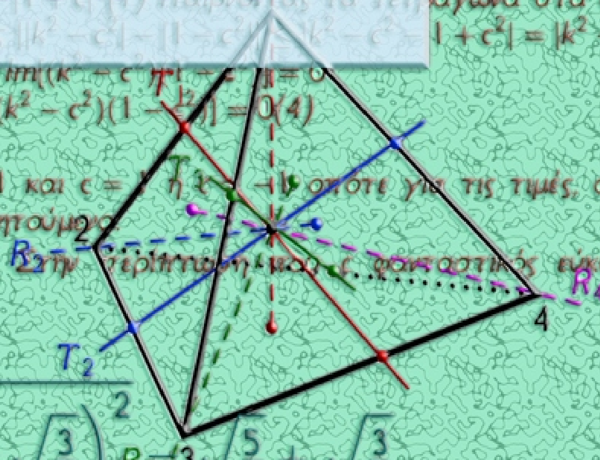
Εικοσιδωδεκάεδρον

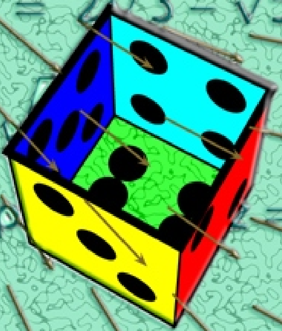
Μαθηματικό Δελτίο

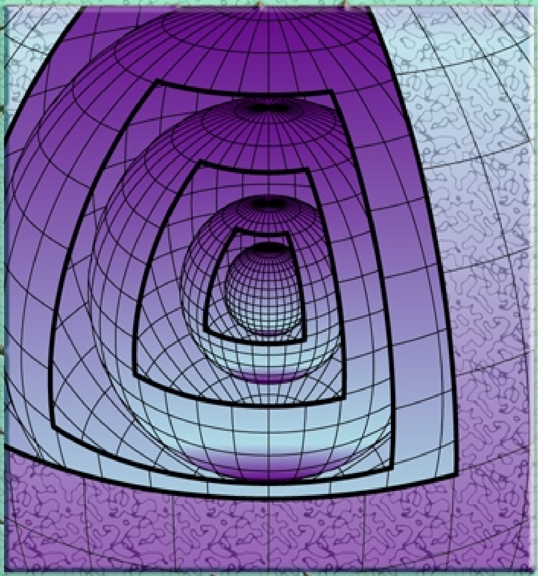


2 χρόνια mathematica.gr

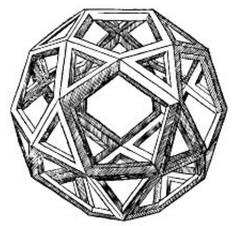
Τεύχος 2ο

Δεκέμβριος 2010





www.mathematica.gr



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

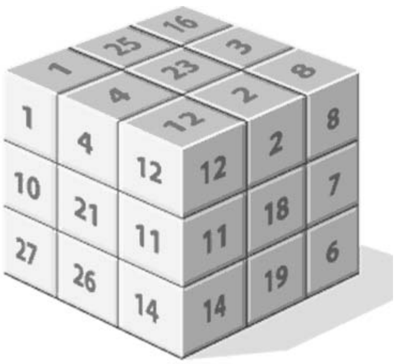
Πηγή :http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση : Πάνος Γιαννόπουλος

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(maths-!!) Σε ένα παιχνίδι με δύο παίκτες, ο πρώτος παίκτης διαλέγει έναν αριθμό* a *με* $1 \leq a \leq 10$ *και ο δεύτερος προσθέτει στον* a *ένα αριθμό* b *με* $1 \leq b \leq 10$. *Αυτό συνεχίζεται... Νικητής αναδεικνύεται αυτός που θα φτάσει πρώτος στο 100. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο γνωρίζουν την τεχνική για να κερδίσουν, ποιος έχει τη δυνατότητα να εξασφαλίσει τη νίκη; Αυτός που ξεκινάει πρώτος ή αυτός που θα μιλήσει δεύτερος;*

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Οι αριθμοί 9 και 13 βρίσκονται κάτω από το 16 (στην ίδια κατακόρυφο με το 16) Το 22 είναι μεταξύ του 9 και του 6. Το 17 είναι δίπλα στο 5 και το 13 αλλά όχι δίπλα στο 19. Το 15 είναι δίπλα στο 24 και το 27. Το 20 είναι πάνω από το 15. Ποιος είναι ο αριθμός του μικρού κύβου στο κέντρο του μεγάλου·*



Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Μπάμπης Στεργίου) Κάθε απόγευμα συνηθίζω να κάνω περπατώντας μια ακριβώς βόλτα γύρω από το κυκλικό δασάκι της πόλης. Συγχρόνως, ο φίλος μου, με τον οποίο ξεκινάμε και τελειώνουμε μαζί την άθληση, τρέχει γύρω από το δασάκι με την ίδια κατεύθυνση αλλά μέχρι να ξανασυναντηθούμε στην έξοδο με προσπερνάει δυο φορές. Αν με το φίλο μου ξεκινήσουμε τη βόλτα με αντίθετη κατεύθυνση και με τις ίδιες με πριν ταχύτητες, πόσες φορές θα συναντηθούμε στη διάρκεια της άθλησης(οι συναντήσεις στην αφετηρία δεν προσμετρώνται);*

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Δημήτρης Ιωάννου) Σε ένα σχολείο οι μαθητές είναι περισσότεροι από* 170 *και δεν ξεπερνάνε τους* 330. *Από μια έρευνα που έκανε μια ομάδα μαθητών, διαπιστώθηκε ότι το* $\frac{1}{3}$ *των μαθητών έρχονται στο σχολείο με τα πόδια, τα* $\frac{2}{7}$ *με Ι.Χ αυτοκίνητο, το* $\frac{1}{4}$ *με ποδήλατο και οι υπόλοιποι με λεωφορείο. Πόσους μαθητές έχει το σχολείο;*

