Η ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ – ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

***** Προσωρινό αρχείο για περαιτέρω επεξεργασία**

Μπάμπης Στεργίου, Ιανουάριος 2010

Περίληψη

Στις γραμμές που ακολουθούν έχει γίνει μια στοιχειώδης προσπάθεια να παρουσιαστούν ορισμένα στοιχεία από τον ολοκληρωτικό λογισμό που θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας της αρχικής και του αόριστου ολοκληρώματος.. Θα διατυπωθούν ορισμένες αναγκαίες συνθήκες ώστε να έχει μια συνάρτηση αρχική. Θεωρούμε πως τα συμπεράσματα που ακολουθούν μπορούν κάλλιστα να αποτελέσουν σημαντικά εφόδια για τον καθηγητή , ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει ή να εξηγήσει στους μαθητές του τυχόν θεωρητικά ή υπολογιστικά προβλήματα με μεγαλύτερη ευχέρεια και αυτοπεποίθηση .

Ευχαριστήριο :

Ευχαριστώ τον καλό φίλο και συνάδελφο Αχιλλέα Συνεφακόπουλο για τις πολύτιμες παρατηρήσεις και τις συμπληρώσεις που έκανε στο δύσκολο και επίπονο αυτό κείμενο.

Α. Αρχική συνάρτηση

1.1 Η έννοια της αρχικής ή παράγουσας :

Έστω Δ ένα διάστημα και f μια συνάρτηση ορισμένη στο Δ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση F είναι μια **αρχική**(ή παράγουσα ή αντιπαράγωγος) της f στο Δ, αν και μόνο αν η F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει :

$$F'(x)=f(x) \text{ , για κάθε } x\in\Delta$$

Σχόλια :

Είναι αναμενόμενο ότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν αρχική .Αλλά αυτό το θέμα θα το αναλύσουμε πιο διεξοδικά στη συνέχεια και κυρίως στην παράγραφο που αναφέρεται στην ιδιότητα Darboux μιας συνάρτησης.

Ένα βασικό κριτήριο για την ύπαρξη αρχικής μιας συνάρτησης διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει αρχική ∎

Μια τέτοια συνάρτηση είναι για παράδειγμα και η εξής :

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$, όπου $x \in \Delta$ και $\alpha \in \Delta$ είναι οποιαδήποτε σταθερά.

Η συνέχεια λοιπόν μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα είναι μια πολύ ισχυρή συνθήκη, η οποία εξασφαλίζει και την ύπαρξη αρχικής.

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει .Θα φτιάξουμε μια τέτοια συνάρτηση: Ξεκινάμε για παράδειγμα με τη συνάρτηση :

$$F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, x\in(0,1] \\ 0, x=0 \end{cases}$$

Η παράγωγος της F είναι η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, x\in(0\,,\,1] \\ 0 \quad ,x=0 \end{cases},$$

Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}, x\in(0\,,\,1] \\ 0 \quad ,x=0 \end{cases}$ είναι όμως συνεχής , οπότε η συνάρτηση

$$G(x)=g(x)-f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, x\in(0\,,\,1] \\ 0 \quad ,x=0 \end{cases}$$

έχει αρχική στο $[0,1]$,διότι τόσο η g όσο και η f έχουν αρχική(αφού η δεύτερη έχει αρχική την F) . Η συνάρτηση λοιπόν G έχει αρχική, χωρίς να είναι συνεχής .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια συνάρτηση f έχει αρχική την F στο διάστημα Δ. Είναι άραγε αυτή η αρχική συνάρτηση F μοναδική ή υπάρχουν και άλλες ;Μπορούμε αμέσως να παρατηρήσουμε ότι :

$$(F(x)+c)'=F'(x)+c'=f(x)$$

για κάθε πραγματική σταθερά c, οπότε η συνάρτηση $F+c$ είναι και αυτή μια αρχική της f.Γενικά, την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα μας τη δίνει μια σπουδαία πρόταση που πηγάζει από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και διατυπώνεται ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^{o}

Αν F, G είναι δύο αρχικές μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , τότε οι αρχικές αυτές διαφέρουν κατά μία σταθερά. Υπάρχει δηλαδή $c \in IR$ τέτοιο, ώστε:

$$G(x)=F(x)+c \text{ , για κάθε } x \in \Delta \ ■$$

Επομένως, αν μια συνάρτηση έχει αρχική σε ένα διάστημα Δ, τότε έχει άπειρες αρχικές και μάλιστα αυτές διαφέρουν κατά μία σταθερά c.Πρόκειται άλλωστε για θεώρημα που αποδεικνύεται στα σχολικά μαθηματικά της Γ' Λυκείου της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^{o}

