B_1, B_2 και C_1, C_2 , αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα έξι αυτά σημεία, ανήκουν στον ίδιο κύκλο έστω (O') .

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 39 (Putnam 2009) Έστω A, B, C τετραγωνικοί πίνακες ιδίου μεγέθους με A αντιστρέψιμο. Αν $(A - B)C = BA^{-1}$ να δείχθει ότι $C(A - B) = A^{-1}B$.

ΑΣΚΗΣΗ 40 (Ηλίας Ζαδίκ) Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(1) Η f ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών σε οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο $[a, b]$ του $[0, 1]$.

(2) Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το $f^{-1}(c) = \{x \in [0, 1] : f(x) = c\}$ είναι κλειστό.

Να δείχτει ότι η f είναι συνεχής.

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 41 (Αναστάσιος Κοτρώνης) Αν $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το (πεπερασμένο) άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{6k}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 42 (giannis1990) Να δείχθει ότι δεν υπάρχει πίνακας $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ώστε $A^2 + I = 0$.

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 43 (Γρηγόρης Κωστάκος) Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln(n!)}}{\ln(\mathcal{H}_{n+1})},$$

συγκλίνει, όπου $\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ είναι ο n -οστός Αρμονικός αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 44 (ΜοV) Να δείξετε ότι το σύνολο των γνησίως αυξουσών ακολουθιών $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 45 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Να αναλυθεί ο αριθμός $5^{1985} - 1$ σε γινόμενο τριών ακεραίων, καθένας από τους οποίους είναι μεγαλύτερος του 5^{100} .

ΑΣΚΗΣΗ 46 (Νικόλαος Κασιόνης) Να ληθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση

$$x^y + y = y^x + x.$$

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 47 (Χρήστος Κυριαζής) Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Να αποδείξετε πως για κάθε ζεύγος σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της παραπάνω έλλειψης ισχύει:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} - 1 \right| + \left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 \right| = 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 (Χρήστος Κυριαζής) Να αποδείξετε πως:

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \cdots (1 + \tan 43^\circ) < 2^{11} <$$

$$(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 4^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)$$

Ο Φάκελος του καθηγητή. Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 49 (Μπάμπης Στεργίου)

Διάβαζα τελευταία ένα άρθρο για τις κυρτές συναρτήσεις και μου έκανε εντύπωση η παρακάτω ερώτηση:

Να εξετασθεί αν υπάρχουν συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, κυρτές και γνησίως αύξουσες, που οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν 5 ακριβώς κοινά σημεία, με κοινές εφαπτομένες στα σημεία αυτά.

ΑΣΚΗΣΗ 50 (Στράτος Παπαδόπουλος) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = k$, όπου k πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

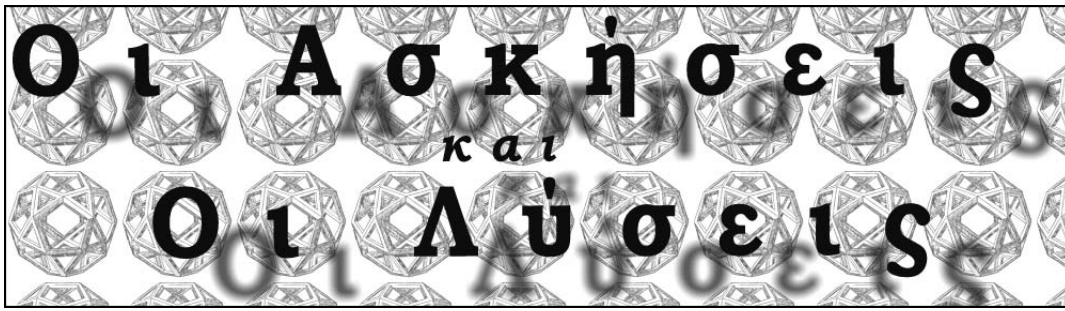
Ο Φάκελος του καθηγητή. Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 51 (Αναστάσιος Κοτρώνης) Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 1| = 1$, ας βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z^2 .

ΑΣΚΗΣΗ 52 (Σπύρος Καπελλίδης) Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 \leq 9r^2.$$

Αν ισχύει η ισότητα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισοπλευρο.



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 Δημήτρης Χριστοφίδης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=5362>

Έχω υπόψη μου τρεις τριψήφιους αριθμούς x_1, x_2, x_3 . Θα μου δώσετε εσείς τρεις αριθμούς y_1, y_2, y_3 και εγώ θα σας δώσω τον αριθμό $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Σκοπός σας είναι να διαλέξετε τα y_1, y_2, y_3 κατάλληλα ώστε να μπορέσετε να υπολογίσετε τους x_1, x_2, x_3 . Γίνεται;

Λύση 1 Αλέξανδρος Συγκελάκης

Θα σου δώσουμε τους $y_1 = 10^6, y_2 = 10^3$ και $y_3 = 1$. Τότε η απάντηση θα είναι ο 9-ψήφιος $a_1b_1c_1a_2b_2c_2a_3b_3c_3$ και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $x_1 = a_1b_1c_1, x_2 = a_2b_2c_2, x_3 = a_3b_3c_3$.

Λύση 2 Μιχάλης Λάμπρου

Όταν διάβασα την ερώτηση του Δημήτρη, στην βιασύνη μου δεν πρόσεξα ότι έλεγε για τριψήφιους x_1, x_2, x_3 . Η πρώτη μου σκέψη ήταν, «αποκλείεται!» Μια στιγμή όμως, είπα μέσα μου, για να ρωτά ο Δημήτρης, κάτι ξέρει. Οπότε πήρα χαρτί και μολύδι και ...σκέψη, σκέψη, σκέψη, ... εύρηκα!

Δείξε ότι: Υπάρχουν y_1, y_2, y_3 τέτοιοι ώστε αν κάποιος έχει υπόψη του τρεις ακέραιους x_1, x_2, x_3 (όχι κατ' ανάγκη τριψήφιους, ούτε κατ' ανάγκη θετικούς), τότε από γνώση του $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τους x_1, x_2, x_3 .

Παίρνουμε $y_1 = \log 2, y_2 = \log 3, y_3 = \log 5$. Τότε $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \log 2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3}$. Οπότε ξέρουμε τον $2^{x_1} 3^{x_2} 5^{x_3}$.

Αλλά από αυτόν προσδιορίζουμε τους x_1, x_2, x_3 , λόγω της μοναδικότητας της ανάλυσης σε πρώτους.

Σχόλιο: Βέβαια η μέθοδος γενικεύεται σε όσους να 'ναι ακεραίους. Η τεχνική αυτή δεν είναι καινούργια: Έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα, π.χ. αυτήν χρησιμοποιεί ο Gödel στην κωδικοποίηση των προτάσεων στο περίφημο θεώρημά του.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Φωτεινή Καλδή

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=5362>

Σε ένα κουρέιο ο πελάτης ρώτησε τον κουρέα τι του οφείλει και εκείνος απάντησε: «άνοιξε το συρτάρι, δεξ πόσα έχει μέσα, βάλε άλλη τόσα και πάρε 10 ευρώ». Το ίδιο έγινε και άλλη δύο φορές με άλλους δύο πελάτες και την τελευταία φορά δεν έμεινε τίποτα στο συρτάρι. Πόσα ευρώ βρήκε στο συρτάρι ο πρώτος και πόσα οι άλλοι δύο;

Λύση 1 Χρήστος Κυριαζής

Έστω x τα ευρώ που υπάρχουν μέσα στο συρτάρι.

- Ο πρώτος πελάτης βάζει x ευρώ και παίρνει 10 ευρώ. Άρα τώρα στο συρτάρι υπάρχουν: $x + x - 10 = 2x - 10$ ευρώ.
- Ο δεύτερος πελάτης κάνει την ίδια κίνηση και εναποθέτει $2x - 10$ ευρώ και παίρνει πίσω 10 ευρώ. Συνεπώς τώρα στο συρτάρι υπάρχουν: $2x - 10 + 2x - 10 - 10 = 4x - 30$ ευρώ.
- Κι ο τρίτος κάνει ακριβώς το ίδιο, οδηγούμενος από το «δαιμόνιο» κουρέα. Βάζει $4x - 30$ ευρώ και παίρνει πίσω το δεκαδικάκι. Άρα το συρτάρι τώρα περιέχει: $4x - 30 + 4x - 30 - 10 = 8x - 70$ ευρώ. Τώρα, έτσι όπως τα κατάφερε ο κουρέας, το ταμείο έμεινε στο...μηδέν. (Πάλι καλά που δεν είναι...μείον)

Άρα: $8x - 70 = 0 \Rightarrow x = 70/8 \Rightarrow x = 8,75$ ευρώ.. Δηλαδή το συρτάρι αρχικά είχε 8,75 ευρώ. (τόσα είδε κι ο πρώτος πελάτης), στη συνέχεια, στο δεύτερο πελάτη είχε: $2 \cdot 8,75 - 10 = 7,5$ ευρώ. Και στο άνοιγμα του τρίτου, είχε: $4 \cdot 8,75 - 30 = 5$ ευρώ..

Λύση 2 Φωτεινή Καλδή

Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε και «ανάποδα»:

- Ο 3ος πελάτης πήρε 10 ευρώ, έφυγε και έμειναν 0 ευρώ άρα αυτά που είχαν μείνει από τον 2ο και άλλα

τόσα που έβαλε αυτός είναι 10 ευρώ ο 3ος λοιπόν βρήκε 5 ευρώ

- Ο 2ος πήρε 10 και έμειναν 5 άρα αυτά που είχαν μείνει από τον 1ο και άλλα τόσα που έβαλε αυτός



είναι 15 ο 2ος βρήκε 7,5

- Ο 1ος πήρε 10 και έμειναν 7,5 άρα αυτά που είχαν μείνει και άλλα τόσα που έβαλε αυτός είναι 17,5 το ταμείο είχε 8,75 ευρώ

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 Μπάμπης Στεργίου

<http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=33&p=54144>

Ένας μαθητής έχει γράψει στο τετράδιό του τους αριθμούς 2001, 2002, 2003, ..., 2010 και προσπαθεί να τους τοποθετήσει δίπλα-δίπλα χωρίς κόμμα, όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά, ώστε ο αριθμός με 40 ψηφία που θα προκύψει να είναι πρώτος; Θα πετύχει άραγε κάποια στιγμή ο μαθητής το σκοπό του ή αγωνίζεται μάταια;

Λύση T-REX

Όπως και να γράψουμε αυτούς τους 10 τετραψήφιους αριθμούς, τα ψηφία των αριθμών που θα προκύψουν - και που έχουν 40 ψηφία - θα έχουν άθροισμα 66. Άρα οι

αριθμοί θα διαιρούνται με το 3 και έτσι είναι όλοι τους σύνθετοι.

ΑΣΚΗΣΗ 4 qwerty

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=9362> Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $4^{17} \cdot 5^{30}$;

Λύση Γιώργος Ρίζος

Αναλυτικά για τους πιο μικρούς μας μαθητές:

$$4^{17}5^{30} = (2^2)^{17}5^{30} = 2^{34}5^{30} = 2^4(2^{30}5^{30}) = 2^410^{30} = 16 \cdot 10^{30}$$

Άρα ο αριθμός έχει $30+2 = 32$ ψηφία.



Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 Μπάμπης Στεργίου

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=230>

Από το περιοδικό Revista matematica din Galati επιλέγω την παρακάτω άσκηση. Μπορεί να δοθεί και στη Γ' Γυμνασίου ή ακόμα και στην Α' Λυκείου στις σχετικές ενότητες με διάταξη.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = 1024^{50}, \beta = 5^{200}, \gamma = 243^{60}$$

Λύση Χρήστος Κυριαζής

Είναι $1024 = 2^{10}$, $243 = 3^5$. Άρα οι δοθείσες δυνάμεις γίνονται:

$$\alpha = 1024^{50} = (2^{10})^{50} = 2^{10 \cdot 50} = 2^{500}$$

$$\beta = 5^{200}$$

$$\gamma = 243^{60} = (3^5)^{60} = 3^{5 \cdot 60} = 3^{300}$$

Αφού δεν έχουμε ίδιες βάσεις προσπαθούμε να εμφανίσουμε ίδιους εκθέτες

$$\alpha = 2^{500} = 2^{5 \cdot 100} = (2^5)^{100} = 32^{100}$$

$$\beta = 5^{200} = 5^{2 \cdot 100} = (5^2)^{100} = 25^{100}$$

$$\gamma = 3^{300} = 3^{3 \cdot 100} = (3^3)^{100} = 27^{100}$$

Είναι $25 < 27 < 32$. Άρα και $25^{100} < 27^{100} < 32^{100}$ όποτε $\beta < \gamma < \alpha$

ΑΣΚΗΣΗ 6 Βασίλης Μαυροφρύδης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=2310>

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\sqrt{360 - 36h} = 123 \cdot \sin(1 - h) - 34567$$

Λύση Σταυρουλίτσα

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Άρα και $-1 \leq \sin(1 - h) \leq 1$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα τρία μέλη με $123 > 0$ έχουμε

$$-123 \leq \sin(1 - h) \leq 123$$

Αφαιρώντας από τα τρία μέλη το 34567 έχουμε

$$-123 - 34567 \leq \sin(1 - h) - 34567 \leq 123 - 34567$$

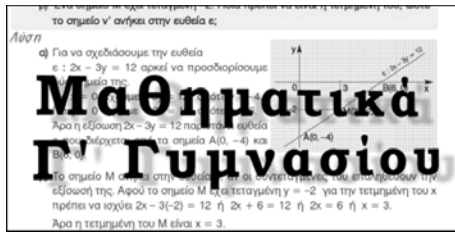
$$-34690 \leq \sin(1 - h) - 34567 \leq -34444$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης

$$\sqrt{360 - 36h} = 123 \cdot \sin(1 - h) - 34567$$

είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μηδέν και το δεύτερο μέλος είναι αρνητικό, αφού το $\sin(1-h) - 34567$ παίρνει τιμές

μεταξύ των -34690 και -34444 . Άρα η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 7 Κώστας Καπένης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=8760>

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$1. \sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{2}{5+2\sqrt{6}}}$$

$$2. \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

Λύση 1 Stavros11

$$\begin{aligned} \text{Για το 1: } & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}})}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}} = \\ & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}})}{\sqrt{25-24}} = \\ & = \sqrt{2}(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}) = \\ & = \sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + (\sqrt{2})^2 - \\ & \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + (\sqrt{2})^2}) = \\ & = \sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}) = \\ & = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{4} = 4 \end{aligned}$$

Λύση 2 Stauroulitsa

Για το 1: Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

και ισχύει $a^2 - b = c^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4+1}{2}} + \sqrt{\frac{4-1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y &= \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4+1}{2}} - \sqrt{\frac{4-1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ z &= 2\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{12-\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{12+8}{2}} - \sqrt{\frac{12-8}{2}} = \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} x+y-z &= \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{10} + \sqrt{2} = \\ &= 2\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{10} + \sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Για το 2: $x = \sqrt{4+\sqrt{15}} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}} =$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \\ z &= 2\sqrt{3-\sqrt{5}} = 2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \\ &= 2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{άρα } x+y-z &= \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Λύση 3 Παναγιώτης Γιαννόπουλος

Για το 1: Αν $x = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}}$, τότε $x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$

Για το 2: Αν $y = \sqrt{10} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$, τότε $y^2 = 22 - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{30 - 10\sqrt{5}} = 22 - 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}} + (\sqrt{5})^2 = 22 - 4\sqrt{5} - 4(5 - \sqrt{5}) = 2$, οπότε η δοθείσα παράσταση $y = \sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 8 Μπάμπης Στεργίου

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=218>

Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$$A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

Λύση 1 Κώστας Σερίφης

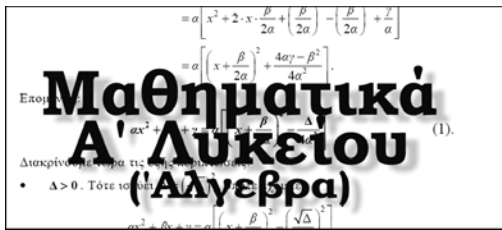
$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= \alpha(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^3 + \gamma^3 = \\ \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta^3 + \gamma^3 &= \beta^2(\alpha + \beta) + \gamma^2(\alpha + \gamma) = \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) &+ (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta) = \\ (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(2\alpha - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Λύση 2 Χρήστος Κυριαζής

Είναι $c^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ άρα $c^3 = c(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

Αντικαθιστώ στο άθροισμα των κύβων και έχω:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + c^3 &= \alpha^3 + \beta^3 + c(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \\ (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &+ c(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \\ (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 + \alpha c - \beta c) &= \\ (\alpha + \beta)(\beta^2 + c^2 - \alpha\beta + \beta^2 + \alpha c - \beta c) &= \\ (\alpha + \beta)[2\beta^2 + c(\alpha + c) - \beta(\alpha + c)] &= \\ (\alpha + \beta)[2(\alpha^2 - c^2) + c(\alpha + c) - \beta(\alpha + c)] &= \\ (\alpha + \beta)[2(\alpha - c)(\alpha + c) + c(\alpha + c) - \beta(\alpha + c)] &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha + c)(2\alpha - c - \beta) \end{aligned}$$



Επιμελητής: Λεωνίδας Θαρραλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 9 Παναγιώτης Γιαννόπουλος
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=9469>

Αν $x + \frac{1}{y} = 1$ και $y + \frac{1}{z} = 1$ να βρεθεί το γινόμενο xyz .