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Παύλος Μαραγκουδάκης) Ο Γιάννης έφυγε από την πόλη Α στις έξι και* x *λεπτά το πρωί και έφτασε στην πόλη Β στις έξι και* y *λεπτά το πρωί της ίδιας ημέρας. Παρατήρησε ότι και στην αρχή και στο τέλος του ταξιδιού ο λεπτοδείκτης του ρολογιού του σχημάτιζε την ίδια γωνία 110 μοιρών με τον ωροδείκτη. Πόσα λεπτά χρειάστηκε ο Γιάννης για να πάει από την πόλη Α στην πόλη Β·*

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Γιώργος Ρίζος) Κάνουμε σκοποβολή με αεροβόλο πιστόλι σε ένα τετράγωνο στόχο* $20 \times 20\ cm$. *Πετυχαίνουμε το στόχο σε πέντε βολές. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον απ΄ αυτές απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από 15 εκατοστά.*

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Εάν* $x^2 + y^2 = 3xy$, *όπου* x, y *διαφορετικοί πραγματικοί, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης*

$$\left(\frac{x}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x-y}\right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Αν* $0 < b < a$ *και* $a^2 + b^2 = 6ab$ *να υπολογιστεί ο λόγος* $\dfrac{a+b}{a-b}$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Χρήστος Στραγάλης) Να λυθεί στους πραγματικούς η εξίσωση:*

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Σπύρος Καρδαμίτσης) Έστω η εξίσωση*

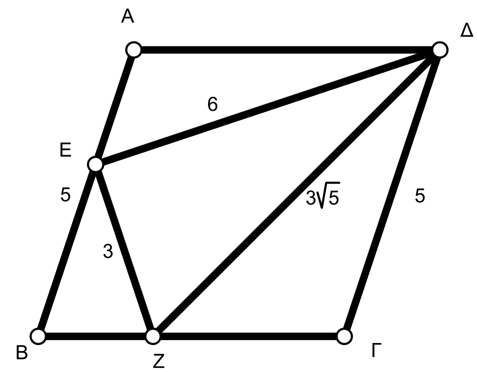
$$|\alpha - 1|\, x^2 + |3 - 2\alpha|\, x + |1 - \alpha| = 0$$

με $\alpha \neq 1$ *ως προς* x *έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.*
α) Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το α.
β) Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια είναι αντίστροφη της άλλης.
γ) Αν η μια ρίζα (η ρ_1*) είναι τετραπλάσια της άλλης (της* ρ_2*) να βρείτε τις ρίζες* ρ_1 *και* ρ_2 *δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό α, αν οι ρίζες είναι αυτές του τρίτου ερωτήματος.*

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Σπύρος Καρδαμίτσης) Έστω Ε σημείο της πλευράς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΕΔΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ, να δείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ + ΓΖ.*

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Μιχάλης Νάννος) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΓΔ=5.*



Πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ παίρνουμε σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε: ΔΕ=2ΕΖ=6, ΔΖ διχοτόμος της γωνίας ΕΔΓ και ίση με $3\sqrt{5}$. *Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.*

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Παναγιώτης Μπίσδας) Να λυθεί η εξίσωση*

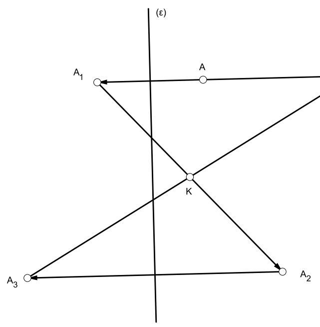
$$\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-5|} = 2$$

με x *πραγματικος αριθμός*

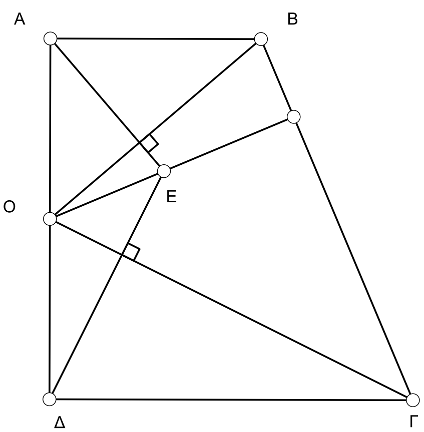
ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Να αποδείξετε ότι αν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε η διαφορά της προόδου ισούται με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.*

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Νίκος Μαυρογιάννης) Έστω μία σταθερή ευθεία* ε *και ένα σταθερό σημείο* K *εκτός της* ε. *Για κάθε* A *ονομάζουμε:*
A_1 *το συμμετρικό του* A *ως προς* ε
A_2 *το συμμετρικό του* A_1 *ως προς* K
A_3 *το συμμετρικό του* A_2 *ως προς* ε
B *το συμμετρικό του* A_3 *ως προς* K
Να αποδείξετε ότι το μήκος του AB *είναι 4-πλάσιο της απόστασης του* K *από την* ε.