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που έχουν αρχική στο διάστημα Δ . Τότε :

α) Η συνάρτηση $f+g$ έχει αρχική στο Δ

β) Η συνάρτηση $f-g$ έχει αρχική στο διάστημα Δ

γ) Η συνάρτηση λf έχει αρχική στο Δ για κάθε πραγματική σταθερά $\lambda \neq 0$ ■

Πόρισμα :

Αν η συνάρτηση f έχει αρχική στο Δ και η συνάρτηση g δεν έχει αρχική στο Δ , τότε οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ δεν έχουν αρχική στο Δ ■

Για παράδειγμα , η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} ημ\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 1, \quad x=0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική διότι :

$$f(x)=\underbrace{\begin{cases} ημ\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}}_{\text{Έχει αρχική}}+\underbrace{\begin{cases} 0,\ x\neq 0 \\ 1,\ x=0 \end{cases}}_{\text{Δεν έχει αρχική}}$$

και έτσι το συμπέρασμα προκύπτει από εφαρμογή του πορίσματος. Το γεγονός ότι η δεύτερη συνάρτηση δεν έχει αρχική είναι συνέπεια του ότι η συνάρτηση αυτή δεν έχει την ιδιότητα Darboux, την οποία θα μελετήσουμε διεξοδικά παρακάτω.

Εφαρμογή 1

Η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ημx}{x}, x\neq 0 \\ -1, \quad x=0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική , διότι

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ημx}{x}, x\neq 0 \\ -1, \quad x=0 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{ημx}{x}, x\neq 0 \\ 1, \quad x=0 \end{cases}+\begin{cases} 0\ , x\neq 0 \\ -2\ , x=0 \end{cases}$$

Η πρώτη συνάρτηση του αθροίσματος αυτού έχει αρχική, ως συνεχής, ενώ η δεύτερη δεν έχει, αφού δεν έχει την ιδιότητα Darboux. Άρα , σύμφωνα με το πόρισμα , και η συνάρτηση f δεν έχει αρχική.

Εφαρμογή 2

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} συν^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ δεν έχει αρχική.

Λύση

Παρατηρούμε ότι :

$$f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}), x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}+\frac{1}{2}\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}$$

Στο άθροισμα αυτό , η πρώτη συνάρτηση δεν έχει αρχική , ενώ η δεύτερη έχει αρχική. Άρα η f δεν έχει αρχική, όπως επιτάσσει το πόρισμα..

Τι μπορεί όμως να συμβαίνει με το γινόμενο δύο συναρτήσεων που έχουν αρχική σε ένα διάστημα Δ ; Εδώ η απάντηση δεν είναι η αναμενόμενη . Το γινόμενο των δύο αυτών συναρτήσεων μπορεί να έχει αλλά μπορεί και να μην έχει αρχική.

Εφαρμογή 3

Αν δύο συναρτήσεις έχουν αρχική, τότε το γινόμενό τους δεν έχει υποχρεωτικά αρχική.

Λύση

Αν $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}$

τότε $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ \ x=0\end{cases}$, η οποία σύμφωνα με την προηγούμενη εφαρμογή δεν έχει αρχική. Ωστόσο, οι συναρτήσεις f,g έχουν αρχική.

Ορισμένα χρήσιμα θεωρητικά συμπεράσματα διατυπώνονται στα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4^o

Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες δε ένα διάστημα Δ .Αν η f έχει αρχική και η g έχει συνεχή παράγωγο στο Δ, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει αρχική στο Δ ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 5^o

α) Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική στο διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό ενώ η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ, τότε το γινόμενο $f \cdot g$ των συναρτήσεων αυτών έχει αρχική στο Δ.

β) Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική στο διάστημα Δ και είναι φραγμένη ενώ η συνάρτηση g είναι συνεχής στο Δ, τότε το γινόμενο $f \cdot g$ των συναρτήσεων αυτών έχει αρχική στο Δ.

γ) Αν δύο συναρτήσεις έχουν αρχική και ορίζεται η σύνθεσή τους , τότε η σύνθεσή τους δεν είναι απαραίτητο να έχει αρχική.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

έχουν αρχική , ενώ η σύνθεσή τους

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \eta\mu^2\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0\ ,\ x = 0 \end{cases},$$

δεν έχει αρχική (Βλέπε εφαρμογή 2 στο πόρισμα του θεωρήματος 3).