Λύση 1 Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Είναι $xy + y + \frac{1}{z} = xy + 1 = y(x + \frac{1}{y}) = y$, οπότε $xy + \frac{1}{z} = 0$, από που έπεται $xyz = -1$.

Λύση 2 Θα βάλω και τη δική μου προσπάθεια... $y + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow yz + 1 = z \Leftrightarrow yz - z = -1 \Leftrightarrow z(y - 1) = -1 \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{z}$ άρα $x + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow xy + 1 = y \Leftrightarrow xy = y - 1 \Leftrightarrow xy = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow xyz = -1$ ή αλλιώς: $y + \frac{1}{z} = 1$ και $x + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow xy + 1 = y \Leftrightarrow xy + y + \frac{1}{z} = y \Leftrightarrow xy + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow xyz = -1$

Λύση 3 Λεωνίδας Θαρραλίδης

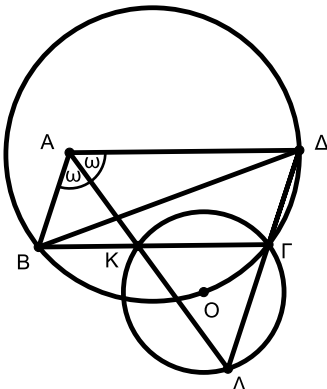
Μία ακόμη λύση, χάριν πλουραλισμού:



Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 11 Παναγιώτης Γιαννόπουλος
<http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=41418>

Η διχοτόμος της γωνίας $BA\Delta$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ (που δεν είναι ρόμβος), τέμνει τις ευθείες $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία K και Λ αντιστοίχως. Ναδειχθεί ότι το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία Γ, K, Λ βρίσκεται επί του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία B, Γ, Δ .

Λύση Γιώργος Ροδόπουλος

Βρίσκουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{\Lambda}$ και ακολούθως $\Delta\Lambda = A\Delta = B\Gamma$.

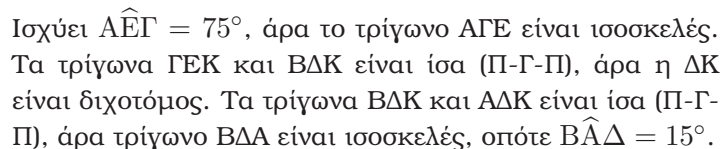
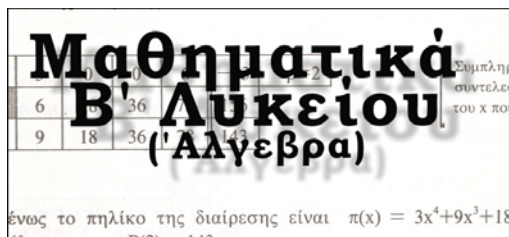
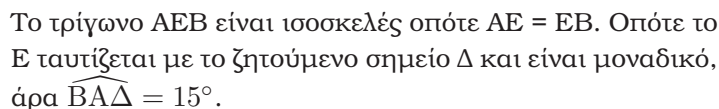
Έστω O το περίκεντρο του ισοσκελούς ($\Gamma K = \Gamma \Lambda$) τριγώνου $\Gamma K\Lambda$. Προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Lambda}_1$. Τα τρίγωνα $O\Delta\Lambda$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα αφού $\Delta\Lambda = B\Gamma$, $O\Lambda = O\Gamma$ και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και έτσι $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$. Συνεπώς το $B\Delta\Gamma O$ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΗ 12 Φωτεινή Καλδή
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=44281>

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 15^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = A\Gamma$. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.

Λύση 1 Γιώργος Ρίζος

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 15^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ παίρνουμε στο εσωτερικό της $B\Gamma$ σημείο E , ώστε $A\Gamma = AE$. Αυτό είναι κατασκευάσιμο, εφόσον $AB > A\Gamma$, αφού οι απέναντι γωνίες τους είναι ομοίως άνισες. Τότε $\widehat{\Gamma A E} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{E A B} = 135^\circ = 120^\circ = 15^\circ$.



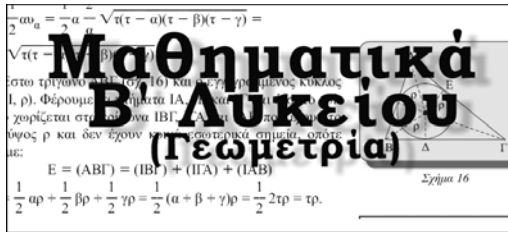
Σχόλιο: Λύσεις έστειλαν και οι: Κώστας Τσουβαλάς, Σωτήρης Λουρίδας (2 λύσεις), Γιάννης Τσόπελας, Γιώργος Μανεάδης

$$\sqrt{a} = \frac{k-l}{m-k} - 1, \text{ \acute{a}τοπο αφού το } \sqrt{a} \text{ \acute{e}\acute{\iota}ναι \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau\omicron\varsigma.}$$

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=57479> Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x - 12$ το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 1$

Αφού το πολυώνυμο διαιρείται ακριβώς με το $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ αυτό σημαίνει πως το 1 και -1 θα είναι ρίζες του πολυωνύμου άρα για $x = 1$ έχουμε: $x^5 + ax^3 +$

$\beta x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 1 + a + \beta - 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow a + \beta = 17$, (1). Για $x = -1$ έχουμε: $x^5 + ax^3 + \beta x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow -1 - a + \beta + 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow \beta - a = 7$, (2). Από (1) και (2) έχουμε $a + b = 17$ και $b - a = 7$ άρα $b = 12$ και $a = 5$. Επομένως με διαίρεση πολυωνύμων έχουμε $x^5 + 5x^3 + 12x^2 - 6x - 12 = (x^2 - 1)(x^3 + 6x + 12)$ και το πηλίκο είναι $x^3 + 6x + 12$.



Λύση 2, Χρήστος Λαζαρίδης

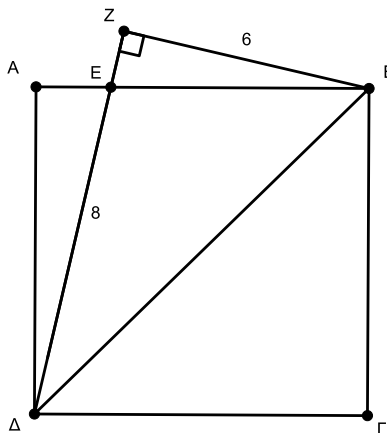
Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση κανονικά βρίσκουμε υπόλοιπο $v(x) = (\alpha - 5)x + \beta - 12$ και πηλίκο $\pi(x) = x^3 + (\alpha + 1)x + \beta$. Το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα $\alpha = 5$ και $\beta = 12$. Άρα $\alpha + \beta = 5 + 12 = 17$ και $\Pi(x) = x^3 + (\alpha + 1)x + \beta = x^3 + 6x + 12$.

Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 15 Μιχάλης Νάννος

<http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=45740>

Δίνεται $\Delta E = 8$, $ZB = 6$, $\widehat{\Delta ZB} = 90^\circ$. Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση 1 Φωτεινή Καλδή

Το $AZBD$ είναι εγγράψιμο, οπότε $\angle A\Delta E = \varphi = \angle EBZ$ και $\angle E\Delta B = 45 - \varphi$. Στο τρίγωνο ΔZB ισχύει

$$\epsilon\phi(45 - \phi) = \frac{6}{8 + ZE}, (1)$$

και στο EBZ ισχύει

$$\epsilon\phi\phi = \frac{ZE}{6}, (2)$$

Από αυτές βρίσκουμε $ZE = 2\sqrt{7} - 4$ και τώρα με Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $B\Delta Z$ παίρνουμε $E = a^2 = 40 + 8\sqrt{7}$

Λύση 2 Γιάννης Τσώπελας

Θεωρούμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και σημείο M πάνω σε αυτήν ώστε EM κάθετη στην $B\Delta$. Θέτουμε $MB = \lambda$, $EZ = \omega$, $AB = a$. Προφανώς $BE = \lambda\sqrt{2}$ και $AE = a - \lambda\sqrt{2}$. Στο εγγράψιμο $AZBD$ από θεώρημα τεμνουσών έχουμε:

$$8\omega = \lambda\sqrt{2}(\alpha - \lambda\sqrt{2}) \Leftrightarrow 64\omega^2 = 2\lambda^2(64 - \lambda^2) \Leftrightarrow 64(2\lambda^2 - 36) = 2\lambda^2(64 - \alpha^2) \Leftrightarrow \lambda^2\alpha^2 = 1152 (1).$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε: $\alpha^2 + (\alpha - \lambda\sqrt{2})^2 = 64 \Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha^2 = 80 (2)$.

Από (1), (2) προκύπτει ότι οι λ^2 , α^2 είναι ρίζες της εξίσωσης: $t^2 - 80t + 1152 = 0$ και $\lambda^2 < \alpha^2$ άρα: $\alpha^2 = 40 + 4\sqrt{28}$.

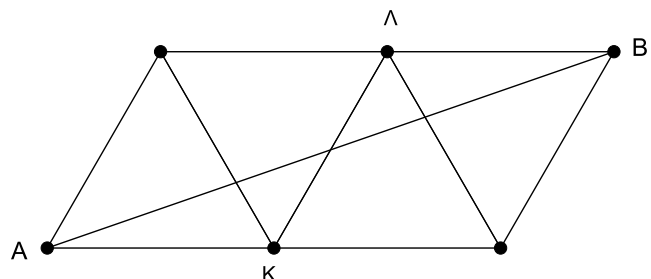
Λύση 3 Μιχάλης Νάννος

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου. Η διαγώνιος $B\Delta = \sqrt{2}x$ και το τετράπλευρο $\Delta ZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο με $\widehat{\Gamma ZB} = \widehat{\Gamma \Delta B} = 45^\circ$ και $\widehat{Z \Delta B} = \widehat{Z \Gamma B} = \varphi$. Έστω ΓH η προβολή του Γ στην ZB . Το τρίγωνο $Z\Gamma H$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με πλευρές $ZH = H\Gamma = 6 + y$ και υποτεινούσα $Z\Gamma = \sqrt{2}(6 + y)$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $B\Gamma H$ έχω: $x^2 = y^2 + (6 + y)^2 (1)$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓBZ και ΔEB έχω: $\frac{\sqrt{2}(6 + y)}{\sqrt{2}x} = \frac{x}{8} \Rightarrow x^2 = 8(6 + y) (2)$. Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει το τριώνυμο: $y^2 + 2y - 6 = 0$ που έχει σαν θετική λύση την $y = \sqrt{7} - 1$, οπότε από την (2) παίρνω ότι $E\mu\beta. = x^2 = 40 + 8\sqrt{7}$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 16 Νίκος Μαυρογιάννης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=50444>

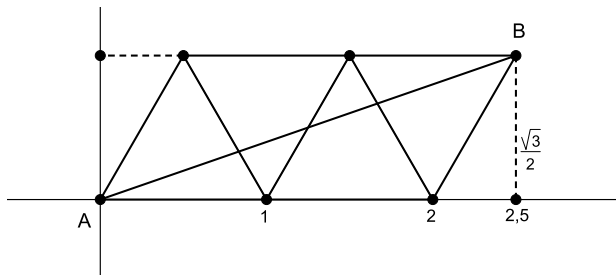
Στο σχήμα τα 4 τρίγωνα είναι ισόπλευρα με πλευρά 1. Βρείτε το AB .



Λύση 1 Eukleidis

Εφαρμόζουμε το Νόμο των συνημιτόνων. Προφανώς τα τρία «κάτω» σημεία είναι συνευθειακά $(AB)^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ άρα $(AB) = \sqrt{7}$

Λύση 2 Γιώργος Ρίζος

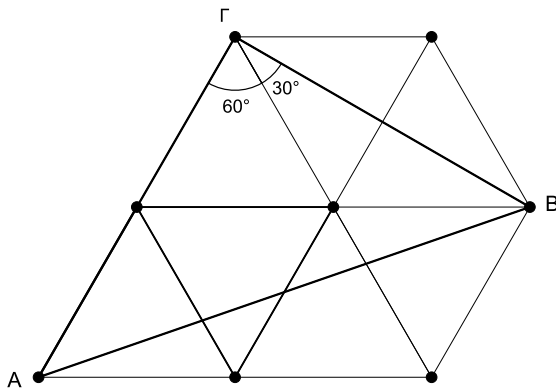


Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με κορυφή A και μονάδα ίση με την πλευρά του ισοπλεύρου, είναι $B\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, άρα $(AB) = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$.

Λύση 3 Ανδρέας Πούλος

Το μέσο M του AB είναι και το μέσον του τμήματος ΚΛ που έχει μήκος α , όσο και η πλευρά των ισοπλευρών τριγώνων. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την ιδιότητα των παραλληλογράμμων (οι διαγώνιες τους διχοτομούνται). Επίσης το AM είναι διάμεσος ενός τριγώνου με πλευρές $\alpha, \alpha, \alpha\sqrt{3}$, όπου $\alpha\sqrt{3}$ είναι η διαγώνιος του ρόμβου που αποτελείται από το μωβ και το κίτρινο τρίγωνο. Από το 1ο θεώρημα διαμέσου για το παραπάνω τρίγωνο προκύπτει ότι $AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Άρα, $AB = \sqrt{7}$.