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Αντώνης Κυριακόπουλος)* *Θεωρούμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι γωνίες Α και Δ είναι ορθές. Ονομάζουμε Ο το μέσον της πλευράς ΑΔ. Η κάθετος από το Α στην ευθεία ΟΒ τέμνει την κάθετο από το Δ στην ευθεία ΟΓ σε ένα σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΕ είναι κάθετος στην ευθεία ΒΓ.*



Μαθηματικά Β' Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Βασίλης Μαυροφρύδης)* *Αν* $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$ *δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, αποδείξτε ότι το διάνυσμα* $\vec{\delta} = \left|\vec{\beta}\right| \vec{\alpha} + |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ *είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της* $\widehat{\mathrm{AOB}}$

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Χρηστος)* *Αν* $3\overrightarrow{\mathrm{KA}}+2\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=5\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$ *και* $\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|=8$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|=5$ *. Να δείξετε ότι:*
α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ορθογώνιο.
β) Αν $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$ *είναι κάθετο στο* $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ *τότε* $\lambda = -\frac{32}{7}$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Γιώργος Τσικαλουδάκης)* *Έχουμε 200 παρατηρήσεις ομαδοποιημένες σε 5 κλάσεις, ίσου πλάτους. Το πλάτος κλάσης είναι 4, οι συχνότητες κατά αύξουσα σειρά είναι* $20, 60, 50, 40, 30$ *και η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 20.*

1. *Να βρεθούν οι κλάσεις.*
2. *Αυξάνουμε την κάθε παρατήρηση κατά 5 μονάδες και εν συνεχεία τις αυξημένες παρατηρήσεις τις μειώνουμε κατά 20 τοις εκατό.*
   (α) *Να βρεθεί το εύρος των νέων παρατηρήσεων.*
   (β) *Να βρεθούν τα όρια των νέων κλάσεων (ίσου πλάτους), αν το πλήθος τους παραμείνει 5.*
   (ς) *Να αποδείξετε ότι οι συχνότητες των κλάσεων όπως αυτές διαμορφώνονται στο β) ερώτημα παραμένουν όπως ήταν αρχικά: 20, 60 , 50 , 40 ,30 .*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Αντώνης Κυριακόπουλος)* *Σε ένα κουτί βάζουμε* $\nu^2 - \nu + 2$ *άσπρες σφαίρες και* $\nu^2 - 2$ *μαύρες σφαίρες, όπου* ν *φυσικός αριθμός με* $\nu \geq 2$*. Από το κουτί αυτό βγάζουμε στην τύχη μια σφαίρα.*

1. *Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:* A_ν *: «Η σφαίρα που βγάλαμε είναι άσπρη».*
2. *Υπάρχει* ν *με:* $P(A_\nu) = P(A'_\nu)$*;*
3. *Να βρείτε το* ν *ώστε η πιθανότητα να είναι η μικρότερη δυνατή.*

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να υπολογίσετε την δύναμη*

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^{72}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να λύσετε την εξίσωση*

$$2z^2 = 6iz + 3, \ z \in \mathbb{C}$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Παύλος Διαμαντής)* *Δίνεται συνάρτηση* f *τέτοια ώστε* $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$*. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $g(x) + xf(x) - x^2 = 1, \forall x \in R$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Μπάμπης Στεργίου)* *Δύο συναρτήσεις* f, g *είναι γνησίως αύξουσες στο* $\mathbb{R}$ *και με αρνητικές τιμές. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$3f(x) + 5g(x) + 8f(x)g(x) = 0 \quad (1)$$

έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες στο* $\mathbb{R}$ *συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει*

$$(f'(x))^2 = f(x)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Χρήστος Κυριαζής)* *Υπάρχει συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο,για την οποία να ισχύει:* $f' = f \circ f$*;*

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση* f *στο* $[0, +\infty)$ *και* $\lim\limits_{x\to+\infty} [xf(x)] = 0$*, να αποδείξετε ότι:*

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\int_{x^2}^{2x^2} f(t)\,dt\right] = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί το*

$$I := \int_0^\pi \cos(2x + 2\sin(3x))\,dx$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Math Rider) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει* $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x^2}$, *για κάθε* $x>0$ *και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο* $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
α) *Να βρείτε την συνάρτηση* f *και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.*
β) *Να αποδείξετε ότι*

$$\int_{2\sqrt{3}}^{3} e^x dx \leq \int_{2\sqrt{3}}^{3} x^e dx$$

για κάθε $x>0$.
γ) *Θεωρούμε την συνάρτηση* $g(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$. *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με*

$$h(x)=g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)-\ln^2 x$$

είναι σταθερή στο διάστημα $(0,+\infty)$.
δ) *Να λύσετε την εξίσωση*

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt+2-2xf(x)=\frac{2}{x}-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{t}dt$$

$x>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *για την οποια γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση* f' *είναι γνήσια αύξουσα στο* $\mathbb{R}$. *Αν υπάρχει* $x_0\in\mathbb{R}$ *τέτοιος ώστε* $f'(x_0)>0$, *να υπολογισθεί το όριο* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Juniors

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Μπάμπης Στεργίου) Να λυθεί το σύστημα :*

$$\begin{cases} 2x=y+\frac{2}{y} \\ 2y=z+\frac{2}{z} \\ 2z=x+\frac{2}{x} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε το σύνολο*

$$A=\{[\frac{2x^2+10x+19}{x^2+5x+7}]/x\in\mathbb{R}\}$$

(Οι αγκύλες σημαίνουν ακέραιο μέρος)

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί. Seniors

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Μπάμπης Στεργίου) Αν ισχύει* $x,y,z>0$ *και* $x+y+z=1$ *να αποδειχθεί ότι*

$$3xyz(xy+yz+zx)+2xyz\leq(xy+yz+zx)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+2xy+1$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x *και* y.