ΘΕΩΡΗΜΑ 6ο

Αν η συνάρτηση $f: IR \to IR$ έχει αρχική ενώ η συνάρτηση g έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα Δ με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ έχει αρχική στο Δ.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω F μια αρχική της f..Η συνάρτηση $F \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ , με

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = (f \circ g)(x)) \cdot g'(x)$$

Επομένως παίρνουμε :

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{g'(x)} \cdot (F \circ g)'(x).$$

Επειδή λοιπόν η $(F \circ g)'$ έχει αρχική και η $\frac{1}{g'(x)}$ έχει συνεχή παράγωγο, από το θεώρημα 5 προκύπτει ότι και η συνάρτηση $f \circ g$ έχει αρχική στο Δ ■

Σχόλιο

Η πρόταση δεν ισχύει χωρίς να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες. Για παράδειγμα ,

αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \begin{cases} ημ\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, τότε η συνάρτηση

$(f \circ g) = \begin{cases} ημ^2\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ δεν έχει αρχική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7ο

Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες δε ένα διάστημα Δ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

α) Η συνάρτηση f έχει αρχική στο Δ,

β) Η συνάρτηση g διαφέρει από την f στα σημεία ενός πεπερασμένου συνόλου A, δηλαδή

$$f(x) \neq g(x), x \in A,$$

ενώ είναι ίση με την f στα υπόλοιπα σημεία , δηλαδή $f(x) = g(x), x \in \Delta - A$.

Τότε η συνάρτηση g δεν έχει αρχική στο Δ ■

Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές, δηλαδή αποτελεί ένα σπουδαίο εργαλείο για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

2.1 Αρχική και μη συνεχείς συναρτήσεις

Αφού όλες οι συνεχείς σε διάστημα συναρτήσεις έχουν αρχική, θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στις περιπτώσεις που μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής. Επειδή μια συνάρτηση που δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο μπορεί να έχει , ανάλογα με την περίπτωση, διαφορετική συμπεριφορά , θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε διάφορες περιπτώσεις , που εξαρτώνται από το είδος της ασυνέχειας .

1^{η} Πρόταση :

Υπάρχουν μη συνεχείς συναρτήσεις ,ορισμένες σε διάστημα Δ που έχουν αρχική.

Παράδειγμα

Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η εξής :

$$f(x)=\begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι συνεχής, ωστόσο έχει αρχική .Πραγματικά , είναι

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

όπου $g(x)=\begin{cases} \eta\mu\dfrac{1}{x}+2x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ και $h(x)=\begin{cases} -2x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Αλλά η h ως συνεχής έχει αρχική και η g έχει αρχική την

$$G(x)=\begin{cases} x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Άρα και η συνάρτηση $f(x)=g(x)+h(x)$ έχει αρχική .

Σχόλια

α) Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ έχει επίσης αρχική. Η απόδειξη είναι ίδια με την παραπάνω, διότι

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}=2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x})'$ και η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}x\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής .

β) Οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu\dfrac{\alpha}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\ \alpha\neq 0 \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\ \alpha\neq 0$$

έχουν αρχική . Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν του παραδείγματος.

2η Πρόταση :

Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς και δεν έχουν αρχική.

Υπάρχει βέβαια απειρία συναρτήσεων που δεν είναι συνεχείς και δεν έχουν αρχική. Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η επόμενη :

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική, είναι εμφανές στον μαθηματικό, όχι όμως και στο μαθητή . Αυτό το γεγονός έχει να κάνει με την ιδιότητα Darboux και είναι ώρα να περάσουμε πιο διεξοδικά σε αυτή την έννοια.

2.2 Το θεώρημα Darboux και η ύπαρξη αρχικής

Ορισμός :

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ έχει την **ιδιότητα Darboux**, αν για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ και για κάθε γ ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$, υπάρχει $\delta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο , ώστε $f(\delta) = \gamma$.

Βασική Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ ■

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν είναι συνεχείς.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένα θεμελιώδη συμπεράσματα, το πρώτο από τα οποία διατυπώνεται στο παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8^{o} :

Μια συνάρτηση f έχει σε ένα διάστημα Δ την ιδιότητα Darboux αν και μόνο , αν το σύνολο $f(I)$ είναι διάστημα , για κάθε υποδιάστημα I του Δ ■

Ισχύουν επίσης τα εξής θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 9^{o} :

Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, τότε αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Αυτό σημαίνει ότι ή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10^{o} :

Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι $1-1$, τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ .