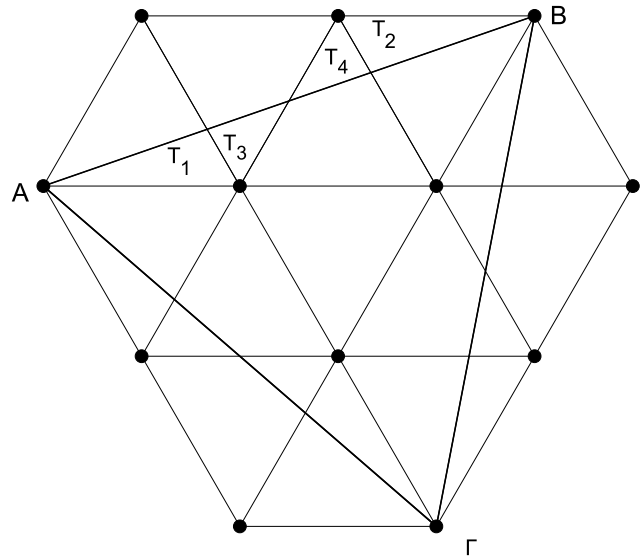
Λύση 4 Νίκος Μαυρογιάννης



Συμπληρώνουμε με μερικά ακόμη ισοπλευρά και βρίσκουμε $(AB)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 = 2^2 + \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 + 3 = 7$ επομένως $AB = \sqrt{7}$

Λύση 5 Νίκος Μαυρογιάννης

Συμπληρώνουμε με μερικά ισοπλευρά όπως στο σχήμα.



Από τις ισότητες $T_1 = T_2, T_3 = T_4$ βλέπουμε ότι το ισοπλευρο ABΓ έχει εμβαδόν 7-πλάσιο του εμβαδού του μικρού ισοπλεύρου. Άρα $\frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = 7 \frac{1^2 \sqrt{3}}{4}$ άρα $(AB) = \sqrt{7}$.

Λύση 6 Ανδρέας Πούλος

Στα τέσσερα ισοπλευρά τρίγωνα προσθέτουμε και ένα πέμπτο. Έτσι, έχει σχηματιστεί ένα ισοσκελές τραπέζιο, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και έχει ίσες διαγωνίες (της μίας από αυτές ζητάμε το μήκος). Οι πλευρές του τραπέζιου έχουν μήκος $2\alpha, \alpha, 3\alpha, \alpha$. Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα Πτολεμαίου για εγγεγραμμένα τετράπλευρα έχουμε: $3\alpha \cdot 2\alpha + \alpha \cdot \alpha = x \cdot x$, άρα $7\alpha^2 = x^2 \Rightarrow x = \alpha\sqrt{7}$.

Λύση 7 Ανδρέας Πούλος

Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης που βασίζεται στη μέθοδο των εμβαδών. Ονομάζουμε Γ την κάτω δεξιά κορυφή του τελευταίου τριγώνου του αρχικού σχήματος και α το μήκος της πλευράς κάθε ισοπλευρού τριγώνου. Από τον τύπο του εμβαδού τριγώνου έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{2\alpha \cdot \alpha \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2}, (1).$$

Από τον τύπο του Ήρωνα για το εμβαδόν τριγώνου έχουμε $(AB\Gamma) = \sqrt{t(t-a)(t-2a)(t-x)}$ και με δεδομένο ότι η ημιπερίμετρος t του τριγώνου ABΓ ισούται με $t = \frac{3a+x}{2}$, παίρνουμε τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{\sqrt{(9a^2-x^2)(x^2-a^2)}}{4} (2)$$

με $x > 3\alpha$.

Οι τύποι (1) και (2) μας οδηγούν στην αλγεβρική εξίσωση $x^4 - 10a^2x^2 + 21a^4 = 0$, η οποία έχει δύο λύσεις τις $x^2 = 3a^2$ και $x^2 = 7a^2$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η $x^2 = 7a^2$ λόγω του περιορισμού, δηλαδή έχουμε $x = \alpha\sqrt{7}$.

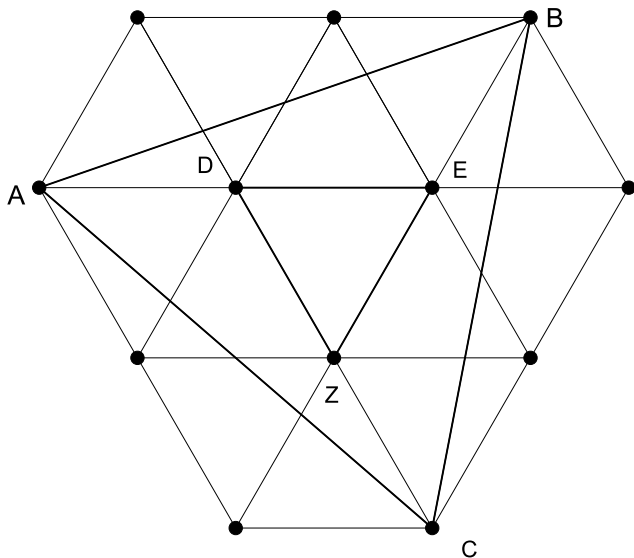
Λύση 8 Ανδρέας Πούλος

Μία άλλη προσέγγιση της άσκησης σύμφωνα με την διδακτέα ύλη της Β' Λυκείου, είναι αυτή που βασίζεται στο αποκαλούμενο θεώρημα του Euler: «Σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του» Υπόψη το θέμα αυτό υπάρχει και ως άσκηση

μέτρων μιγαδικών αριθμών στο βιβλίο Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου. Ξεκινάμε λοιπόν. Ως παραλληλόγραμμο θεωρούμε το σχήμα που αποτελείται από τα τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα. Οι πλευρές του έχουν μήκη α και 2α και η μία διαγώνιος (η μικρή) έχει μήκος $\alpha\sqrt{3}$, αφού είναι διπλάσια από το ύψος ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α . Σύμφωνα με το θεώρημα Euler έχουμε: $2\alpha^2 + 2(2\alpha)^2 = (\alpha\sqrt{3})^2 + x^2 \Rightarrow 10\alpha^2 = 3\alpha^2 + x^2 \Rightarrow 7\alpha^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{7}$.

Λύση 9 Κώστας Βήττας

Μία παραλλαγή της δεύτερης λύσης του Νίκου Μαυρογιάννη.



Προκύπτει εύκολα ότι $(ABC) = 7(DEF)$, αφού κάθε ένα



ΑΣΚΗΣΗ 17 Μάκης Χατζόπουλος

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=3019>

Έστω AD διχοτόμος τριγώνου $AB\Gamma$. Αν ισχύει η ισότητα

$$(\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}) \cdot \vec{A\Gamma} = (\vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma}) \cdot \vec{AB}$$

βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

Λύση Αλέξανδρος Συγκελάκης-Μάκης Χατζόπουλος

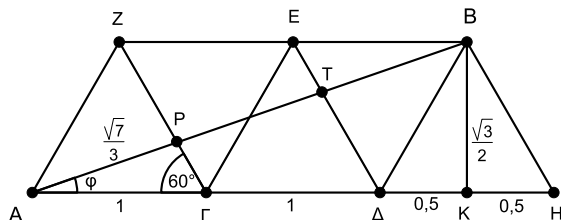
$\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = \lambda$ και $\vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma} = \mu$ οπότε η δεδομένη σχέση γίνεται: $\lambda \cdot \vec{A\Gamma} = \mu \cdot \vec{AB}$ (που είναι βασική άσκηση: $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta}$ αν $\vec{\alpha}$ μη παράλληλο στο $\vec{\beta}$, τότε $\lambda = \mu = 0$).

από τα τρίγωνα $\triangle ABE$, $\triangle BCZ$, $\triangle CAD$, έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου που συνθέτουν τα τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα της εκφώνησης.

Ισχύει δηλαδή $(ABE) = (BCZ) = (CAD) = 2(DEZ)$.

Επειδή τώρα ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων, ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας (= το τετράγωνο του λόγου των ομολόγων πλευρών τους), έχουμε ότι $\frac{(ABC)}{(DEZ)} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2} = 7 \Rightarrow AB = \sqrt{7}$, (γιατί $DE = 1$) και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

Λύση 10 Γιώργος Ρίζος



Η AB τριχοτομείται από τις $Z\Gamma$ και ΔE στο παραλληλόγραμμο $A\Delta BZ$ (τετριμμένη άσκηση της Γεωμετρίας Α' Λυκείου). Οπότε $AP = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Στο ABK είναι $\eta\mu\phi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Στο τρίγωνο $AP\Gamma$ (από Νόμο Ημιτόνων) είναι $\frac{AP}{\eta\mu 60^\circ} =$

$$\frac{\Gamma P}{\eta\mu\phi} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\Gamma P}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}} \Leftrightarrow \Gamma P = \frac{1}{3}, \text{ οπότε } ZP = 2\Gamma P$$

Σημείωση: Δύο ακόμη λύσεις πρότείνουν οι Μιχάλης Νάννος και Νίκος Μαυρογιάννης

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγεωργιάκης

Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{A\Gamma} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \vec{AB}$ δηλαδή $\vec{A\Gamma} // \vec{AB}$ που είναι άτοπο, άρα πρέπει $\lambda = 0$.

Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $\mu = 0$, οπότε άρα $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ άρα $AB \perp A\Gamma$ και $\vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ άρα $AD \perp B\Gamma$. Δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 18 Χρήστος Λώλης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=3569>

Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 6\mu$$

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 18\mu - 24$$

$$\text{και } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\mu^2,$$

τότε:

1. Να βρεθεί το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$.
2. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
3. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα.

Λύση

1. Χρήστος Λαζαρίδης

$$\begin{aligned} 6\mu^2 &= |3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = |(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})| \\ &\leq |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| \leq 24\mu - 24 \Rightarrow \\ 6\mu^2 - 24\mu + 24 &\leq 0 \Rightarrow 6(\mu - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow \mu = 2 \\ \text{Άρα } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| &= 8 \end{aligned}$$

2. Έλενα Φακιδαράκη

$$\begin{aligned} \text{Για } \mu = 2 \text{ από το α ερώτημα έχουμε: } |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| &= 12, |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 12, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 8 \\ |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| &= 12 \Rightarrow |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 144 \Rightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 144 \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 &= 144 \quad (1) \quad |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 12 \Rightarrow \\ |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 &= 144 \Rightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = 144 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 144 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από τις (1) και (2): } 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 &= \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Rightarrow 3\vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 \Rightarrow \\ |\vec{\alpha}|^2 &= |\vec{\beta}|^2 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \quad (3) \end{aligned}$$

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 8 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 64 \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 64 \xrightarrow{\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2} 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 64 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} = 32$$

$$(1) \xrightarrow{\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2} 5\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 144$$

$$\begin{aligned} \text{Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν: } \vec{\alpha}^2 &= 16 \Rightarrow \\ |\vec{\alpha}|^2 &= 16 \Rightarrow |\vec{\alpha}| = 4 \end{aligned}$$

3. Έλενα Φακιδαράκη

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow |\vec{\alpha}| &= 4 = |\vec{\beta}| \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 8 = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \\ \text{άρα } \vec{\alpha} &\nearrow \nearrow \vec{\beta} \text{ και έχουν ίσα μέτρα οπότε είναι ίσα.} \end{aligned}$$

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 19 Σπύρος Καρδαμίτσης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=4737>

Ένα σώμα κινείται σ' ένα άξονα και η θέση του σε χρόνο $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = t(t - 4)^2 + 3$ όπου ο χρόνος t μετρείται σε sec και το $x(t)$ σε m. Να βρείτε:

1. Την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και την αρχική του ταχύτητα.
2. Τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο καθώς και την επιτάχυνση του σ' αυτές τις χρονικές στιγμές.
3. Πότε το σώμα κινείται προς την θετική κατεύθυνση και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση.
4. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος ελαχιστοποιείται.

Λύση Γιώργος Ρίζος

Η συνάρτηση θέσης του σώματος γράφεται: $x(t) = t^3 - 8t^2 + 16t + 3, t \geq 0$.

1. Η ταχύτητά του είναι: $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 16t + 16, t \geq 0$, η αρχική του ταχύτητα είναι: $v(0) = 16 \text{ m/sec}$

2. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο όταν $v(t) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \text{ sec} \quad \eta \quad t = 4 \text{ sec}$

Η επιτάχυνσή του δίνεται από τον τύπο: $a(t) = v'(t) = 6t - 16, t \geq 0$, οπότε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο, είναι: $a\left(\frac{4}{3}\right) = -8 \text{ m/sec}^2, a(4) = 8 \text{ m/sec}^2$

3. Το σώμα κινείται προς τα δεξιά όταν $v > 0$ και προς τα αριστερά όταν $v < 0$. Είναι: $v(t) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < \frac{4}{3} \quad \eta \quad t > 0 \text{ και } v(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < t < 4$, οπότε κινείται δεξιά όταν $t \in \left[0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$ και αριστερά όταν $t \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$.

4. Η ταχύτητα ελαχιστοποιείται όταν $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} \text{ sec}$.

Να διευκρινίσω ότι στο (4) δεν αναφερόμαστε στο μέτρο της ταχύτητας, η ελάχιστη τιμή του οποίου είναι ασφαλώς 0, όταν το σώμα είναι ακίνητο, αλλά στην ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $v(t)$ για $t \geq 0$.

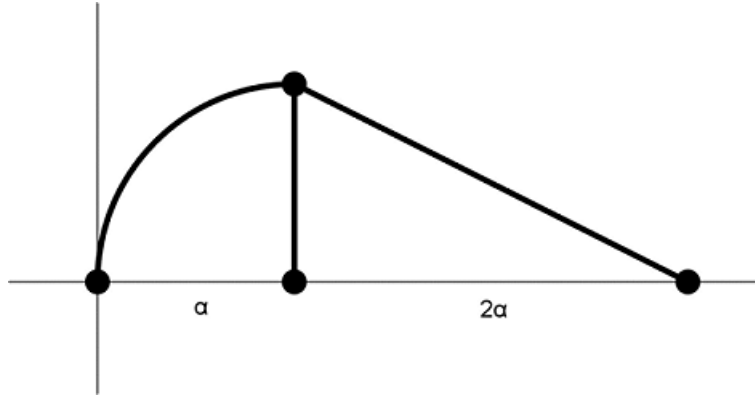
ΑΣΚΗΣΗ 20 Κώστας Τηλέγραφος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=439

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - (x - \alpha)^2}, & x \in [0, \alpha) \\ -\frac{x}{2} + \frac{3\alpha}{2}, & x \in [\alpha, 3\alpha] \end{cases}$$

1. Να δείξετε ότι η f συνεχής
2. Αν η γραφική της παράσταση είναι καμπύλη σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής να βρείτε την διάμεσο της κατανομής

Λύση Κώστας Τηλέγραφος-Βασίλης Μαυροφρύδης

1. Το πρώτο ερώτημα είναι απλό.