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 2010) Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων* $c_1(O_1,r_1)$ *και* $c_2(O_2,r_2)$ *στα διακεκριμένα σημεία Α και Β, αντιστοίχως. Αν το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων* $c_1(O_1,r_1)$, $c_2(O_2,r_2)$ *και ισχύει ότι* $r_1<r_2$, *να αποδείξετε ότι* $MA<MB$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προκριματικός Διαγωνισμός 2010) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις* $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ *οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα:* $f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)=\dfrac{1}{y}\cdot f(f(x))$, *για κάθε* $x,y\in\mathbb{R}^*$ *και είναι γνησίως μονότονες στο* $(0,+\infty)$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Νίκος Κολλιόπουλος) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n(k-1)^k}{\sum_{k=1}^n(k+1)^k}$$

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω* $A_n=\{k\in\{1,2,\ldots,n\}:$ *το πρώτο ψηφίο του* 2^k *είναι 1*$\}$ *και*

$$a_n=|A_n|$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

και αν υπάρχει να υπολογιστεί.

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Να εξεταστεί αν τα υποσώματα*

$$K_1=\{a+b\sqrt{p}:a,b\in\mathbb{Q}\}$$

και

$$K_2=\{a+b\sqrt{q}:a,b\in\mathbb{Q}\}$$

των πραγματικών, όπου p,q *διακεκριμένοι πρώτοι, είναι ισόμορφα.*

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Νικόλαος Κατσίπης) Να υπολογιστεί το άθροισμα*

$$\sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} e^{\frac{2\pi ik}{n}}$$

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Δημήτρης Σκουτέρης) Δίνεται η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε, για κάθε* $x_0\in\mathbb{R}$, *υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x_0-)\equiv\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

και

$$f(x_0+)\equiv\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

με τιμες στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των σημείων ασυνέχειας της f *είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Γιώργος Παπαδόπουλος) Να υπολογιστεί το άθροισμα*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{3n}{n}\frac{1}{8^n}$$

Γεωμετρία ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Γρηγόρης Κωστάκος) Νά αποδειχθεί ότι άν όλες οι εφαπτομένες ευθείες μιάς λείας καί κανονικής επίπεδης καμπύλης διέρχονται από κοινό σημείο, τότε η καμπύλη είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας).*

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Δημήτρης Χριστοφίδης) (Το Θεώρημα Καραθεοδωρή) Δίνεται ένα υποσύνολο* X *του* $\mathbb{R}^n$ *και ένα σημείο* x *που ανήκει στην κυρτή θήκη του* X. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει υποσύνολο* Y *του* X *ώστε:*

- $|Y|\leqslant n+1$
- *Το* x *ανήκει στην κυρτή θήκη του* Y.

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Γιάννης Τσόπελας) Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς* ν *με άθροισμα ψηφίων* $\Sigma(\nu)$ *οι οποίοι ικανοποιούν συγχρόνως τις παρακάτω ιδιότητες*

- $\Sigma(\nu)|\nu$ *και*
- *Οι αριθμοί* $\Sigma(\nu)$ *και* $\dfrac{\nu}{\Sigma(\nu)}$ *είναι πρώτοι μεγαλύτεροι του 3.*

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Σεραφείμ Τσιπέλης)* *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία*

$$a_n = [n\sqrt{2}] \ \ \mu\varepsilon \ \ n\epsilon\mathbb{N}$$

έχει άπειρους όρους που είναι δυνάμεις του 2.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Χρήστος Κυριαζής)* *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Να αποδείξετε πως για κάθε θετικό ακέραιο* n *υπάρχουν αριθμοί*

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 < ... < \vartheta_n$$

στο διάστημα $[a, b]$ *τέτοιοι ώστε:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\vartheta_1) + f'(\vartheta_2) + ... + f'(\vartheta_n)}{n}$$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Λευτέρης Πρωτοπαπάς)* *Αν* A *είναι ένας* $\nu \times \nu$ *πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση* $A^2 - A + I = \mathbb{O}$, *να αποδείξετε ότι ο πίνακας* $B = A - kI$ *είναι αντιστρέψιμος για κάθε* $k \in \mathbb{R}$ *και να βρεθεί ο αντίστροφός του συναρτήσει του πίνακα* A.

Ο Φάκελος του καθηγητή. Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Στράτος Παπαδόπουλος)* *Αν μια συνάρτηση* φ *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και ισχύει* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to \beta^-} f(x) = -\infty$, *τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* ξ *στο (α, β) τέτοιο ώστε* $f'(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Σπύρος Καπελλίδης)* *Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *υπάρχει παράγουσά της* g *με την ιδιότητα* $g(x) = f^2(x) + f(x), \forall x > 0$, *να αποδειχθεί ότι* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

Ο Φάκελος του καθηγητή. Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange*

Πηγή: Παναγιώτης Μάγειρας, «Αλγεβρικά θέματα», Τόμος 5, 1974

Να κατασκευασθεί πολυώνυμο $f(x)$ *βαθμού μικρότερου ή ίσου του* $\nu - 1$, *ώστε για τις διακεκριμμένες τιμές* $x_1, x_2, ..., x_\nu$ *της μεταβλητής* x, *να παίρνει αντίστοιχα τις τιμές* $y_1, y_2, ..., y_\nu$, *δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις:*