2.3 Προτάσεις που βασίζονται στο θεώρημα Darboux

Ας έρθουμε τώρα να δούμε τι σχέση έχει η ύπαρξη αρχικής με το θεώρημα Darboux. Για να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό, θα αναφέρουμε το εξής σπουδαίο θεώρημα που αφορά την παράγωγο μιας συνάρτησης :

ΘΕΩΡΗΜΑ 11ο

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα , τότε η παράγωγός της έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα αυτό ■

Θεώρημα - Darboux

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα του Darboux η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μια ιδιόμορφη συνάρτηση, πιο πλούσια ορισμένες φορές από την ίδια τη συνάρτηση. Βλέπουμε δηλαδή ότι αν η παράγωγος μια συνάρτησης ορισμένη σε διάστημα παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες. Τονίζουμε ότι αναφερόμαστε πάντα σε διαστήματα .Εξαίρεση αποτελεί όμως το γεγονός ότι ενώ η συνάρτηση f , ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής, η παράγωγος συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής . Γενικότερα ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση

Μια συνάρτηση μπορεί να έχει την ιδιότητα Darboux σε ένα διάστημα Δ , χωρίς να είναι συνεχής στο διάστημα Δ ■

2.4 Έστω ότι η συνάρτηση f έχει αρχική την F στο διάστημα Δ. Αφού η f είναι η παράγωγος της F , δηλαδή $f=F'$ και η F' έχει την ιδιότητα Darboux, συμπεραίνουμε ότι και η f έχει την ιδιότητα Darboux. Προκύπτει λοιπόν η εξής πρόταση :

ΘΕΩΡΗΜΑ 12^{o}

Αν μια συνάρτηση f δεν έχει την ιδιότητα Darboux σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν έχει αρχική στο διάστημα αυτό ■

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases},$$

δεν έχει αρχική , διότι δεν έχει την ιδιότητα Darboux, μια και το σύνολο τιμών της είναι σύνολο με δύο στοιχεία, δηλαδή το $f(IR)=\{0,1\}$ και όχι διάστημα.

Πόρισμα :

Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ το $f(\Delta)$ δεν είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση f δεν έχει αρχική στο Δ ■

Επομένως , αν με μια ματιά διαπιστώσουμε ότι η εικόνα $f(\Delta)$ του Δ δεν είναι διάστημα, τότε με βεβαιότητα λέμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει αρχική.

Χρήσιμα Σχόλια

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η εξής :

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική , το αποδείξαμε στο πόρισμα του θεωρήματος 3. Επομένως :

Η ιδιότητα Darboux αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να έχει μια συνάρτηση αρχική , δεν αποτελεί όμως και ικανή συνθήκη για να έχει η συνάρτηση αυτή αρχική ■

Με άλλα λόγια , η ιδιότητα Darboux αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να έχει μια συνάρτηση αρχική. Υπάρχουν επομένως συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα

Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική.Κάθε όμως συνάρτηση που έχει αρχική, έχει και την ιδιότητα Darboux.

β) Ενώ το άθροισμα δύο συναρτήσεων που έχουν αρχική έχει επίσης αρχική, η ιδιότητα αυτή δεν μεταφέρεται και σε συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux. Έτσι :

Αν δύο συναρτήσεις f, g έχουν την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ, το άθροισμα $f+g$ ***και η διαφορά*** $f-g$ **δεν έχουν υποχρεωτικά την ιδιότητα Darboux■**

Για παράδειγμα , για τις συναρτήσεις :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases} \quad \textit{και} \quad g(x)=\begin{cases}-\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

είναι $(f+g)(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$,η οποία ως γνωστόν δεν έχει την ιδιότητα Darboux.

γ) Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux, τότε και η συνάρτηση $f+k$ έχει την ιδιότητα Darboux, για κάθε πραγματική σταθερά k.

δ) Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux, τότε και η συνάρτηση λf έχει την ιδιότητα Darboux, για κάθε πραγματική σταθερά $\lambda\neq 0$.

Σημειώνουμε επίσης ότι :

* Αν η f είναι συνεχής και η g έχει την ιδιότητα Darboux, τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν έχει απαραίτητα την ιδιότητα Darboux.

* Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής και η συνάρτηση $h\circ f$ έχει την ιδιότητα Darboux για κάθε συνάρτηση f που έχει την ιδιότητα Darboux, τότε η h είναι γραμμική, δηλαδή είναι της μορφής $h(x)=\alpha x+\beta$

ε) Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική και δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ δεν έχει υποχρεωτικά αρχική στο Δ. Ισχύει όμως το εξής :

στ) Αν μια συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ και έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα αυτό , τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ έχει την ιδιότητα Darboux στο Δ.

Τα ερωτήματα αυτά σχετίζονται με την πρόταση Jarnik που θα διατυπώσουμε παρακάτω.■

ζ) Αν δύο συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα Darboux, τότε και η σύνθεσή τους έχει την ιδιότητα Darboux■.

Ένα χρήσιμο συμπέρασμα

Έχουμε δει μέχρι τώρα ότι :

α) Οι συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα έχουν αρχική.

β) Οι συναρτήσεις που έχουν αρχική έχουν την ιδιότητα Darboux.

γ) Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν έχουν αρχική.