2. Για το δεύτερο ερώτημα, πρέπει το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου και του τριγώνου που σχηματίζονται να έχουν άθροισμα 1. Άρα

$$\frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{2} 2a \cdot a = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{4+\pi} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{4+\pi}}{4+\pi}$$

$$E_{\tau\epsilon\tau\alpha\rho\tau} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$E_{\tau\rho\iota\gamma} = \frac{1}{2} 2a \cdot a = a^2 = \frac{4a^2}{4} > \frac{\pi a^2}{4} = E_{\tau\epsilon\tau\alpha\rho\tau}$$

Αυτό σημαίνει ότι η διάμεσος θα είναι εσωτερικό σημείο του $[\alpha, 3\alpha]$. Φέρουμε την ευθεία $x = \delta$ στο σχήμα. Εάν ονομάσουμε v το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά με μήκος $3\alpha - \delta$ και κάνουμε ομοιότητα τριγώνων έχουμε

$$v = \frac{3\alpha - \delta}{2}$$

Πρέπει το εμβαδό του τριγώνου να ισούται με $1/2$. Άρα $\frac{1}{2} (3\alpha - \delta) v = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\delta - 3\alpha)^2 = 2 \Leftrightarrow \delta = 3\alpha \pm \sqrt{2} \Rightarrow \delta = 3\alpha - \sqrt{2} \Leftrightarrow \delta = 3 \cdot \frac{2\sqrt{4+\pi}}{4+\pi} - \sqrt{2}$

Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

ΑΣΚΗΣΗ 21 math68

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=9819

Δίνεται στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση:

$$z^2 - (\Delta + 2)\sqrt{3}z + 5\Delta + 6 = 0$$

όπου Δ η διακρίνουσά της, η οποία έχει ρίζες μιγαδικές και μη πραγματικές.

1. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης.
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = z_1^{-2012} z_2^{-2015} + z_1^{-2015} z_2^{-2012}$$

3. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $a = z_1^{-2012} z_2^{-2015}$ και $b = z_1^{-2015} z_2^{-2012}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.

Λύση Δημήτριος Κατσιπόδας

1. Αρχικά επειδή οι εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες έχουμε $\Delta < 0$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα της $z^2 - \sqrt{3}(\Delta + 2)z + 5\Delta + 6 = 0$. Έχουμε $\Delta = 3\Delta^2 - 8\Delta - 12$ οπότε $\Delta = -1$ ή $\Delta = 4$ απορρίπτεται. Για $\Delta = -1$ η εξίσωση γίνεται $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$, η οποία έχει ρίζες τις $z_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

2. Έστω $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ και $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. (όμοια αν $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ και $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$) τότε έχουμε $z_1^3 = i$ και $z_2^3 = -i$ οπότε $K = z_1^{-2012} z_2^{-2015} + z_1^{-2015} z_2^{-2012} = \frac{1}{z_1^{2012} z_2^{2015}} + \frac{1}{z_1^{2015} z_2^{2012}} = \frac{z_1^3 + z_2^3}{z_1^{2015} z_2^{2015}} = \frac{i - i}{1^{2015}} = 0$

3. Επίσης $a = z_1^{-2012} z_2^{-2015} = \frac{1}{z_1^{2012} z_2^{2015}} = \frac{1}{z_1^{2012} z_2^{2012} z_2^3} = \frac{1}{z_2^3 (z_1 z_2)^{2012}} = \frac{1}{-i} = i$ και $\beta = z_1^{-2015} z_2^{-2012} = \frac{1}{z_1^{2015} z_2^{2012}} = \frac{1}{z_1^{2012} z_2^{2012} z_1^3} = \frac{1}{z_1^3 (z_1 z_2)^{2012}} = \frac{1}{i} = -i$

Οπότε η εικόνα του a είναι το $A(0, -1)$ και του β

το $B(0,1)$ τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 Νίκος Ζαφερόπουλος

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=10002>

Δίνεται ο μιγαδικός z με

$$|z - 4i| \leq 2$$

και

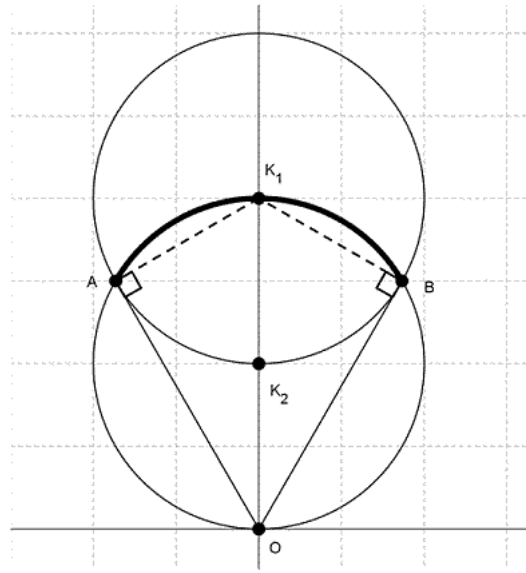
$$|z - 2i| = 2$$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου του z .

Λύση chris

Η σχέση $|z - 4i| \leq 2$ δηλώνει ότι οι εικόνες των z είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό ή στην περιφέρεια του κύκλου C_1 με κέντρο $K_1(0,4)$ και ακτίνα $R_1 = 2$. Η σχέση $|z - 2i| = 2$ δηλώνει ότι οι εικόνες των z είναι κύκλος κέντρου $K_2(0,2)$ και $R_2 = 2$. Άρα ο γ.τ του z προκύπτει από την συναλήθευση των δύο προηγούμενων και είναι όλα τα σημεία του τόξου $\widehat{AB}$

συμπεριλαμβανομένων και των A, B . Είναι $|z|_{\max} = (OK_1) = 4$ για $z = 4i$. Επίσης $|z|_{\min} = (OA) = (OB) = \sqrt{(OK_1)^2 - R_1^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$



Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 Φωτεινή Καλδή

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=2571>

Υπάρχουν συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι 1-1 και να ικανοποιούν την ανίσωση: $f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$;

Λύση giannis1990

Έστω λοιπόν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση ώστε $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , τότε βαζοντας διαδοχικά τις τιμές 0 και 1 στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε $f^2(1) - f(1) + \frac{1}{4} \leq 0$ και $f^2(0) - f(0) + \frac{1}{4} \leq 0$ με πρόσθεση των 2 τελευταίων έχω $(f(0) - \frac{1}{2})^2 + (f(1) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ άρα $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ όμως η f από την υπόθεση είναι 1-1 συνάρτηση άρα 1=0 ΑΤΟΠΟ

ΑΣΚΗΣΗ 24 Βασίλης Μαυροφρύδης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=2052>

Για κάθε πραγματικό αριθμό x διαφορετικό του 0 και του 1, ισχύει $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση Αλέξανδρος Συγκελάκης

Θέτουμε στην αρχική όπου x το $\frac{1}{1-x}$ (είναι επιτρεπτή αντικατάσταση σύμφωνα με τους περιορισμούς) και παίρνουμε:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2\frac{1-x^2}{x} \quad (1)$$

Θέτουμε και πάλι όπου x το $\frac{1}{1-x}$ στη σχέση (1) (είναι και πάλι επιτρεπτή η αντικατάσταση) και παίρνουμε:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) + f(x) = 2\frac{x(x-2)}{1-x} \quad (2)$$

Αν από τη σχέση (2) αφαιρέσουμε τη σχέση (1) παίρνουμε $f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -2\frac{x^2-x+1}{x(1-x)}$ και προσθέτοντάς την με την αρχική παίρνουμε $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ η οποία επαληθεύει την αρχική σχέση άρα είναι και η ζητούμενη συνάρτηση.



Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 Χρήστος Κυριαζής
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=1801>

Υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία να ισχύει: $f' = f \circ f$;

Λύση, Ροδόλφος Μπόρης

Δίνεται ότι $f(x) > 0$ για κάθε x στο $\mathbb{R}$. Θέτοντας όπου x το $f(x)$ παίρνουμε $f(f(x)) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ [1] Επειδή $f(x) > 0$ λόγω της [1] παίρνουμε $f(f(x)) > f(0) \Rightarrow f'(x) > f(0) \Rightarrow (f(x) - xf(0))' > 0 \Rightarrow f(x) - xf(0) \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ Αν πάρουμε $x < 0 \Rightarrow f(x) - xf(0) < f(0) - 0f(0) \Rightarrow f(x) < (1+x)f(0)$ για κάθε $x < 0$ [2] Επειδή όμως είχαμε $f(x) > 0 \Rightarrow f(0) > 0$. Έτσι για $x < -1$ λόγω της [2], καταλήγουμε σε αντίφαση

ΑΣΚΗΣΗ 26 Χρήστος Καρδάσης
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=2081>


Αν f συνεχής στο $[a, b]$, με $f(a) = a, f(b) = b$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε x που ανήκει στο (a, b) , να δείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε x στο $[a, b]$.

Λύση 1, Βασίλης Μαυροφρύδης

Η $g(x) = f(x) - x$ είναι φθίνουσα $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow g(\alpha) \geq g(\beta) \Leftrightarrow g(x) \geq g(\beta) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x, \forall x \in [\alpha, \beta]$

Λύση 2, Βασίλης Μαυροφρύδης

Έστω ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = k \neq x_0$. Αν $k > x_0$ τότε με ΘΜΤ στο $[a, x_0]$ έχουμε $f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{k - a}{x_0 - a} \leq 1 \Leftrightarrow k \leq x_0$ άτοπο Αν $k < x_0$ τότε με ΘΜΤ στο $[x_0, b]$ έχουμε $f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{b - k}{b - x_0} \leq 1 \Leftrightarrow k \geq x_0$ άτοπο Άρα για κάθε $x_0 \in [a, b]$ είναι $f(x_0) = x_0$, δηλαδή $f(x) = x$

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοιρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 Βασίλης Μαυροφρύδης
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=8057&p=46212>

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx$, όπου $k \in (0, 1)$.

Λύση 1 Γιώργος Μανεάδης

Το ζητούμενο είναι

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{(1-k^2)+k^2 \cos^2 x}} dx = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\frac{k^2}{1-k^2} \cos^2 x}} dx$$

Θέτουμε $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \cos x = \tan u$, οπότε $u \in [0, \theta]$, όπου θ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $(0, \pi/2)$ για τον οποίο $\tan \theta = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \in (0, +\infty)$. Άρα

$$I = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \frac{1}{\cos^2 u} du = \frac{1}{k} \int_0^\theta \frac{\cos u}{\cos^2 u} du = \frac{1}{k} \int_0^\theta \frac{\cos u}{1-\sin^2 u} du = -\frac{1}{2k} \int_0^\theta \frac{\cos u}{\sin u - 1} du = -\frac{1}{2k} \ln \frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}$$

Όμως $\tan^2 \theta = \frac{k^2}{1-k^2} \Leftrightarrow \sin \theta = k$ και τελικά

$$I = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}$$

Λύση 2 Βασίλης Μαυροφρύδης

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\eta \mu x dx}{\sqrt{1-k^2+k^2 \sigma \nu^2 x}} & \stackrel{k \in (0,1)}{=} \\ \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{\eta \mu x dx}{\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2} + \sigma \nu^2 x}} & \stackrel{\sigma \nu x = t \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}}}{=} \\ \frac{1}{k} \int_0^{\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}} \frac{\eta \mu x dx}{\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2} + \sigma \nu^2 x}} & \stackrel{\eta \mu x dx = -\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dt}{=} \\ \frac{1}{k} \int_0^{\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}} \frac{\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} dt}{\sqrt{\frac{1-k^2}{k^2} + \frac{1-k^2}{k^2} t^2}} & = \\ \frac{1}{k} \int_0^{\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & = \\ \frac{1}{k} \left[\ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]_0^{\sqrt{\frac{k^2}{1-k^2}}} & = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 xgastone

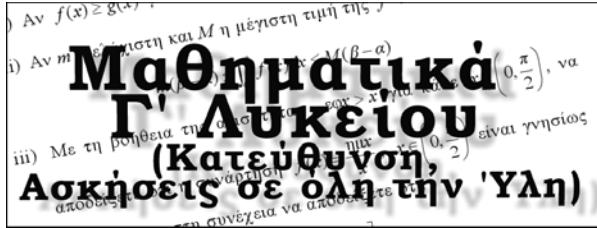
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=8003>

Έστω συναρτησής f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f(\pi/2) = 0$ και για την οποία ισχύει $f'(x) = -(1 + f^2(x))$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Λύση Βασίλης Μαυροφρύδης

Ισχύει

$$f'(x) = -(1 + f^2(x)) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = 1$$



Θέτουμε $f(x) = \sigma \varphi g(x)$ με $g(x), x$ να ανήκουν στο $(0, \pi)$ και $\sigma \varphi g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή έχουμε

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{\eta \mu^2 g(x)} \Rightarrow f'(x) = -(1 + \sigma \varphi^2 g(x)) g'(x) \Rightarrow f'(x) = -(1 + f^2(x)) g'(x) \Rightarrow -\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = g'(x) \Rightarrow$$

$1 = g'(x) \Rightarrow g(x) = x + c$ Για $x = \pi/2$ βρίσκουμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + c \Rightarrow \sigma \varphi g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma \varphi\left(\frac{\pi}{2} + c\right) \Rightarrow 0 = \varepsilon \varphi c \Rightarrow c = 0$ σύμφωνα με τους περιορισμούς που πρέπει να πληρεί η g

Άρα $f(x) = \sigma \varphi g(x) \Rightarrow f(x) = \sigma \varphi(x)$, η οποία επαληθεύει τη δοθείσα σχέση.

Επιμελητής: Θωμάς Ραϊκόφτσαλης

ΑΣΚΗΣΗ 29 Γιώργος Τσικαλουδάκης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&p=39775>

Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$ τέτοιες ώστε: $f(x) > 0, 0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις: F, G, H :

- $F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in [0, 1]$
- $G(x) = \int_0^x g(t) dt, x \in [0, 1]$
- $H(x) = \int_0^x f(t) G(t) dt, x \in [0, 1]$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1]$ ισχύει:

$$H(x) < F(x)G(x).$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει:

$$\frac{H(x)}{F(x)} < \frac{H(1)}{F(1)} < 1.$$

3. Αν $H(1) + \int_0^1 g(t) F(t) dt = F(1) + G(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = -\frac{1 - F(\xi)}{1 - G(\xi)}.$$

4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H^2(x)}{F(x) \cdot G(x)}$

Λύση Ροδόλφος Μπόρης

- $F(x) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα η F γνήσια αύξουσα στο $[0, 1]$ και επειδή $F(0) = 0$ έχει θετικές τιμές για κάθε $x \in (0, 1]$.

- $G(x) = \int_0^x g(t) dt \Rightarrow G'(x) = g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα η G γνήσια αύξουσα στο $[0, 1]$ και επειδή $G(0) = 0$ έχει θετικές τιμές για κάθε $x \in (0, 1]$.

- $H(x) = \int_0^x f(t)G(t) dt \Rightarrow H'(x) = f(x)G(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$, άρα η H γνήσια αύξουσα στο $[0, 1]$ και επειδή $H(0) = 0$ έχει θετικές τιμές για κάθε $x \in (0, 1]$.