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, ..., f(x_\nu) = y_\nu$$

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Θάνος Μάγκος) (Μία ειδική περίπτωση του 17ου προβλήματος του Hilbert). Ας είναι* $f(x)$ *πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, ώστε* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι υπάρχουν πολυώνυμα* $A(x), B(x)$ *με πραγματικούς συντελεστές, ώστε*

$$f(x) = (A(x))^2 + (B(x))^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

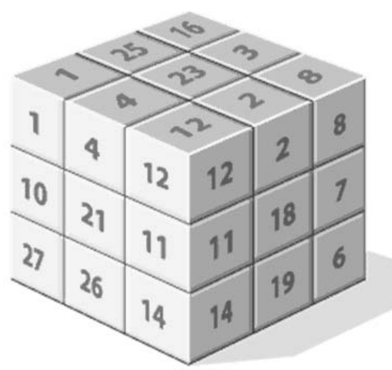
ΑΣΚΗΣΗ 1 *(maths-!!) Σε ένα παιχνίδι με δύο παίκτες, ο πρώτος παίκτης διαλέγει έναν αριθμό a με $1 \leq a \leq 10$ και ο δεύτερος προσθέτει στον a ένα αριθμό b με $1 \leq b \leq 10$. Αυτό συνεχίζεται... Νικητής αναδεικνύεται αυτός που θα φτάσει πρώτος στο 100. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο γνωρίζουν την τεχνική για να κερδίσουν, ποιος έχει τη δυνατότητα να εξασφαλίσει τη νίκη; Αυτός που ξεκινάει πρώτος ή αυτός που θα μιλήσει δεύτερος;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=9776

Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή) Για να μη μπορεί ο άλλος παίκτης να νικήσει (να πει 100), θα πρέπει εγώ να έχω πει το 89 (11 μικρότερο από το 100). Για να πω το 89 θα πρέπει πριν να έχω πει πάλι 11 μικρότερο του 89 (δηλαδή 78) κ.λ.π. Οπότε, αν και ο άλλος παίκτης γνωρίζει τη στρατηγική πρέπει να ξεκινήσω πρώτη. Ας συμπληρώσω τους αριθμούς που πρέπει να πω :1,12,23,34,45,56,67,78,89

Σχόλιο (Δημήτρης Χριστοφίδης) Στην πράξη φυσικά, αν ακολουθήσουμε την τεχνική της Φωτεινής θα ξεσκεπαστούμε γρήγορα. Νομίζω ότι είναι πιο ασφαλές αρχικά να παίξουμε τυχαία και προς το τέλος να επιλέξουμε κάποιο αριθμό ώστε να κάνουμε το άθροισμα ίσο με 67 (ή αν είμαστε άτυχοι ίσο τότε να πάμε για το 78) και μετά να συνεχίσουμε με την τακτική. Αυτό θα μας κερδίσει περισσότερα παιχνίδια (ακόμη και όταν παίζουμε δεύτεροι) μέχρι ο αντίπαλος να αντιληφθεί την στρατηγική.

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Οι αριθμοί 9 και 13 βρίσκονται κάτω από το 16 (στην ίδια κατακόρυφο με το 16) Το 22 είναι μεταξύ του 9 και του 6. Το 17 είναι δίπλα στο 5 και το 13 αλλά όχι δίπλα στο 19. Το 15 είναι δίπλα στο 24 και το 27. Το 20 είναι πάνω από το 15. Ποιος είναι ο αριθμός του μικρού κύβου στο κέντρο του μεγάλου·*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=8394

Λύση 1 (Φώτης Μαραντίδης)
Στην κάθετη πίσω από το 25 είναι 20 , 15.
Στην κάθετη πίσω από το 16 είναι 13 , 9.
Στην κάθετη πίσω από το 3 είναι 17 , 22
Άρα ο ζητούμενος κύβος είναι ο 5.

Λύση 2 (Δημήτρης Κατσίποδας)
Το 5 έβγαλα και εγω. Δίνω τις κατόψεις του κύβου από πάνω προς τα κάτω.

1	25	16
4	23	3
12	2	8

10	20	13
21	5	17
11	18	7

27	15	9
26	24	22
14	19	6

Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Μπάμπης Στεργίου) Κάθε απόγευμα συνηθίζω να κάνω περπατώντας μια ακριβώς βόλτα γύρω από το κυκλικό δασάκι της πόλης. Συγχρόνως, ο φίλος μου, με τον οποίο ξεκινάμε και τελειώνουμε μαζί την άθληση, τρέχει γύρω από το δασάκι με την ίδια κατεύθυνση αλλά μέχρι να ξανασυναντηθούμε στην έξοδο με προσπερνάει δυο φορές. Αν με το φίλο μου ξεκινήσουμε τη βόλτα με αντίθετη κατεύθυνση και με τις ίδιες με πριν ταχύτητες, πόσες φορές θα συναντηθούμε στη διάρκεια της άθλησης(οι συναντήσεις στην αφετηρία δεν προσμετρώνται);*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&p=62943

Λύση (chris t) Αφού η βόλτα μου αρχίζει και τελειώνει ταυτόχρονα και ο φίλος μου με προσπερνά 2 φορές, συμπεραίνω ότι ο ενώ εγώ έκανα 1 γύρο αυτός έχει ολοκληρώσει 4 (Η 1η και η 4η φορά που συναντιόμαστε δεν μετράνε καθώς είναι στην αφετηρία και στον τερματισμό αντίστοιχα). Δηλαδή έχει τετραπλάσια ταχύτητα από εμένα.

Αν κινηθούμε αντίρροπα,τη στιγμή που θα συναντηθούμε τη 1η φορά εγώ θα έχω διανύσει το $\frac{1}{x}$ και αυτός τα $\frac{4}{x}$ του κύκλου.

Επομένως $\frac{1}{x} + \frac{4}{x} = 1$ ή $x = 5$.

Επομένως θα συναντηθούμε όταν θα εγώ έχω διανύσει τα $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ του κύκλου, δηλαδή 4 φορές. (Στα $\frac{5}{5}$ θα τερματίσουμε ταυτόχρονα και δεν το υπολογίζουμε).