δ) Υπάρχουν μη συνεχείς συναρτήσεις που έχουν αρχική, άρα έχουν και την ιδιότητα Darboux .

Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η $f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x} , x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases}$, κάτι που έχουμε ήδη αποδείξει.

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να κάνουμε ένα σχέδιο για το πώς συμπεριφέρονται ορισμένα ήδη συναρτήσεων σχετικά με την ύπαρξη αρχικής :

Συμπέρασμα

Αν συμβολίσουμε αντίστοιχα με F_Δ το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Δ , με C_Δ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο Δ , με D_Δ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα Darboux στο Δ αρχική στο Δ και με A_Δ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν αρχική στο Δ , τότε ισχύει ότι :

$$C_\Delta \subseteq A_\Delta \subseteq D_\Delta \subseteq F_\Delta$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι :

Οι **συνεχείς** συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ αποτελούν υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που έχουν **αρχική** , αυτές είναι υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που έχουν την ιδιότητα Darboux και αυτές με τη σειρά τους υποσύνολο στο σύνολο των συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο διάστημα Δ.

Β. Προτάσεις – Σχόλια στην αρχική συνάρτηση

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ορισμένα σχόλια ή προτάσεις που θα συμβάλλουν ώστε να σχηματίσουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για την αρχική συνάρτηση.

Σχόλιο 1.

Έστω $f:\Delta\to IR$ και $g:\Delta\to IR^*$ δύο συναρτήσεις που έχουν αρχική στο διάστημα Δ.

Τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει την ιδιότητα Darboux στο Δ ■

(Πρόταση Jarnik)

Σχόλιο 2.

Έστω $f:I\to J$, $g:J\to IR$ δύο συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux στα διαστήματα I , J.Τότε η συνάρτηση $g\circ f$ έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα I ■

Σχόλιο 3.

Α. Ορισμός

Έστω x_o ένα εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ. Αν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο x_o υπάρχουν , είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά διαφορετικά μεταξύ τους , τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_o **ασυνέχεια πρώτου είδους**. Διαφορετικά η ασυνέχεια λέγεται **δευτέρου είδους**.

Ασυνέχεια λοιπόν δευτέρου είδους θα παρουσιάζει μια συνάρτηση στο x_o όταν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει ή όταν κάποιο από αυτά υπάρχει μεν αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Β. Πρόταση

Έστω f μια συνάρτηση που είναι μονότονη στο διάστημα Δ. Τότε τα ενδεχόμενα σημεία ασυνέχειας της f είναι πρώτου είδους και το σύνολο αυτών των σημείων είναι το πολύ αριθμήσιμο ■

Γ. Πρόταση

Έστω f μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ. Τότε τα ενδεχόμενα σημεία ασυνέχειας της f είναι δευτέρου είδους■

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ δεν είναι συνεχής σε κάποιο εσωτερικό σημείο του Δ και παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους σε αυτό το σημείο, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ■

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & , x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 2 & , x=1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f δεν έχει αρχική.

Λύση

Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο 1, μια και $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1\neq 2=f(1)$.

Επομένως, αφού η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο $x_0=1$, η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική.

Σχόλιο 4.

Έστω f μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ και είναι μονότονη στο διάστημα Δ. Τότε η f είναι συνεχής στο Δ■

Σχόλιο 5.

Επειδή μια συνάρτηση που έχει αρχική έχει υποχρεωτικά την ιδιότητα Darboux, συμπεραίνουμε ότι αν υπάρχουν σημεία ασυνέχειας, τότε αυτά είναι δευτέρου είδους■

Σχόλιο 6.

Αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε ένα διάστημα Δ και έχει σημεία ασυνέχειας , τότε αυτή δεν έχει αρχική■

Πραγματικά, αυτό συμβαίνει διότι μια μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα δεν μπορεί να έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους σε κανένα εσωτερικό σημείο. Και επειδή οι ασυνεχείς συναρτήσεις που έχουν αρχική έχουν ασυνέχεια μόνο δευτέρου είδους , η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική.

Παράδειγμα :

Οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\in[0,1] \\ x+1, & x>1 \end{cases} \qquad , g(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0 \\ x+2 & , x>0 \end{cases}$$

δεν έχουν αρχική , διότι είναι μονότονες και είναι ασυνεχείς με ασυνέχεια πρώτου είδους. (Το ότι δεν έχουν αρχική προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι το σύνολο τιμών τους δεν είναι διάστημα)

Βασικό Συμπέρασμα

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο σημείο x_0 του Δ ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια της f στο x_0 , πεπερασμένο ή άπειρο , υπάρχει και είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση αυτή δεν έχει αρχική στο Δ.