1. Έστω η συνάρτηση $w(x) = H(x) - F(x)G(x)$, $x \in [0, 1]$, για την οποία έχουμε: $w'(x) = H'(x) - F'(x)G(x) - F(x)G'(x) = -g(x)F(x)$. Η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, 1]$, οπότε για $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > \int_0^0 f(t) dt \Rightarrow F(x) > 0$ και επειδή $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε τελικά ότι $w'(x) = -g(x)F(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$, οπότε η συνάρτηση w είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, 1]$ και αφού $w(0) = 0$ προκύπτει για $x > 0 \Rightarrow w(x) < w(0) \Rightarrow H(x) - F(x)G(x) < 0 \Rightarrow H(x) < F(x)G(x)$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

2. Έστω η συνάρτηση $u(x) = \frac{H(x)}{F(x)}, x \in (0, 1]$. Παραγωγίζοντας έχουμε: $u'(x) = \frac{H'(x)F(x) - H(x)F'(x)}{F^2(x)} = \frac{H'(x)F(x) - H(x)f(x)}{F^2(x)} = \frac{f(x)G(x)F(x) - H(x)f(x)}{F^2(x)} = \frac{f(x)(G(x)F(x) - H(x))}{F^2(x)} > 0$, άρα η συνάρτηση u είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, 1]$, οπότε για $x < 1$ έχουμε $u(x) < u(1) \Rightarrow \frac{H(x)}{F(x)} < \frac{H(1)}{F(1)}$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Όμως $H(x) < F(x)G(x)$ για κάθε $x \in (0, 1]$, άρα $H(1) < F(1)G(1)$. Δείξαμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι

γνήσια αύξουσα οπότε αφού $0 < 1 \Rightarrow F(0) < F(1) \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt < F(1) \Rightarrow 0 < F(1)$. Άρα η σχέση $H(1) < F(1)G(1)$ είναι ισοδύναμη (αφού $F(1) > 0$) με την $\frac{H(1)}{F(1)} < G(1)$. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $\Gamma(1)^1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $q(x) = G(x) - x$, $x \in [0, 1]$. Παραγωγίζοντας έχουμε $q'(x) = G'(x) - 1 \Rightarrow q'(x) = g(x) - 1$, όμως $0 < g(x) < 1 \Rightarrow g(x) - 1 < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα $q'(x) < 0$, με συνέπεια η συνάρτηση q να είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, 1]$, άρα $q(1) < q(0) \Rightarrow G(1) - 1 < G(0) - 0 \Rightarrow G(1) - 1 < \int_0^1 g(t)dt \Rightarrow G(1) < 1$, επομένως δείξαμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει: $\frac{H(x)}{F(x)} < \frac{H(1)}{F(1)} < 1$.

3. Θέτουμε $v(x) = (1 - F(x))(1 - G(x))$, $x \in [0, 1]$.

Έχουμε κατά σειρά τα εξής:

$$H(1) = \int_0^1 f(t)G(t)dt =$$

$$\int_0^1 F'(t)G(t)dt =$$

$$[F(x)G(x)]_0^1 - \int_0^1 F(t)G'(t)dt =$$

$$F(1)G(1) - \int_0^1 F(t)g(t)dt$$

$$F(1) + G(1) = H(1) + \int_0^1 g(t)F(t)dt \Rightarrow F(1) + G(1) =$$

$$F(1)G(1) - \int_0^1 F(t)g(t)dt + \int_0^1 g(t)F(t)dt \Rightarrow$$

$$F(1) + G(1) = F(1)G(1) \Rightarrow$$

$$F(1) + G(1) - F(1)G(1) - 1 = -1 \Rightarrow$$

$$F(1)(1 - G(1)) - (1 - G(1)) = -1 \Rightarrow$$

$$(1 - G(1))(F(1) - 1) = -1 \Rightarrow$$

$$(1 - G(1))(1 - F(1)) = 1,$$

επομένως $v(1) = (1 - F(1))(1 - G(1)) = 1$ και επειδή είναι και $v(0) = (1 - F(0))(1 - G(0)) = 1$.

4. Για τη συνάρτηση $v(x) = (1 - F(x))(1 - G(x))$, $x \in [0, 1]$ ισχύει το θεώρημα του Rolle, άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$v'(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$v(x) = (1 - F(x))(1 - G(x)) \Rightarrow (1 - F(x))'(1 - G(x)) + (1 - F(x))(1 - G(x))' = 0 \Rightarrow$$

$$-F'(\xi)(1 - G(\xi)) - (1 - F(\xi))G'(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$-F'(\xi) + F'(\xi)G(\xi) - G'(\xi) + F(\xi)G'(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$-f(\xi) + f(\xi)G(\xi) = g(\xi) - F(\xi)g(\xi) \Rightarrow$$

$$-f(\xi)(1 - G(\xi)) = g(\xi)(1 - F(\xi)) \Rightarrow$$

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = -\frac{1-F(\xi)}{1-G(\xi)}$$

5. Δείξαμε ότι η συνάρτηση $q(x) = G(x) - x$, $x \in [0, 1]$ είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, 1]$, άρα για $x > 0 \Rightarrow g(x) < q(0) \Rightarrow G(x) - x < 0 \Rightarrow G(x) < x$, $x \in [0, 1]$. Αν M το μέγιστο της φ στο $[0, 1]$

$$\text{τότε: } \begin{cases} 0 \leq f(t) \leq M \\ 0 \leq G(t) \leq x \end{cases} \text{ για κάθε } t \in [0, 1] \text{ οπότε}$$

έχουμε: $f(t) \cdot G(t) \leq M \cdot t$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και ολοκληρώνοντας έχουμε: $\int_0^x f(t) \cdot G(t)dt \leq$

$\int_0^x M \cdot tdt \Rightarrow H(x) \leq M \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$. Ισχύει για κάθε $x \in (0, 1]$: $H(x) < F(x)G(x)$ και επειδή οι όροι είναι θετικοί έχουμε: $\frac{H(x)}{F(x)G(x)} < 1 \Rightarrow \frac{H(x)}{F(x)G(x)} \cdot H(x) < H(x) \Rightarrow \frac{(H(x))^2}{F(x)G(x)} < H(x)$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση: $0 < \frac{(H(x))^2}{F(x)G(x)} < H(x) \leq M \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x \in (0, 1]$, δηλαδή: $0 < \frac{(H(x))^2}{F(x)G(x)} \leq M \frac{x^2}{2}$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} M \frac{x^2}{2} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε τελικά ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H^2(x)}{F(x) \cdot G(x)} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 30 Νίκος Μαυρογιάννης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=429>

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \alpha)^\nu (\beta - x)^\mu$$

$x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha < \beta$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\nu}{x - \alpha} + \frac{\mu}{x - \beta}$$

2. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[\alpha, \beta]$ και ότι το ξ που μηδενίζει την f' είναι το $\xi = \frac{\mu}{\nu + \mu}\alpha + \frac{\nu}{\nu + \mu}\beta$.

3. Έστω $I(\nu, \mu) = \int_\alpha^\beta f(x) dx$. Να δείξετε ότι

$$I(\nu, \mu) = \frac{\mu}{\nu + 1} I(\nu + 1, \mu - 1)$$

4. Αν μ, ν άρτιοι φυσικοί, να υπολογίσετε συναρτήσεων α, β, ν, μ , το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται: από την C_f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$

Λύση Φωτεινή Καλδή

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^\nu (\beta - x)^\mu$, η οποία είναι συνεχής, στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο:

$$f'(x) = \nu(x - \alpha)^{\nu-1}(\beta - x)^\mu - \mu(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^{\mu-1}.$$

Για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(x) \neq 0$, οπότε έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\nu(x - \alpha)^{\nu-1}(\beta - x)^\mu - \mu(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^{\mu-1}}{(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^\mu} =$$

$$\frac{\nu(x - \alpha)^{\nu-1}(\beta - x)^\mu}{(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^\mu} - \frac{\mu(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^{\mu-1}}{(x - \alpha)^\nu(\beta - x)^\mu} =$$

$$\frac{\nu}{(x - \alpha)} - \frac{\mu}{(\beta - x)}$$

2. Είναι προφανές ότι $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, οπότε αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει για αυτή το θεώρημα του Rolle, με συνέπεια να υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\nu(\xi - \alpha)^{\nu-1}(\beta - \xi)^\mu - \mu(\xi - \alpha)^\nu(\beta - \xi)^{\mu-1} = 0 \Rightarrow \nu(\xi - \alpha)^{\nu-1}(\beta - \xi)^\mu = \mu(\xi - \alpha)^\nu(\beta - \xi)^{\mu-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \nu(\beta - \xi) &= \mu(\xi - \alpha) \Rightarrow \nu\beta - \nu\xi = \mu\xi - \mu\alpha \Rightarrow \\ -\mu\xi - \nu\xi &= -\nu\beta - \mu\alpha \Rightarrow -\xi(\mu + \nu) = -(\nu\beta + \mu\alpha) \Rightarrow \\ \xi &= \frac{\mu\alpha + \nu\beta}{\mu + \nu} \Rightarrow \xi = \frac{\mu}{\nu + \mu}\alpha + \frac{\nu}{\nu + \mu}\beta \end{aligned}$$

3. Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

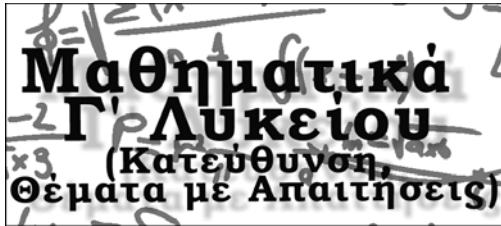
$$\begin{aligned} I(\nu, \mu) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \\ \int_{\alpha}^{\beta} [(x - \alpha)^{\nu} (\beta - x)^{\mu}] dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(x - \alpha)^{\nu+1}}{\nu+1} \right)' (\beta - x)^{\mu} dx = \\ \left[\frac{(x - \alpha)^{\nu+1}}{\nu+1} (\beta - x)^{\mu} \right]_{\alpha}^{\beta} - \\ \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{(x - \alpha)^{\nu+1}}{\nu+1} \right) \mu (\beta - x)^{\mu-1} (\beta - x)' dx &= \\ \frac{\mu}{\nu+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{\nu+1} (\beta - x)^{\mu-1} dx &= \frac{\mu}{\nu+1} I(\nu+1, \mu-1) \end{aligned}$$

4. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον αναγωγικό τύπο έχουμε:

$$\begin{aligned} I(\nu, \mu) &= \frac{\mu}{\nu+1} I(\nu+1, \mu-1) = \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot I(\nu+2, \mu-2) &= \dots = \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot I(\nu+\mu, 0) &= \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{\nu+\mu} (\beta - x)^0 dx &= \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot \left[\frac{(x - \alpha)^{\nu+\mu+1}}{\nu+\mu+1} \right]_{\alpha}^{\beta} &= \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot \frac{(\beta - \alpha)^{\nu+\mu+1}}{\nu+\mu+1} &= \\ \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot \frac{1}{\nu+\mu+1} \cdot (\beta - \alpha)^{\nu+\mu+1} \end{aligned}$$

Αν μ, ν άρτιοι φυσικοί έχουμε $f(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E_{\Omega} &= \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = I(\nu, \mu) = \\ &= \frac{\mu}{\nu+1} \cdot \frac{\mu-1}{\nu+2} \cdot \frac{\mu-2}{\nu+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\nu+\mu} \cdot \frac{1}{\nu+\mu+1} \cdot (\beta - \alpha)^{\nu+\mu+1} \end{aligned}$$



Επιμελητής: Κωνσταντίνος Σερίφης

ΑΣΚΗΣΗ 31 Σωτήρης Λουρίδας

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=52685#p52685>

Δίδονται οι αριθμοί $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| \neq 0$. Να ληθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το σύστημα:

$$\begin{cases} xy = z_1 \\ x\bar{y} = z_2 \end{cases}$$

Λύση 1 Θωμάς Ραϊκόφτοαλης

$$\begin{cases} xy = z_1 \\ x\bar{y} = z_2 \end{cases}, |z_1| = |z_2| = \rho > 0, x, y, z_1, z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{\bar{y}} = \frac{z_1}{z_2} \quad (1).$$

$$\begin{cases} xy = z_1 \\ \bar{x}\bar{y} = \bar{z}_2 \end{cases}, |z_1| = |z_2| = \rho > 0, x, y, z_1, z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{\bar{x}} = \frac{z_1}{\bar{z}_2} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι η κάθε μια άμεσα επιλύσιμη, οπότε βρίσκουμε τους μιγαδικούς x, y .

Λύση 2 Κωνσταντίνος Σερίφης

Αφού x, y δεν είναι 0, το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\left(y = \frac{z_1}{x}, \frac{x}{\bar{x}} = \frac{z_2}{\bar{z}_1} \right)$ Περιπτώσεις:

α. Αν $z_2 = -\bar{z}_1$ τότε $\bar{x} = -x$ και συνεπώς $(x, y) = \left(ai, -\frac{z_1}{a}i \right)$ με $a \in \mathbb{R}^*$

β. Αν $z_2 \neq -\bar{z}_1$ τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \left(y = \frac{z_1}{x}, \frac{x}{\bar{x} + x} = \frac{z_2}{\bar{z}_1 + z_2} \right) &\Leftrightarrow \\ \left(y = \frac{z_1}{x}, \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Im} x}{2\operatorname{Re} x} i = \frac{z_2}{\bar{z}_1 + z_2} \right). \end{aligned}$$

Είναι $\frac{\operatorname{Im} x}{\operatorname{Re} x} = \left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2 + z_1} - \frac{z_2}{z_2 + \bar{z}_1} \right) i$ το οποίο, με τη βοήθεια της ισότητας των μέτρων, είναι $\frac{\operatorname{Im} x}{\operatorname{Re} x} = \frac{\bar{z}_1 - z_2}{\bar{z}_1 + z_2} i$

Έτσι, αν $\operatorname{Re} x = a$ τότε: $\operatorname{Im} x = \frac{\bar{z}_1 - z_2}{\bar{z}_1 + z_2} ai$, με $a \in \mathbb{R}^*$
Από αυτό το σημείο εύκολα προκύπτει ότι: $(x, y) = \left(\frac{2az_2}{\bar{z}_1 + z_2}, \frac{z_1 + \bar{z}_2}{2a} \right)$ με $a \in \mathbb{R}^*$

ΑΣΚΗΣΗ 32 Στράτος Παπαδόπουλος

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=26850#p26850> Να

βρεθεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $f(x) > 0$ και

$$f(x) = x + \int_x^{f(x)} \frac{\eta \mu t}{2t} dt$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Λύση 1 Δημήτρης Σκούτερης

Γράφουμε $f(x) - \int_1^{f(x)} \frac{\sin t}{2t} dt = x - \int_1^x \frac{\sin t}{2t} dt$.
Ονομάζουμε g τη συνάρτηση του δεύτερου μέλους και έχουμε $g'(x) = 1 - \frac{\sin x}{2x} > 0, \forall x > 0$.

Κατά συνέπεια η g είναι 1-1 (ως γν. αύξουσα) και αφού $g[f(x)] = g(x)$ για κάθε x , ισχύει $f(x) = x, x > 0$. Επαληθεύουμε ότι όντως ισχύει.

Λύση 2 Βασίλης Μαυροφρύδης

Ξέρουμε ότι $|\eta \mu x| < |x|, \forall x \neq 0 \Rightarrow -1 < \frac{\eta \mu x}{x} < 1, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{\eta \mu x}{2x} < \frac{1}{2} < 1, \forall x > 0$, σχέση (1)

Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_a^x \frac{\eta \mu t}{2t} dt, a, t, x \in$

$(0, +\infty)$. Η δοθείσα σχέση μετασχηματίζεται στην $f(x) = x + g(f(x)) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - x = g(f(x)) - g(x)$, σχέση (2)

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq x_0$, τότε στο διάστημα που ορίζουν οι $f(x_0), x_0$ από Θ.Μ.Τ. για την g , έχουμε την ύπαρξη ενός τουλάχιστον ξ , τέτοιου ώστε $g'(\xi) = \frac{g(f(x_0)) - g(x_0)}{f(x_0) - x_0} \Rightarrow$

$\frac{g(f(x_0)) - g(x_0)}{f(x_0) - x_0} = 1$, άτοπο από σχέση (1) άρα $f(x) = x, x > 0$.