Σχόλιο (Δημήτρης Χριστοφίδης) Γνωρίζουμε ότι αύριο εγώ θα τρέξω ένα γύρο και ο φίλος μου τέσσερις με αντίθετη κατεύθυνση. Όμως (χωρίς να υπολογίζουμε την αρχική και τελική συνάντηση) κάθε γύρο που κάνει ο φίλος μου με συναντάει μία και μόνο μία φορά. Άρα συνολικά θα συναντηθούμε τέσσερις φορές.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Δημήτρης Ιωάννου) Σε ένα σχολείο οι μαθητές είναι περισσότεροι από 170 και δεν ξεπερνάνε τους 330. Από μια έρευνα που έκανε μια ομάδα μαθητών, διαπιστώθηκε ότι το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έρχονται στο σχολείο με τα πόδια, τα $\frac{2}{7}$ με Ι.Χ αυτοκίνητο, το $\frac{1}{4}$ με ποδήλατο και οι υπόλοιποι με λεωφορείο. Πόσους μαθητές έχει το σχολείο;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&p=62516

Λύση (Πρωτοπαπάς Λευτέρης)Αφού:

- το 1/3 των μαθητών πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια, το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι πολλαπλάσιο του 3,
- τα 2/7 των μαθητών πηγαίνουν στο σχολείο με με Ι.Χ αυτοκίνητο, το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι πολλαπλάσιο του 7,
- το 1/4 των μαθητών πηγαίνουν στο σχολείο με ποδήλατο, το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι πολλαπλάσιο του 4.

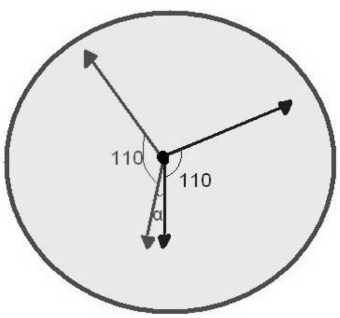
συνεπώς το πλήθος των μαθητών είναι πολλαπλάσιο των 3, 7, 4 και βρίσκεται ανάμεσα στο 170 και το 330, οπότε είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(3,4,7)=84 και βρίσκεται ανάμεσα στο 170 και το 330, οπότε οι μαθητές είναι 252.

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Παύλος Μαραγκουδάκης) Ο Γιάννης έφυγε από την πόλη Α στις έξι και x λεπτά το πρωί και έφτασε στην πόλη Β στις έξι και y λεπτά το πρωί της ίδιας ημέρας. Παρατήρησε ότι και στην αρχή και στο τέλος του ταξιδιού ο λεπτοδείκτης του ρολογιού του σχημάτιζε την ίδια γωνία 110 μοιρών με τον ωροδείκτη. Πόσα λεπτά χρειάστηκε ο Γιάννης για να πάει από την πόλη Α στην πόλη Β·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=3620

Λύση (Σταυρουλίτσα) Στο ρολόι φαίνεται η αρχική θέση των δεικτών και η τελική τους θέση, ενώ a είναι η απόσταση που διανύει ο μικρός δείκτης.



Άρα ο μικρός δείκτης μετακινήθηκε α μοίρες και ο μεγάλος $220 + a$. Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε την εξής αναλογία κίνησης του μικρού και μεγάλου δείκτη(γιατί γνωρίζουμε πως όταν ο μεγάλος κινείται 360 τότε μικρός κινείται 360/12=30 μοίρες): $\frac{30}{360} = \frac{a}{220+a} \Leftrightarrow 220 + a = 12a \Leftrightarrow a = \frac{220}{11} \Leftrightarrow a = 20$ Δηλαδή ο μικρός μετακινήθηκε 20 μοίρες και ο μεγάλος 240 μοίρες, δηλαδή έκανε: $\frac{60}{360} = \frac{x}{240} \Leftrightarrow x = 40$ λεπτά.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Γιώργος Ρίζος) Κάνουμε σκοποβολή με αεροβόλο πιστόλι σε ένα τετράγωνο στόχο 20×20 cm. Πετυχαίνουμε το στόχο σε πέντε βολές. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον απ' αυτές απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από 15 εκατοστά.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=5886

Λύση (Broly) Διαμερίζουμε το τετράγωνο σε 4 τετράγωνα πλευράς 10 το cm καθένα . Τουλάχιστον λοιπόν δυο από αυτές τις βολές αυτές λοιπόν θα ανήκουν στο ίδιο τετράγωνο. Με εφαρμογή του πυθαγορείου βρίσκουμε ότι η διαγώνιος καθενός από αυτά τα τετράγωνα είναι ίση με 200 και αφού βλέπουμε ότι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να φτάσουν είναι $14.14cm < 15cm$

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Εάν $x^2 + y^2 = 3xy$, όπου x, y διαφορετικοί πραγματικοί, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης*

$$\left(\frac{x}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x-y}\right)^2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=10378

Λύση (Σπύρος Καρδαμίτσης)Έχουμε:
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 3xy - 2xy = xy$ και η παράσταση γράφεται:

$$\left(\frac{x}{x-y}\right)^2+\left(\frac{y}{x-y}\right)^2=\frac{x^2}{(x-y)^2}+\frac{y^2}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}=\frac{3xy}{xy}=3$$

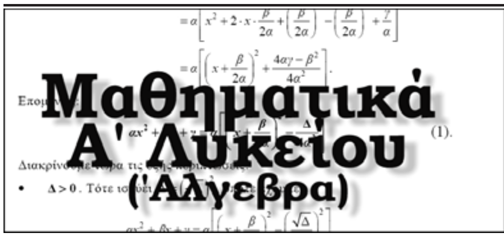
ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Αν* $0<b<a$ *και* $a^2+b^2=6ab$ *να υπολογιστεί ο λόγος* $\dfrac{a+b}{a-b}$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=9678

Λύση (Αναστάσιος Κοτρώνης)

$$I=\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow I^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{8ab}{4ab}=2\Rightarrow I=\sqrt{2}.$$