Η παραπάνω πρόταση είναι πρακτικά πολύ χρήσιμη , διότι ο υπολογισμός των πλευρικών ορίων σε μια συνάρτηση είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, οπότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει αρχική.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\leq 0 \\ \frac{1}{x}\text{συν}x, & x>0 \end{cases}$$

δεν έχει αρχική , αφού το δεξιό όριο της f στο 0 είναι $+\infty$.

Σχόλιο 7.

Δύο ακόμα προτάσεις με θεωρητικό χαρακτήρα είναι οι επόμενες:

Α. Υπάρχει τουλάχιστον μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το IR που είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο x και έχει την ιδιότητα Darboux■

Θεώρημα Lebesgue

Β. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ υπάρχουν δύο ασυνεχείς συναρτήσεις $f_1, f_2:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ που έχουν την ιδιότητα Darboux , ώστε να ισχύει :

$$f = f_1 + f_2 \quad ■$$

Θεώρημα Sierpinski

Σχόλιο 8.

Κλείνουμε τα ενδιαφέροντα σχόλια που αφορούν τις συναρτήσεις Darboux θυμίζοντας τη βασική ιδιότητα που συνδέει τις συνεχείς συναρτήσεις και τις συναρτήσεις με την ιδιότητα Darboux και που αναφέραμε ήδη στην αρχή της παραγράφου .

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα Darboux στο διάστημα Δ ■

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα Darboux, αλλά δεν είναι συνεχείς.

Β. Εφαρμογές στην αρχική συνάρτηση

Εφαρμογή 1η

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} ημ\frac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ α & ,\ x=0 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι :

α) η συνάρτηση f έχει την ιδιότητα Darboux, αν και μόνο αν $|α|\leq 1$

β) η συνάρτηση f έχει αρχική, αν και μόνο αν $α=0$

Εφαρμογή 2η

Αν μια συνάρτηση f έχει αρχική στα διαστήματα $[α,β]$, $[β,\ γ]$, τότε έχει αρχική και στο διάστημα $[α,γ]$

Εφαρμογή 3η

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ,x=0 \\ ημ^2\frac{1}{x}-ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}\ ,\ g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ,x=0 \\ ημ^2\frac{1}{x}+ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν αρχική , ενώ η συνάρτηση $f\cdot g$ δεν έχει αρχική.

Γ. Το αόριστο ολοκλήρωμα

Η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος είναι γνωστή . Δεν θα αναφερθώ σε μεθόδους υπολογισμού ούτε σε εφαρμογές παρά θα κάνω μόνο ορισμένα σχόλια στον ορισμό του.

3.1 Εισαγωγή

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , η οποία έχει παράγουσα στο Δ.Είναι γνωστό ότι σε αυτή την περίπτωση η f έχει άπειρες αρχικές , οι οποίες μάλιστα διαφέρουν κατά μία πραγματική σταθερά.

Ορισμός 1

Ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο Δ το σύνολο των αρχικών της στο διάστημα Δ.Είναι δηλαδή :

$$\int f(x)dx = \{ F \,/\, F : \Delta \to IR \,,\, F\,'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta \}$$

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω ορισμό το αόριστο ολοκλήρωμα μια συνάρτησης σε ένα διάστημα είναι **σύνολο** και **όχι συνάρτηση**.

Σύμβαση

Όπως προκύπτει από τον ορισμό , η έννοια του αόριστου ολοκληρώματος αναφέρεται σε διάστημα . Αν λοιπόν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν είναι διάστημα, αλλά ένωση διαστημάτων, τότε λέγοντας αόριστο ολοκλήρωμα της f θα εννοούμε το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής σε ένα υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός 2

Έστω F_Δ το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν πεδίο ορισμού το(ή ορίζονται στο)διάστημα Δ και $A, B \subseteq F_\Delta$. Ορίζουμε τότε τα εξής :

α) $A + B = \{f + g \,/\, f \in A \text{ και } g \in B\}$, **β)** $A - B = \{f - g \,/\, f \in A \text{ και } g \in B\}$

γ) $f + B = \{f\} + B = \{f + g \,/\, g \in B\}$, **δ)** $f - B = \{f\} - B = \{f - g \,/\, g \in B\}$

ε) $\lambda A = \{\lambda f \,/\, f \in A\}, \lambda \in IR^*$, $-A = \{(-1)f \,/\, f \in A\}$, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda \in IR^*$

Τονίζουμε ότι εδώ η διαφορά $A - B$ δεν είναι η γνωστή πράξη συνόλων $A \cap B'$.

Ορισμός 3

Έστω Δ **ένα διάστημα . Ορίζουμε :**

$$C = \{ f : \Delta \to IR / f - \text{σταθερή} \}$$

Με άλλα λόγια το C συμβολίζει το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ.