Λύση 3 Μιχάλης Λάμπρου



$$|f(x) - x| = \left| \int_x^{f(x)} \frac{g(t)}{2t} dt \right| \leq$$

$\int_x^{f(x)} \left| \frac{g(t)}{2t} \right| dt \leq \int_x^{f(x)} \frac{1}{2} dt \leq \frac{1}{2} |f(x) - x|$ Από τη σχέση αυτή εύκολα προκύπτει το ζητούμενο.

Σημείωση: Η προϋπόθεση $f(x) > 0$ δεν είναι απαραίτητη.

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 33 Κώστας Καπένης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=8906&start=0>
Ποιός τετραψήφιος όταν πολλαπλασιαστεί με το 9 δίνει αποτέλεσμα τον αριθμό με αντεστραμμένα τα ψηφία του;

Λύση stavros11

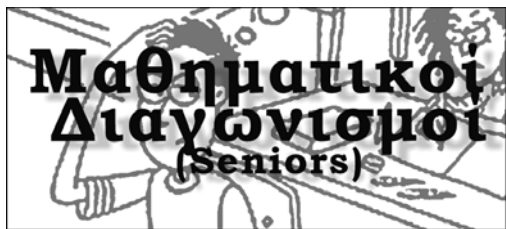
Έστω $A = \overline{abcd} \in N$ ο αριθμός.

Ισχύει: $9A = \overline{dcba} \Rightarrow 9\overline{abcd} = \overline{dcba}$ με $a \neq 0, d \neq 0$

Επειδή όμως από τετραψήφιο καταλήγουμε σε τετραψήφιο, ο A είναι μικρότερος ή ίσος με το 1111 (αφού $1112 \cdot 9$ είναι πενταψήφιος). Έτσι μαζί με τα παραπάνω για τα ψηφία a και d καταλήγουμε ότι: $1001 \leq A \leq 1111$
Άρα $a = 1$ και από τον πολλαπλασιασμό $d = 9$.

Το b με βάση το παραπάνω μπορεί να είναι ή 0 ή 1.

Έχουμε επίσης ότι ο αριθμός $\overline{dcba}$ είναι πολλαπλάσιο του 9 (αφού είναι $\overline{dcba} = 9A$ με $A \in N$), που σημαίνει ότι το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται από το 9. Άρα έχουμε τη σχέση $9/a + b + c + d$. Αντικαθιστώντας: $9/10 + b + c$. Αν $b = 1$ τότε $c = 7$ και $A = 1179$. Αυτό είναι άτοπο,



ΑΣΚΗΣΗ 35 Αντώνης Κυριακόπουλος

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=895&start=0>
Να βρείτε πόσες το πολύ πλευρές μπορεί να έχει ένα κυρτό πολύγωνο (με περισσότερες από τρεις πλευρές), των οποίων το μήκος να είναι ίσο με το μήκος της μεγαλύτερης διαγωνίου του πολυγώνου αυτού.

Λύση 1 Δημήτρης Σκουτέρης

γιατί ήδη ξέρουμε ότι $A < 1112$.

Άρα $b = 0, c = 8$ και $A = 1089$. Ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο 1089 αφού $1089 \cdot 9 = 9801$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 Κώστας Καπένης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=8079&start=0>

Θέμα από Ινδία: 'Αν a, b, c πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους, τέτοιοι, ώστε: $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = t, t \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι: $t = -abc$

Λύση chris

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει } t + abc &= a + \frac{1}{b} + abc = \frac{ab^2c + ab + 1}{b} = \\ \frac{abc(b + \frac{1}{c}) + 1}{b} &= \frac{abct + 1}{b} \quad (1) \end{aligned}$$

Δουλεύοντας κυκλικά λαμβάνουμε την εξής ισότητα:

$$\frac{abct + 1}{b} = \frac{abct + 1}{a} = \frac{abct + 1}{c}$$

Όμως για να ισχύει η ισότητα και λαμβάνοντας υπόψη ότι $a \neq b \neq c \neq 0$ πρέπει $abct = -1$ και άρα λόγω της (1) έχουμε το ζητούμενο.

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Έστω ξένες μεταξύ τους πλευρές $AB, \Gamma\Delta$ στο πολύγωνο ίσες με τη μέγιστη διαγώνιο, τέτοιες ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι κυρτό. Αφού τουλάχιστον μια από τις γωνίες του κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι μη οξεία, το τετράπλευρο (και το πολύγωνο) θα έχει μια διαγώνιο μεγαλύτερη από το μήκος AB , οπότε έχουμε άτοπο.

Έτσι, οι πλευρές του πολυγώνου μας με μήκος ίσο με αυτό της μέγιστης διαγωνίου δε μπορούν να είναι ξένες

μεταξύ τους. Οπότε, αν υπάρχουν τρεις απο αυτές, το πολύγωνο θα πρέπει να είναι τρίγωνο (αποκλείεται). Άρα, μπορούν να υπάρχουν το πολύ δύο και πρέπει να έχουν κοινή κορυφή.

Αν πάρουμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ επι της μεσοκαθέτου της $B\Gamma$, όχι στο ημιεπίπεδο του A , με $AD = AB = AG$ έχουμε ένα τέτοιο τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$.

Λύση 2 Αντώνης Κυριακόπουλος

Έστω ότι τα μήκη δύο μη διαδοχικών πλευρών AB και MN ενός κυρτού πολυγώνου είναι ίσα με το μήκος, έστω δ , της μεγαλύτερης διαγωνίου του πολυγώνου αυτού. Έχουμε $AB = \delta \geq AM$ και $MN = \delta \geq BN$. Έτσι έχουμε $AB + MN \geq AM + BN$ (1).

Αλλά, αν O είναι το σημείο τομής των AB και MN , τότε από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε $AB + MN < (AO + BO) + (OM + ON)$, δηλαδή: $AB + MN < AM + BN$, άτοπο λόγω της (1). Άρα αυτό μπορεί να συμβαίνει για δύο, και μόνο δύο, διαδοχικές πλευρές του πολυγώνου. Συνεπώς, ένα (κυρτό) πολύγωνο μπορεί να έχει το πολύ δύο τέτοιες πλευρές.

Σημείωση. Τέτοιο (κυρτό) πολύγωνο με ν πλευρές υπάρχει για κάθε $\nu > 3$.



ΑΣΚΗΣΗ 37 Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 2010

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=33045>

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$ και $B\Gamma = \beta$. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AO$ και την διαγώνιο ΔB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = BO$. Αν το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

- (i) $\beta = \alpha\sqrt{3}$
- (ii) $AZ = EO$
- (iii) $EO \perp Z\Delta$

Λύση 1 Σταυρουλίτσα

Αρχικά τα τρίγωνα $EA\Gamma$ και $OZ\Gamma$ είναι ίσα ($Z\Gamma = E\Gamma$, $AE = O\Gamma$ και $OZ = A\Gamma$). Επομένως έχουμε $E\hat{A}\Gamma = Z\hat{O}\Gamma$ και $AE = AO = OB = O\Gamma$, άρα τα τρίγωνα EAO και $BO\Gamma$ είναι επίσης ίσα. Συνεπάγεται ότι $A\hat{\Gamma}B = B\hat{E}O$ και $A\hat{B}O = O\hat{B}A$ και $AO = BO$, άρα τα τρίγωνα EOB και $AB\Gamma$ είναι ίσα. Άρα $OB = AB = AO$ και το τρίγωνο AOB είναι ισόπλευρο.

ΑΣΚΗΣΗ 36 Μιχάλης Λάμπρου

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=51&start=0>

Έστω $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού. Μπορείτε να προτείνετε κάποιον τρόπο ώστε αλληλάζοντας την σειρά των ψηφίων του $a_1, a_2, a_3, \dots$ να προκύψει ρητός αριθμός;

Σχόλιο Νίκος Μαυρογιάννης

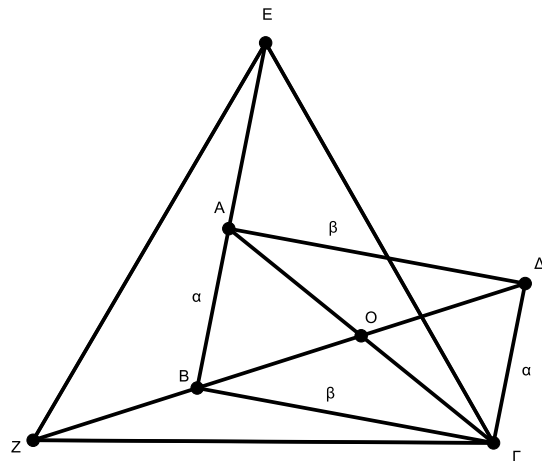
Το προτεινόμενο πρόβλημα μπορεί να συνδυαστεί διδακτικά με το γνωστό παράδοξο για το ξενοδοχείο του Hilbert.

Λύση Κώστας Σερίφης

Τα ψηφία $a_1, a_2, a_3, \dots$, παίρνουν τιμές από το σύνολο $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Είναι προφανές ότι αυτά, στο ανάπτυγμα του αριθμού, επαναλαμβάνονται είτε άπειρες φορές είτε περιορισμένο αριθμό φορές. Στις πρώτες θέσεις του αναπτύγματος του αριθμού τοποθετούμε τα ψηφία, εφόσον υπάρχουν, που επαναλαμβάνονται περιορισμένο αριθμό φορές. Αν $b_1, b_2, \dots, b_n$ με $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ τα ψηφία που επαναλαμβάνονται άπειρες φορές, τότε τα τοποθετούμε με την εξής σειρά: $b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$. Ο αριθμός που προκύπτει είναι περιοδικός με περίοδο $b_1 b_2 \dots b_n$ και συνεπώς ρητός.

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

Και με το Πυθαγόριο Θεώρημα βρίσκουμε ότι $a^2 + \beta^2 = (2a)^2 \Rightarrow \beta^2 = 3a^2 \Rightarrow \beta = a\sqrt{3}$ αλλά συγχρόνως αποδείξαμε ότι $EO \perp Z\Delta$. Και στο (ii) έχουμε τα τρίγωνα BOE και OZA ίσα επειδή $EB = OZ$, $AB = OB$ και $A\hat{O}B = O\hat{B}A$.

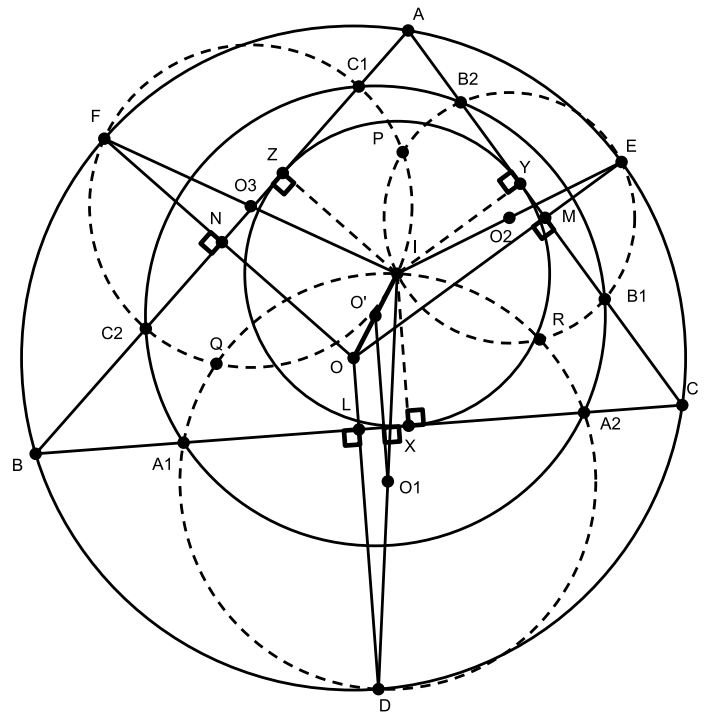


Λύση 2 Γιώργος Ρίζος

(i) Τα $\triangle O\Gamma Z$ και $\triangle E\Lambda\Gamma$ έχουν: $OZ = \Lambda\Gamma$, $O\Gamma = \Lambda E$ και $Z\Gamma = E\Gamma$, αφού το $\triangle Z\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. Είναι ίσα, οπότε $\widehat{E\Gamma\Lambda} = \widehat{\Gamma Z O}$ (ως απέναντι των $O\Gamma = \Lambda E$). Τότε $\widehat{\Gamma Z O} + \widehat{O\Gamma Z} = \widehat{E\Gamma\Lambda} + \widehat{O\Gamma Z} = \widehat{Z\Gamma E} = 60^\circ$, αφού $\triangle Z\Gamma E$ ισόπλευρο τρίγωνο. Άρα $\widehat{Z O \Gamma} = 120^\circ$. Στο ισοσκελές $\triangle B O \Gamma$ είναι $\widehat{O B \Gamma} = \widehat{O \Gamma B} = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο $\triangle B \Gamma$ είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \alpha\sqrt{3}$.

(ii) Το $\triangle A O B$ είναι ισόπλευρο με πλευρά a , αφού $A O = O B$ και $\widehat{A O B} = 60^\circ$. Τα τρίγωνα $\triangle A O Z$ και $\triangle E O B$ έχουν: $A O = O B$, $Z O = E B$ και $\widehat{A O Z} = \widehat{E O B} = 60^\circ$, δηλαδή έχουν δύο ίσες πλευρές και την περιεχόμενη τους γωνίας ίσες μία προς μία. Είναι ίσα, άρα έχουν $A Z = E O$, ως απέναντι των ίσων γωνιών $\widehat{A O Z}$ και $\widehat{E O B}$.

(iii) Η γωνία $\widehat{O A B} = 60^\circ$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle E A O$, άρα $\widehat{E O A} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{E O B} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, άρα η $E O$ είναι κάθετη στη ΔZ .



Η κοινή μεσοκάθετη των $A_1 A_2$, XL τώρα, περνάει από το μέσον O' του τμήματος OI , όπου O είναι το κέντρο του (O) , ως μεσοπαράλληλη των βάσεων του τραpezίου $IXLO$.

Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι και οι μεσοκάθετες ευθείες των $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, (κοινές μεσοκάθετες ευθείες επίσης των YM , ZN , αντιστοίχως), περνάνε από το σημείο O' .

• Έστω το σημείο $P \equiv AI \cap EF$ και από $\angle IEP + \angle EIP = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle IPE = 90^\circ$ και $\angle IPF = 90^\circ$

συμπεραίνουμε ότι το σημείο P ανήκει στους κύκλους (O_2) , (O_3) .

Επειδή τώρα στους κύκλους (O_1) , (O_2) , οι ευθείες $B_1 B_2$, PI , $C_1 C_2$ συγκλίνουν στο A , έχουμε ότι $(AB_1) \cdot (AB_2) = (AP) \cdot (AI) = (AC_1) \cdot (AC_2)$, (1)

Από (1) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $B_1 B_2 C_1 C_2$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (O') με κέντρο το σημείο O' , αφού όπως έχει ήδη αποδειχθεί, οι μεσοκάθετες των $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, τέμνονται σ' αυτό το σημείο.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα $A_1 A_2 B_1 B_2$, $A_1 A_2 C_1 C_2$, είναι εγγράψιμα στον κύκλο (O') και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Λύση 2 Ροδόλφος Μπόρης

Στηριγμένος στην

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=4568> νομίζω ότι μπορώ να δώσω μια λύση με μιγαδικούς στο 3 θέμα του Αρχιμήδη (όχι για τα παιδιά).