Επιμέλεια : Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Χρήστος Στραγάλης) Να λυθεί στους πραγματικούς η εξίσωση:*

$$\frac{x^2}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&p=44884#p44884

Λύση (Θάνος Μάγκος) Πρέπει $x>1$. Θέτουμε $a=\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}, b=\sqrt{x-1}, c=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}$. Ισχύει $abc=1$, και, λόγω της εξίσωσης έχουμε:

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$$

Αν ονομάσουμε $q=a+b+c$, τα a,b,c είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$y^3-qy^2+qy-1=0$$

Αυτή η εξίσωση έχει ρίζα το 1. Άρα κάποιο από τα a,b,c είναι ίσο με 1. Το a είναι εύκολο να δούμε ότι δεν μπορεί να ισούται με 1. Ομοίως το c. Πράγματι, τότε θα έπρεπε να ισχύει

$x^4+1=x$. Όμως $x^4+1\geq 2x^2>x$, αφού $x>1$.

Άρα $b=1$, απ'οπου βρίσκουμε $x=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Σπύρος Καρδαμίτσης) Έστω η εξίσωση*

$$|\alpha-1|\,x^2+|3-2\alpha|\,x+|1-\alpha|=0$$

με $\alpha\neq 1$ *ως προς* x *έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.*
α) Να βρεθεί σε ποιο διάστημα ανήκει το α.
β) Να δείξετε ότι οι ρίζες της είναι αρνητικοί αριθμοί και η μια είναι αντίστροφη της άλλης. γ) Αν η μια ρίζα (η ρ_1*) είναι τετραπλάσια της άλλης (της* ρ_2*) να βρείτε τις ρίζες* ρ_1 *και* ρ_2 *δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό α, αν οι ρίζες είναι αυτές του τρίτου ερωτήματος.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&p=63839#p63839

Λύση (Χρήστος Στραγάλης)

α) $|\alpha-1|\,x^2+|3-2\alpha|\,x+|1-\alpha|=0$

Για να έχει η παραπάνω εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει και αρκεί:

$\Delta>0\Leftrightarrow|3-2a|^2-4|a-1||1-a|>0\Leftrightarrow(3-2a)^2-4(1-a)^2>0\Leftrightarrow(3-2a-2+2a)(3-2a+2-2a)>0\Leftrightarrow 5-4a>0\Leftrightarrow a<\dfrac{5}{4}, a\neq 1$

άρα $a\in(-\infty,1)\cup(1,\frac{5}{4})$

β) Αν $\rho_1,\rho_2\neq 0$ είναι οι δύο ρίζες της αρχικής εξίσωσης με $\rho_1\neq\rho_2$ τότε απο τους τύπους του ῞ιετα έχουμε:

$\rho_1\rho_2=\frac{|1-a|}{|a-1|}=\frac{|1-a|}{|1-a|}=1>0$ άρα οι δύο ρίζες είναι αντίστροφες αφού έχουν γινόμενο ίσο με 1 και ομόσημες αφού το γινόμενό τους είναι θετικό.

$\rho_1+\rho_2=-\frac{|3-2a|}{|a-1|}<0$ Αφού το άθροισμα των ριζών είναι αρνητικό τότε και δύο είναι αρνητικές αφού είναι και ομόσημες.

γ) Είναι $\rho_1=4\rho_2\overset{\rho_2\neq 0}{\Rightarrow}\rho_1\rho_2=4\rho_2^2\Rightarrow 4\rho_2^2=1\Rightarrow\rho_2^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\rho_2=-\frac{1}{2}$ αφού οι ρίζες είναι αρνητικές.

Επίσης $\rho_1\rho_2=1\Rightarrow\rho_1=-2$

Τελικά $(\rho_1,\rho_2)=\left(-2,\dfrac{-1}{2}\right)$

δ) $\rho_1+\rho_2=-\dfrac{|3-2a|}{|a-1|}\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}=\dfrac{|3-2a|}{|a-1|}\Leftrightarrow|6-4a|=|5a-5|$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6-4a=5a-5\\ \acute{\eta}\\ 6-4a=-5a+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{11}{9}<\frac{5}{4}\\ \acute{\eta}\\ a=-1\end{cases}$$

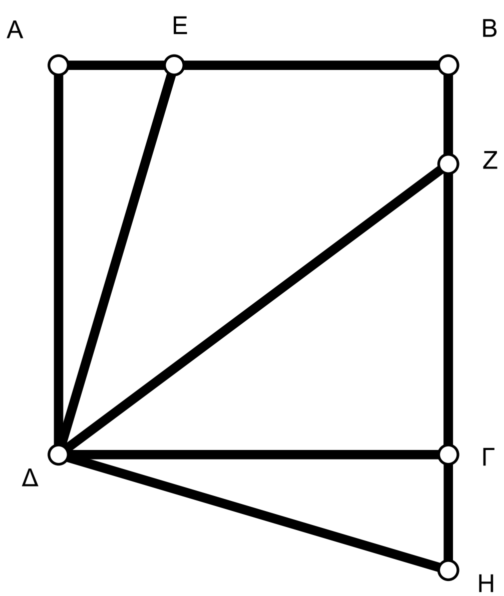
Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Σπύρος Καρδαμίτσης) Έστω Ε σημείο της πλευράς ΑΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΕΔΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ, να δείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ + ΓΖ.*