Θεώρημα

Για το σύνολο C ισχύει ότι :

- ♦ $\lambda C = C$, *για κάθε* $\lambda \neq 0$ (1)
- ♦ $C + C = C$ *και* $C - C = C$ (2)
- ♦ $k + C = k - C = C + k = C - k = C$ *για κάθε* $k \in C$ (3)
- ♦ $f + C = f - C = \{f + k / k \in C\}$ *για κάθε συνάρτηση* $f \in F_\Delta$ (3)

♦ Αν $f \in F_\Delta$ *και* $I = \{f + k / k \in C\}$, *τότε* $I - I = C$, $I + C = I$ *και*

$$\lambda I = \lambda f + C = \{\lambda f + k / k \in C\} \text{ , όπου } \lambda \neq 0 \quad (4)$$

♦ Ισχύει επίσης η ιδιότητα :

$$f + C = g + C \Leftrightarrow f = g + c, c \in IR$$

Σχόλια

Σύμφωνα με τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος και επειδή οι παράγουσες της ίδιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερά , προκύπτει ότι :

Πρόταση

Αν η F είναι μια αρχική της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , τότε έχουμε :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1)$$

όπου C είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων που ορίσαμε παραπάνω. Συχνά , αυτό το C λέγεται και **σταθερά ολοκλήρωσης■**

Βασική παρατήρηση

Για τη σταθερά ολοκλήρωσης C, που ας μην ξεχνάμε ότι είναι σύνολο και όχι αριθμός ή συνάρτηση , ισχύει η πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα:

$$\int f(x)dx + C = \int f(x)dx$$

Αν λοιπόν θέσουμε $\int f(x)dx = I$,τότε η παραπάνω ισότητα γράφεται :

$$I + C = I \qquad (***)$$

Στην σχέση (***) είναι φανερό ότι καμία γνωστή πράξη από τους αριθμούς δεν μπορεί να γίνει. Δεν μπορεί για παράδειγμα να διαγράψουμε από τα δύο μέλη το I και να πάρουμε $C = 0$, αφού το πρώτο μέλος στην σχέση $C = 0$ είναι σύνολο και το δεύτερο είναι αριθμός !

Αλλά ακόμα και αν αφαιρέσουμε στην (***) από τα δύο μέλη το σύνολο I, τότε, όπως αναφέραμε στις ιδιότητες, θα πάρουμε :

$$I + C - I = I - I \Leftrightarrow (I - I) + C = C \Leftrightarrow C + C = C \Leftrightarrow C = C$$

που είναι βέβαια αληθής πρόταση και όχι $C = 0$!!! Θυμίζουμε ότι $C - C = C$.

Να τονίσουμε επίσης επιπροσθέτως ότι είναι $I - I = C$, οπότε πάλι οποιαδήποτε ''διαγραφή '' στην ισότητα $I + C = I$, δεν οδηγεί παρά στην $C = C$!

Σχόλια:

α) Για λόγους απλούστευσης , σε πολλά βιβλία , σχολικά αλλά και πανεπιστημιακά , συνηθίζεται το σύνολο C να αντικαθίσταται από μια πραγματική σταθερά c . Αυτό , αν και προσωρινά απλοποιεί κάπως τους υπολογισμούς , δημιουργεί άλλα προβλήματα, διότι στην (1)και τα δύο μέλη είναι σύνολα και η (1) εκφράζει ισότητα συνόλων. Αν όμως αντί της (1) γράψουμε :

$$\int f(x)dx = F(x) + c \ , \ c \in IR \qquad (2)$$

τότε στην (2) το πρώτο μέλος είναι σύνολο και το δεύτερο είναι συνάρτηση, δηλαδή ένα μόνο στοιχείο του συνόλου που περιέχει το πρώτο μέλος. Η χρήση λοιπόν της (2) αν και δεν δημιουργεί ουσιαστικό πρόβλημα στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων , οδηγεί ορισμένες φορές παράδοξα. Ένα τέτοιο είναι και το εξής :

Ένα …παράδοξο !!!