Αν τα A, B, C είναι εικόνες των μιγαδικών u^2, v^2, w^2 αντίστοιχα και ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABC

ΑΣΚΗΣΗ 38 Διαγωνισμός «Ο Αρχιμήδης» 2010

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=32836>

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω I το έγκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI , BI , CI τέμνουν τον (O) , στα σημεία D , E , F , αντιστοίχως. Οι κύκλοι (O_1) , (O_2) , (O_3) , με διαμέτρους ID , IE , IF αντιστοίχως, τέμνουν τις πλευρές BC , AC , AB , στα ζεύγη των σημείων A_1 , A_2 και B_1 , B_2 και C_1 , C_2 , αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα έξι αυτά σημεία, ανήκουν στον ίδιο κύκλο έστω (O') .

Λύση 1 Κώστας Βήττας

Έστω L , M , N , τα μέσα των πλευρών BC , AC , AB αντιστοίχως και X , Y , Z , τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου (I) , στις ίδιες πλευρές.

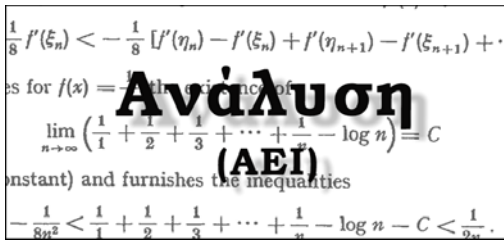
Επειδή η ID είναι διάμετρος του κύκλου (O_1) και τα σημεία X , L είναι οι προβολές των άκρων αυτής της διαμέτρου επί της χορδής του $A_1 A_2$, έχουμε ότι η μεσοκάθετη ευθεία του $A_1 A_2$, είναι επίσης, και μεσοκάθετη ευθεία του XL

και προσθέτουμε κατά μέλη. Οι περισσότεροι όροι θα μηδενιστούν λόγω της ταυτότητας $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Θα μείνουν μόνο οι συντελεστές του x^k όπου k πολλαπλάσιο του 3, διότι $\omega^3 = 1$. Θα προκύψει

$$(1+x)^n + (1+\omega x)^n + (1+\omega^2 x)^n = 3 \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{6} x^6 + \dots \right).$$

Τέλος βάζουμε $x = +1$ και $x = -1$ και προσθέτουμε. Η απάντηση είναι

$$\frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1-\omega)^n + (1-\omega^2)^n}{6}.$$



ΑΣΚΗΣΗ 42 giannis1990

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=1005>

Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει πίνακας $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ώστε $A^2 + I = 0$.

Λύση Χρήστος Κυριαζής

Έστω πως υπάρχει. Τότε $A^2 = -I$, άρα $\det(A^2) = \det(-I) = -1$ και άρα $(\det(A))^2 = -1$, άτοπο γιατί $(\det(A))^2 \geq 0$. Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας.

Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 43 Γρηγόρης Κωστάκος

<http://www.mathematica.gr/forum/memberlist.php?mode=viewprofile&u=54>

Να αποδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln(n!)}}{\ln(\mathcal{H}_{n+1})},$$

συγκλίνει, όπου $\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ είναι ο n -οστός Αρμονικός αριθμός.

Λύση Αναστάσιος Κοτρώνης-Δημήτρης Σκουτέρης

Η ακολουθία θετικών όρων $a_n := \frac{\sqrt[n]{\ln(n!)}}{\ln(\mathcal{H}_{n+1})}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μηδενική, αφού ισχύει

$$\mathcal{H}_{n+1} - \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma \Rightarrow \frac{\mathcal{H}_{n+1}}{\ln(n+1)} \rightarrow 1$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)}}{\ln(\ln(n+1))},$$

το οποίο με τέσσερις φορές L'Hospital δίνει 0.

Επειδή ο παρονομαστής $\ln(\mathcal{H}_{n+1})$ είναι αύξουσα ακολουθία, γιὰ νά είναι η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα, αρκεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\sqrt[n]{\ln(n!)}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι φθίνουσα για αρκετά μεγάλα n .

Θέτοντας $s_n := \ln(n!)$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{s_{n+1}} &= \sqrt[n+1]{s_n + \ln(n+1)} = \\ &= \sqrt[n+1]{s_n} \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{s_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \stackrel{(*)}{\leq} \\ &= \sqrt[n+1]{s_n} \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)s_n} \right) \leq \sqrt[n+1]{s_n} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)s_n} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)s_n} \geq \sqrt[n+1]{s_{n+1}} - \sqrt[n+1]{s_n} \quad (1).$$

Επίσης, από τό Θ.Μ.Τ., γιὰ τήν συνάρτηση s_n^x στο διάστημα $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{s_n} - \sqrt[n+1]{s_n} = \frac{s_n^\xi \ln(s_n)}{n(n+1)} \geq \frac{\sqrt[n+1]{s_n} \ln(s_n)}{n(n+1)} \geq \frac{\ln(s_n)}{(n+1)^2} \quad (2).$$

Γιὰ αρκετά μεγάλα n ισχύει

$$s_n \ln(s_n) \geq (n+1) \ln(n+1) \Rightarrow \frac{\ln(s_n)}{(n+1)^2} \geq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)s_n} \stackrel{(2)(1)}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt[n]{s_n} - \sqrt[n+1]{s_n} \geq \sqrt[n+1]{s_{n+1}} - \sqrt[n+1]{s_n} \Rightarrow \sqrt[n]{s_n} \geq \sqrt[n+1]{s_{n+1}}.$$

Από τό κριτήριο του Leibniz προκύπτει ότι η σειρά συγκλίνει. $\square$

(*) Ανισότητα Bernoulli, με αντίστροφη φορά απο τη συνήθη γιατί ο εκθέτης είναι μεταξύ 0 και 1.

ΑΣΚΗΣΗ 44 MoV

<http://www.mathematica.gr/forum/memberlist.php?mode=viewprofile&u=89>

Να δείξετε ότι το σύνολο των γνησίως αυξουσών ακολουθιών $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Λύση 1 Νίκος Μαυρογιάννης

Έστω $x = 0, \xi_1 \xi_2 \dots$ τυχόν στοιχείο του $[0, 1)$ σε δεκαδική μορφή. Στο x αντιστοιχούμε την γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων:

$$2^{1+\xi_1}, 2^{1+\xi_1} 3^{1+\xi_2}, 2^{1+\xi_1} 3^{1+\xi_2} 5^{1+\xi_3}, \dots$$

όπου στις βάσεις χρησιμοποιούνται πρώτοι αριθμοί.

Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 διότι αν οι αντίστοιχες ακολουθίες δύο αριθμών του $[0, 1)$ είναι ίσες από την ισότητα των όρων προκύπτει και η ισότητα των ψηφίων αφού η γνώση της ακολουθίας μας επιτρέπει την εύρεση των ψηφίων.

Άρα ο πληθάριθμος των γνησίως αυξουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του πληθαρίθμου των αριθμών του $[0, 1)$ που από την γνωστή και θρυλική απόδειξη του Cantor είναι σύνολο υπεραριθμήσιμο.

Λύση 2 Δημήτρης Χριστοφίδης

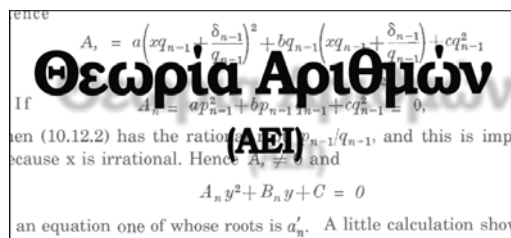
Έστω X το δεδομένο σύνολο. Θα δώσω μια επί συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, 1]$ που αποδεικνύει πως το X δεν είναι αριθμήσιμο.

Ορίζω $g(\alpha) = 0, \overline{\alpha(1)} \overline{\alpha(2)} \dots$, όπου με $\overline{n}$ συμβολίζω το υπόλοιπο του n όταν διαιρεθεί με το 10.

Για κάθε $x = 0, x_1 x_2 \dots \in [0, 1]$, η ακολουθία $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; \alpha(n) = 10n + x_n$ ανήκει στο X και ικανοποιεί $g(\alpha) = x$, άρα η g είναι πράγματι επί.

Λύση 3 MoV

Η διαγώνια διαδικασία του Cantor έχει ως εξής :



Έστω ότι υπάρχει απαρίθμηση όλων των γνησίως αυξουσών ακολουθιών $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$(\alpha_0)_n := (\alpha_{0,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots)$$

$$(\alpha_1)_n := (\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots)$$

$$(\alpha_2)_n := (\alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots)$$

.....

Όμως η ακολουθία $\beta_n := \alpha_{n,n} + 1 + \beta_{n-1}$ με $\beta_0 = \alpha_{0,0}$, δηλαδή $\beta_n = n + \sum_{i=0}^n \alpha_{i,i}$ είναι γνησίως αύξουσα αφού

$\beta_{n+1} - \beta_n = \alpha_{n+1,n+1} + 1 > 0$ και ταυτόχρονα διαφορετική από κάθε $(\alpha_i)_n$. Άστοπο.

Λύση 4 Δημήτρης Σκουτέρης

Καθε πεδίο τιμών της α είναι απειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επίσης, για καθε απειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ μπορεί να κατασκευαστεί μια ακολουθία α (αφου το $\mathbb{N}$ είναι καλως διατεταγμενο). Άρα το συνολο μας είναι ισοπληθες με το συνολο των απειρων υποσυνολων του $\mathbb{N}$. Αφου το δυναμοσυνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι υπεραριθμησιμο και το συνολο των πεπερασμενων υποσυνολων του $\mathbb{N}$ είναι αριθμησιμο, εχουμε οτι το συνολο μας είναι υπεραριθμησιμο.

Επιμελητής: Νίκος Κατσιπης

ΑΣΚΗΣΗ 45 Σεραφείμ Τσιπέλης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=4769>

Να αναλυθεί ο αριθμός $(5^{1985} - 1)$ σε γινόμενο τριών ακεραίων, καθένας από τους οποίους είναι μεγαλύτερος του 5^{100} .

Λύση Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Είναι γνωστό ότι

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Για τον δεύτερο παράγοντα έχουμε

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 5^{397}, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2 = \\ 5^{398}(x + 1)^2 &= (x^2 + 3x + 1)^2 - (5^{199}(x + 1))^2 = \\ (x^2 + 3x + 1 - 5^{199}(x + 1))(x^2 + 3x + 1 + 5^{199}(x + 1)) \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 1 - 5^{199}(x + 1)) \\ &\quad (x^2 + 3x + 1 + 5^{199}(x + 1)) \end{aligned}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι τα $x - 1$, $(x^2 + 3x + 1 + 5^{199}(x + 1))$ είναι μεγαλύτερα του 5^{100} .

Επίσης,

$$(x^2 + 3x + 1 - 5^{199}(x + 1)) =$$

$$x(x - 5^{199}) + 3x - 5^{199} + 1 \geq x + 0 + 1 \geq 5^{100}$$

Σχόλιο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε από την (πρώην) Σοβιετική Ένωση για τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1985.

ΑΣΚΗΣΗ 46 Νικόλαος Κατσιπης

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=3872>

Να ληθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση

$$x^y + y = y^x + x.$$

Λύση Δημήτρης Σκουτέρης

Εύκολα παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει λύσεις όλα τα ζεύγη της μορφής $(x, y) = (c, c), (c, 1), (1, c)$, $c \in \mathbb{N}^*$ και τα $(x, y) = (2, 3), (3, 2)$. Θα αποδείξουμε ότι μόνο αυτές είναι οι λύσεις της εξίσωσης.

Πράγματι, αν $x = 2$ και $y > x$, τότε $x^y \geq y^x$ (λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ έχει μέγιστο στο $x = e$ και $f(2) = f(4)$) και $y > x$, οπότε $x^y + y > y^x + x$, άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

Για $3 \leq x < y$, από τη μονοτονία της $f(x)$ συμπεραίνουμε ότι $x^y > y^x$ και $y > x$ οπότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις.



Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 47 Χρήστος Κυριαζής
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=8258>

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Να αποδείξετε πως για κάθε ζεύγος σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της παραπάνω έλλειψης ισχύει:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} - 1 \right| + \left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 \right| = 2.$$

Λύση 1 Γιώργος Μπαλόγλου

Άμεση εφαρμογή(*) του εξής λήμματος: αν (x_1, y_1) , (x_2, y_2) είναι σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ τότε $-1 \leq \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} \leq 1$.

Απόδειξη λήμματος: Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι το αριστερό σκέλος προκύπτει από το δεξί μέσω της αντικατάστασης $x_2 \rightarrow -x_2$, $y_2 \rightarrow -y_2$ (και συμμετρίας της έλλειψης περί το $(0, 0)$). Για μια γεωμετρική απόδειξη του δεξιού σκέλους ας παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο (x_1, y_1) είναι η $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$, οπότε ισχύει η $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} < 1$ για όλα τα σημεία (x, y) που βρίσκονται στο «αρνητικό» ημιεπίπεδο(**) της εφαπτομένης (το οποίο βεβαίως περιλαμβάνει το $(0, 0)$ και όλα τα σημεία της έλλειψης πλην του (x_1, y_1) , άρα και το (x_2, y_2)).

(*) Αν $-1 \leq c \leq 1$ τότε $|c-1| + |c+1| = (1-c) + (c+1) = 2$

(**) Κάθε ευθεία $Ax + By = 1$ χωρίζει το επίπεδο στο 'θετικό' ημιεπίπεδο (όπου $Ax + By > 1$) και στο «αρνητικό» ημιεπίπεδο (όπου $Ax + By < 1$).

Λύση 2 manos66

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} - 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x_1 x_2}{a^2} + \frac{2y_1 y_2}{\beta^2} - 2 \right) = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2x_1 x_2}{a^2} + \frac{2y_1 y_2}{\beta^2} - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} \right) - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{\beta^2} &= \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2}{\beta^2} \right) &= \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{(x_1 - x_2)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{\beta^2} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Όμοια

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 \geq 0$$

Οπότε

$$\left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} - 1 \right| + \left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 \right| = -\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 = 2$$

Λύση 3 Χρήστος Κυριαζής

Να δώσω κι εγώ μια με Cauchy-Schwarz.... Έχω:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} \right| = \left| \frac{x_1}{a} \cdot \frac{x_2}{a} + \frac{y_1}{\beta} \cdot \frac{y_2}{\beta} \right| \leq \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2}} \sqrt{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{\beta^2}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Συνεπώς: } \left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} \leq 1$$

Δηλαδή:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} \geq -1$$

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} \leq 1$$

Άρα:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} - 1 \right| + \left| \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 \right| =$$

$$1 - \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} + 1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{\beta^2} = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 Χρήστος Κυριαζής
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=9347>

Να αποδείξετε πως:

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \cdots (1 + \tan 43^\circ) < 2^{11} <$$

$$(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 4^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)$$

Λύση 1 Σεραφείμ Τσιπέλης

$$\text{Γενικά ισχύει } 1 + \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta) + \cos(\theta)}{\cos(\theta)} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin(45^\circ + \theta)}{\cos(\theta)} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\cos(45^\circ - \theta)}{\cos(\theta)}$$

Τότε

$$(1 + \tan(1^\circ)) \cdot (1 + \tan(3^\circ)) \cdots (1 + \tan(43^\circ)) =$$

$$(\sqrt{2})^{22} \cdot \frac{\cos(44^\circ)}{\cos(1^\circ)} \cdot \frac{\cos(42^\circ)}{\cos(3^\circ)} \cdots \frac{\cos(2^\circ)}{\cos(43^\circ)} =$$

$$2^{11} \cdot \frac{\cos(2^\circ)}{\cos(1^\circ)} \cdot \frac{\cos(4^\circ)}{\cos(3^\circ)} \cdots \frac{\cos(44^\circ)}{\cos(43^\circ)} < 2^{11}$$

και

$$(1 + \tan(2^\circ)) \cdot (1 + \tan(4^\circ)) \cdots (1 + \tan(44^\circ)) =$$

$$(\sqrt{2})^{22} \cdot \frac{\cos(43^\circ)}{\cos(2^\circ)} \cdot \frac{\cos(41^\circ)}{\cos(4^\circ)} \cdots \frac{\cos(1^\circ)}{\cos(44^\circ)} =$$

$$2^{11} \cdot \frac{\cos(1^\circ)}{\cos(2^\circ)} \cdot \frac{\cos(3^\circ)}{\cos(4^\circ)} \cdots \frac{\cos(43^\circ)}{\cos(44^\circ)} > 2^{11}$$

Λύση 2 Φωτεινή Καλδή Θέλουμε να αποδείξουμε:

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \cdots (1 + \tan 43^\circ) < \underbrace{2^{11}}_B <$$

$$\underbrace{(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 4^\circ) \cdots (1 + \tan 44^\circ)}_C$$

Είναι φανερό ότι $0 < A < C$.

Ισχύει:

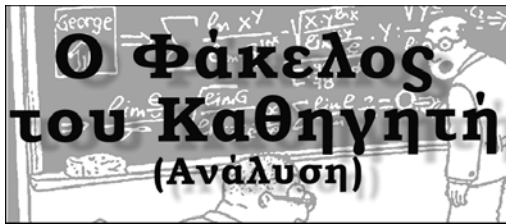
$$1 + \tan 1^\circ = 1 + \tan(45^\circ - 44^\circ) = 1 + \frac{1 - \tan 44^\circ}{1 + \tan 44^\circ} =$$

$$\frac{2}{1 + \tan 44^\circ} \Rightarrow (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ) = 2$$

$$A \cdot C = ((1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)) \cdot ((1 + \tan 2^\circ)(1 +$$

$$\tan 43^\circ)) \cdots ((1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)) = 2^{22}$$

$$A < C \Rightarrow A^2 < AC < C^2 \Rightarrow A^2 < 2^{22} < C^2 \Rightarrow A < 2^{11} < C$$



Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

ΑΣΚΗΣΗ 49 Μπάμπης Στεργίου
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=41303#p41303>

Διάβασα τελευταία ένα άρθρο για τις κυρτές συναρτήσεις και μου έκανε εντύπωση η παρακάτω ερώτηση:

Να εξετασθεί αν υπάρχουν συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, κυρτές και γνησίως αύξουσες, που οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν 5 ακριβώς κοινά σημεία, με κοινές εφαπτομένες στα σημεία αυτά.

Σχόλιο 1 Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος

Κάτι παρόμοιο είχα αναρωτηθεί και εγώ σε παλαιότερο ποστ στο mathematica αλλά μου λύθηκε η απορία με αυτά που ακολούθησαν. Συγκεκριμένα ρώταγα:

Έστω δυο συνεχείς και κυρτές συναρτήσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχουν; Διαισθητικά φαίνεται ότι δεν θα μπορούσαν να έχουν π.χ. 5 αλλά γιατί όχι;

Σχόλιο 2 Κώστας Ρεκούμης

Από κανένα, μέχρι άπειρα!

Λύση 1 Σεραφείμ Τσιπέλης

Παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \eta\mu(x)$, οπότε $f''(x) = 1 - \eta\mu(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή. $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$, οπότε $g''(x) = 1 > 0$ άρα η g είναι κυρτή. Επίσης $f(x) = g(x) \Rightarrow x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Λύση 2 Δημήτρης Χριστοφίδης

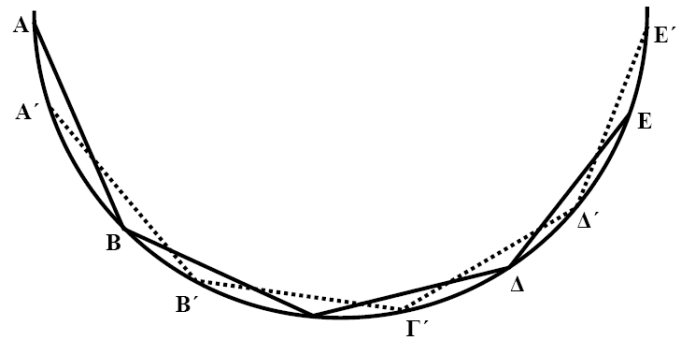
Παράδειγμα με υπεραριθμότητα σημεία τομής (εκτός από το $f \equiv g$):

$$f(x) \equiv 0 \text{ και } g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < -1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$$

Λύση 3 Μιχάλης Λάμπρου

Μπορούμε και άπειρα τέτοια σημεία: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + \sin^2 x$. Είναι και οι δύο κυρτές. Π.χ. η δεύτερη έχει $g'(x) = 2x + 2 \sin x \cos x = 2x + \sin 2x$, $g''(x) = 2 + 2 \cos x \geq 0$. Οι καμπύλες τέμνονται όταν $\sin x = 0$, δηλαδή $x = k\pi$. Στα σημεία αυτά έχουμε και κοινές εφαπτομένες καθώς $g'(k\pi) = 2k\pi + \sin 2k\pi = 2k\pi = f'(k\pi)$

Επειδή είναι δύσκολο να φανταστούμε εποπτικά δύο κυρτές καμπύλες που μπλέκονται σαν πλεξούδες, δίνω έναν τρόπο που το αποσαφηνίζει. Θεωρούμε ένα ημικύκλιο και μέσα το μια πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ... . Παίρνουμε τώρα σημεία Α', Β', Γ', Δ', Ε', ... στα ενδιάμεσα των τόξων. Τότε η πολυγωνική γραμμή Α'Β'Γ'Δ'Ε'... (δι-ακεκομμένη στο σχήμα) έχει την ζητούμενη ιδιότητα, και δεν μας ξενίζει ότι «περιπλέκεται εναλλάξ» όσες φορές θέλουμε, ακόμη και άπειρες» με την πρώτη.

**ΑΣΚΗΣΗ 50** Σπύρος Παπαδόπουλος
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=16318#p16318>

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = k$, όπου k πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Λύση Νίκος Μαυρογιάννης

Ενδιαφέρουσα η γενίκευση του Rolle: Ορίζουμε την συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ και $g(\alpha) = g(\beta) = k$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από το θεώρημα του Rolle. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση περαιτέρω γενίκευση-όπου κάποιο από τα άκρα ή τα δύο ίσα όρια δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.



Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 51 Αναστάσιος Κοιρώνης
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=5244>

Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 1| = 1$, ας βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z^2 .

Λύση Σεραφεΐμ Τσιπέλης

Αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 1| = 1$, ας βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z^2 . Έστω $z = 1 + (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$ με $t \in [0, 2 \cdot \pi)$.

Τότε $z = 2 \cdot \cos(\frac{t}{2}) \cdot (\cos(\frac{t}{2}) + i \cdot \sin(\frac{t}{2}))$

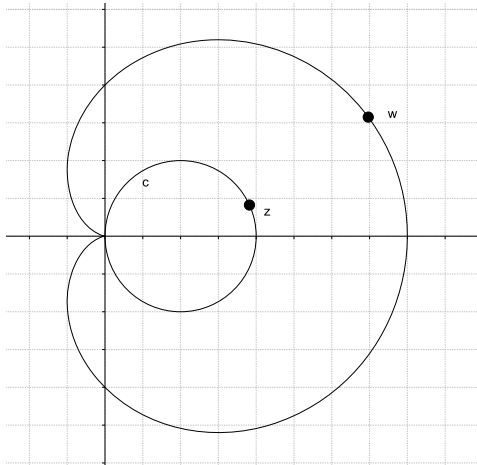
Οπότε $z^2 = 4 \cdot \cos^2(\frac{t}{2}) \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$ από όπου προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος να είναι η γραμμή με παραμετρικές συντεταγμένες $x = 4 \cdot \cos^2(\frac{t}{2}) \cdot \cos(t)$,

$y = 4 \cdot \cos^2(\frac{t}{2}) \cdot \sin(t)$ με $t \in [0, 2 \cdot \pi)$

Πρόκειται για μια καρδιοειδή καμπύλη

Προσθήκη Νίκος Μαυρογιάννης

Ένα σχήμα του γεωμετρικού τόπου από την Geogebra είναι το ακόλουθο:



Το σχήμα μπορεί να κατασκευασθεί βήμα-βήμα ως εξής:

1. Εισάγουμε τον τόπο του z δηλαδή τον κύκλο $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
2. Διαλέγουμε ένα σημείο στον κύκλο. Ας πούμε ότι η Geogebra το ονομάζει A.
3. Στο παράθυρο Άλγεβρας κάνουμε δεξί κλικ στο A και μετά επιλέγουμε
Ιδιότητες → Άλγεβρα → Συντεταγμένες → Μιγαδικός Αριθμός

4. Κατόπιν κάνουμε δεξί κλικ στο A και μετά επιλέγουμε Μετονομασία → z

5. Στη συνέχεια στη γραμμή εντολών δίνουμε $w = z^2$ και θα εμφανισθεί ο μιγαδικός αριθμός w στο παράθυρο της Γεωμετρίας

6. Κατόπιν με το ποντίκι Επιλέγουμε Γεωμετρικός Τόπος (στην 4η Εργαλειοθήκη) → Δίνουμε αριστερό κλικ στο w → Δίνουμε αριστερό κλικ στο z.

ΑΣΚΗΣΗ 52 Σπύρος Καπελλίδης
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=47538#p47538>

Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$, να αποδειχθεί ότι $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 \leq 9r^2$.
Αν ισχύει το =, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

Λύση 1 Χρήστος Λαζαρίδης

Αν A, B, Γ οι εικόνες των μιγαδικών, τότε ανήκουν σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας r. $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = (AB)^2 + (BA)^2 + (ΓA)^2 = (\vec{OB} - \vec{OA})^2 + (\vec{OΓ} - \vec{OB})^2 + (\vec{OA} - \vec{OΓ})^2 = 6r^2 - 2(\vec{OA}\vec{OB} + \vec{OB}\vec{OΓ} + \vec{OΓ}\vec{OA}) = 6r^2 - 2r^2(\sigma\upsilon\nu a + \sigma\upsilon\nu b + \sigma\upsilon\nu c) = r^2[6 - 2(\sigma\upsilon\nu a + \sigma\upsilon\nu b + \sigma\upsilon\nu c)]$, όπου a, b, c γωνίες των διανυσμάτων, με $a + b + c = 360^\circ$

Γνωρίζουμε, ότι: $\sigma\upsilon\nu a + \sigma\upsilon\nu b + \sigma\upsilon\nu c + \sigma\upsilon\nu(a + b + c) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{a+b}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{b+c}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{c+a}{2}$
 $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu a + \sigma\upsilon\nu b + \sigma\upsilon\nu c = -1 - 4\sigma\upsilon\nu\frac{a}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{b}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{c}{2}$

Επίσης:

$\sigma\upsilon\nu\frac{a}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{b}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{c}{2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow -4\sigma\upsilon\nu\frac{a}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{b}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{c}{2} \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu a + \sigma\upsilon\nu b + \sigma\upsilon\nu c \geq -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$,

$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 180^\circ$

δηλαδή οι γωνίες θεωρούνται γωνίες τριγώνου.

Από την αρχική σχέση, προκύπτει:

$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 \leq 6r^2 + 3r^2 = 9r^2$

Η ισότητα ισχύει αν $a = b = c = 120^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Λύση 2 Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Χρησιμοποιώντας ότι $|z|^2 = z\bar{z}$ δείχνουμε ότι $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$, οπότε

$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 \leq 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) =$

$9r^2$ με το « $\Rightarrow$ » αν και μόνο αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, δηλ. αν και μόνο αν το τρίγωνο που ορίζεται είναι ισόπλευρο.

Λύση 3 Σπύρος Καπελλίδης

Αν A, B, C είναι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των z_1, z_2, z_3 αντιστοίχως, τότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABC θα έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα r . Αν G το κέντρο βάρους του τριγώνου ABC και M ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, τότε το Θεώρημα Λάιμπνιτς δίνει

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), BC = a, CA = b, AB = c.$$

Αν το εφαρμόσουμε, βάζοντας στη θέση του M την αρχή των αξόνων O θα έχουμε

$$3r^2 = 3OC^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow 9r^2 = 9OG^2 + a^2 + b^2 + c^2, \text{ άρα } 9r^2 \geq |z_3 - z_2|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2.$$

Αν ισχύει το « $\Rightarrow$ » θα έχουμε $OG = 0$, άρα το τρίγωνο ισόπλευρο.

Λύση 4 Ανδρέας Πούλος

Θεωρώ ως το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ το $(0,0)$ και ως $A(\alpha,0)$ με $\alpha > 0$, ως

$B(\beta,\gamma)$ και ως $\Gamma(\delta,\epsilon)$. Άρα $\alpha = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, που η άσκηση ονομάζει r . Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OAB έχουμε $OA + OB > AB$ ισοδύναμα $2\rho > AB$, ισοδύναμα $4\rho^2 > (a - \beta)^2 + \gamma^2$. Όμως $OB = \rho$ ισοδύναμα $\beta^2 + \gamma^2 = \rho^2$. Άρα $-\alpha\beta < \rho^2$ (1).

Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $O\beta\Gamma$ έχουμε $OB + O\Gamma > B\Gamma$, ισοδύναμα $2\rho > B\Gamma$, ισοδύναμα $4\rho^2 > (\beta - \delta)^2 + (\gamma - \epsilon)^2$. Όμως $OB = \rho$ ισοδύναμα $\beta^2 + \gamma^2 = \rho^2$. Όμως $O\Gamma = \rho$ ισοδύναμα $\delta^2 + \epsilon^2 = \rho^2$. Άρα

$$-\beta\delta - \gamma\epsilon < \rho^2(2). \text{ Επίσης ισχύει}$$

$$-\alpha\delta < \rho^2(3).$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $AB^2 + B\Gamma^2 + A\Gamma^2$. Από το τύπο του μέτρου διανυσμάτων έχουμε ότι το άθροισμα αυτό ισούται με $6\rho^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\delta - 2\gamma\delta - 2\alpha\delta$ Άρα $AB^2 + B\Gamma^2 + A\Gamma^2 \leq 6\rho^2 + 3\rho^2 = 9\rho^2$

Σημείωση: Από την θέση των σημείων A, B, Γ στο καρτεσιανό επίπεδο έχουμε ότι $\alpha > \beta$, $\alpha > -\beta$ και $\alpha > \delta$, $\alpha > -\delta$, η σημείωση αυτή επεξηγεί την σχέση (3).