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε :

$$I=\int f(x)dx=\int \frac{1}{x}dx=\int 1\cdot\frac{1}{x}dx=\int x'\frac{1}{x}dx=$$
$$x\cdot\frac{1}{x}-\int x\cdot(\frac{1}{x})'dx=1-\int x\cdot(-\frac{1}{x^2})'dx=1+\int\frac{1}{x}dx=1+I$$

Από τη σχέση λοιπόν $I=1+I$ που βρήκαμε , διαγράφοντας το I προκύπτει ότι $1=0$, που είναι προφανώς άτοπο. Που έχει γίνει το λάθος ;

Απάντηση

Όπως έχουμε αναφέρει στο σχετικό ορισμό, το $I=\int f(x)dx$ είναι σύνολο .Η σχέση λοιπόν $I=1+I$, με την αφαίρεση του I από τα δύο μέλη (μια και έχει ορισθεί ειδικά η διαφορά δύο συνόλων με στοιχεία συναρτήσεις) δίνει :

$$I=1+I \Leftrightarrow I-I=1+I-I \Leftrightarrow C=1+C \Leftrightarrow C=C$$

Επομένως καμία διαγραφή δεν μπορεί να γίνει με το γνωστό τρόπο , μια και δεν πρόκειται για αριθμούς , αλλά για σύνολα που έχουν τελείως διαφορετική συμπεριφορά στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Κανένα άτοπο λοιπόν δεν μπορεί να προκύψει.

Παρατήρηση

Οι πράξεις με το σύνολο C έχουν , όπως είδαμε ήδη , κάποια ιδιαιτερότητα. Έτσι , αν η F είναι αρχική της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$, τότε στο παραπάνω ερώτημα , σύμφωνα και με το σχετικό θεώρημα , έχουμε :

$$1+I=I \Leftrightarrow 1+F(x)+C=F(x)+C \Leftrightarrow 1+C=C$$

Αυτή η σχέση δεν δίνει άτοπο , διότι :

$$1+C=C \Leftrightarrow 1+C-C=C-C \Leftrightarrow 1+C=C,$$

δηλαδή οδηγεί στον εαυτό της, ακόμα και αν κάνουμε προσπάθεια για ''διαγραφή '' με τον συνήθη τρόπο.

Γενικό συμπέρασμα

Μια σχέση της μορφής $I = g(x) + \lambda I$ με $\lambda \neq 1$, μας επιτρέπει να γράψουμε :

$$I = \frac{1}{1-\lambda} g(x) + C,$$

ως να επρόκειτο δηλαδή να λύσουμε εξίσωση ως προς I και να προσθέσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτό με αυστηρό τρόπο μπορούμε να το αποδείξουμε ακολουθώντας τα εξής βήματα :

$$I = g(x) + \lambda I \Rightarrow F(x) + C = g(x) + \lambda(F(x)+C) \Rightarrow$$
$$F(x) + C = g(x) + \lambda F(x)+\lambda C \Rightarrow (1-\lambda)F(x)+C=g(x)+C \Rightarrow$$
$$F(x) + \frac{1}{1-\lambda} C = \frac{1}{1-\lambda} g(x) + \frac{1}{1-\lambda} C \Rightarrow$$
$$F(x) + C = \frac{1}{1-\lambda} g(x) + C \Rightarrow I = \frac{1}{1-\lambda} g(x) + C$$

Θυμίζουμε ότι αν $I = \int f(x)dx$ και F είναι αρχική της f, τότε ισχύει ότι :

α) $I = F(x) + C$ **β)** $\lambda(F+C)=\lambda F+\lambda C=\lambda F+C$, με $\lambda \neq 0$

Την παραπάνω διαπίστωση τη χρησιμοποιούμε όταν υπολογίζουμε αόριστα ολοκληρώματα και εφαρμόζουμε δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Τέτοια ολοκληρώματα είναι και τα εξής :

$$I = \int e^x \eta\mu x dx \quad , \quad I = \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

Με την παραπάνω μέθοδο βρίσκουμε μια 'εξίσωση ' με άγνωστο το I και λύνοντας ως προς I προσθέτουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης C.

’’

Για χρήση(Να ρωτήσω τον Αχιλλέα που μου το έστειλε τι ακριβώς εννοεί !!!)

Ειδικότερα, αν το τετράγωνο μιας συνάρτησης έχει αρχική, τότε δεν σημαίνει κατ’ανάγκη ότι και η συνάρτηση έχει αρχική . Ένα παράδειγμα είναι και το εξής:

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$G^2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\text{συν}\frac{2}{x}), x\in(0,1]\\ 0 \quad , \quad x=0\end{cases}$$

Έστω ότι G^2 έχει αρχική , ότι η $A(x)$ είναι αρχική της G^2 και η $B(x)$ μια αρχική της G .Τότε

$$[B(\frac{x}{2})]'=\begin{cases}\frac{1}{2}\text{συν}\frac{2}{x}, x\in(0,1]\\ 0 \quad , \quad x=0\end{cases}.$$

Είναι όμως

$$[A(x)-B(\frac{x}{2})]'=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in(0,1]\\ 0 \quad , \quad x=0\end{cases}$$

Αυτή δεν έχει αρχική ,οπότε και η G^2 δεν έχει αρχική.