---

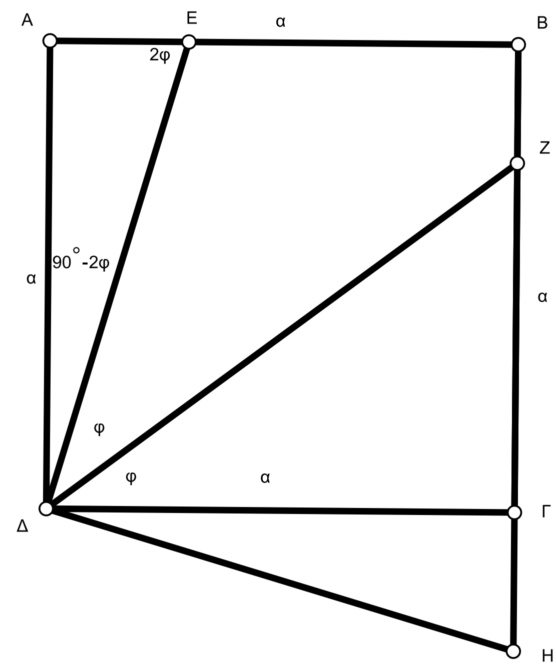
http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=480

Λύση 1 (Αθ. Μπεληγιάννης) Προεκτείνουμε την ΒΓ προς το Γ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΓΗ=ΑΕ . Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΓΗ είναι ίσα, άρα ΔΕ=ΔΗ και $\widehat{A\Delta E} = \widehat{\Gamma\Delta E}$. Είναι $\widehat{\Delta ZH} = \widehat{A\Delta Z} = \omega + \widehat{A\Delta E} = \omega + \widehat{\Gamma\Delta H} = \widehat{Z\Delta H}$ Άρα το τρίγωνο ΔΗΖ είναι ισοσκελές, δηλ. ΔΗ=ΖΗ άρα ΔΕ=ΓΖ+ΓΗ και ΔΕ=ΓΖ+ΑΕ.



Λύση 2 (Σπύρος Καρδαμίτσης) Από την κορυφή Α του τετραγώνου φέρνουμε την ΑΚ κάθετη στην ΔΖ που τέμνει την ΔΕ στο σημείο Λ και την ΔΓ στο σημείο Ρ. Στο τρίγωνο ΛΔΡ η ΔΚ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, επομένως
ΔΛ = ΔΡ (1)
και $P_1 = \Lambda_1$. Όμως $P_1 = \mathrm{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ) και $\Lambda_1 = \Lambda_2$ (ως κατακορυφή), άρα $\mathrm{A}_1 = \Lambda_2$ οπότε το τρίγωνο ΑΕΛ είναι ισοσκελές, επομένως είναι
ΑΕ = ΕΛ (2)
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΡ και ΑΓΖ έχουμε: ΑΔ = ΔΓ και $\mathrm{A}_2 = \Delta_2$ (έχουν τις πλευρές τους κάθετες), άρα είναι ίσα, επομένως
ΖΓ = ΔΡ (3)
Τότε από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε: ΔΕ = ΔΛ + ΛΕ = ΔΡ + ΑΕ = ΖΓ + ΑΕ.

Λύση 3 (Γιώργος Ρίζος)



Στο ΔΓΖ είναι $\Gamma Z = \alpha \varepsilon \varphi \varphi$, στο ΑΔΕ είναι $AE = \alpha \sigma \varphi 2\varphi$, άρα

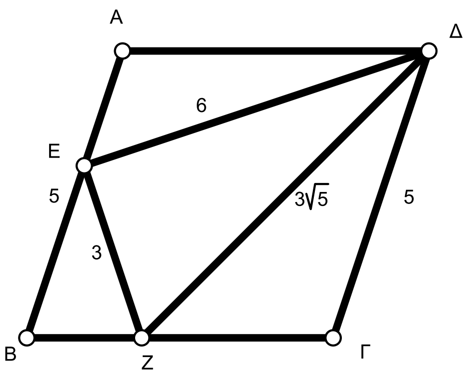
$$AE + \Gamma Z = \alpha \left(\varepsilon\varphi\varphi + \sigma\varphi 2\varphi \right) =$$

$$\alpha \left(\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\varphi}{\eta\mu 2\varphi} \right) =$$

$$\alpha \left(\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} + \frac{1 - 2\eta\mu^2\varphi}{2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi} \right) = \alpha \left(\frac{2\eta\mu^2\varphi + 1 - 2\eta\mu^2\varphi}{\eta\mu 2\varphi} \right) =$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 2\varphi} = \Delta E$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Μιχάλης Νάννος) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΓΔ=5.*

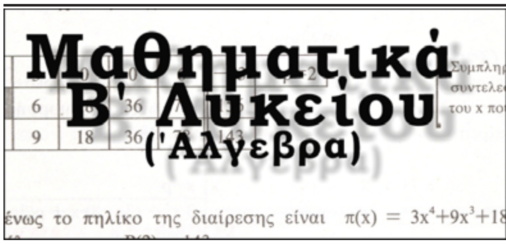


Πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ παίρνουμε σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα, τέτοια ώστε: ΔΕ=2ΕΖ=6, ΔΖ διχοτόμος της γωνίας ΕΔΓ και ίση με $3\sqrt{5}$. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&p=59752#p59752

Λύση (kostas136) Χρησιμοποιώντας τον νόμο συνημιτόνων στο $\triangle \Delta EZ$ προκύπτει $cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$
$cos2\varphi = 2cos^2\varphi - 1 = \dfrac{3}{5} \Rightarrow sin2\varphi = \sqrt{1 - cos^2 2\varphi} = \dfrac{4}{5}$
Άρα φέρνοντας $EK \perp DC$ προκύπτει: $sin2\varphi = \dfrac{EK}{ED} \Rightarrow$
$EK = \dfrac{24}{5} \Rightarrow (ABCD) = DC \cdot EK = 24$



Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Παναγιώτης Μπίσδας) Να λυθεί η εξίσωση*

$$\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-5|} = 2$$

με x πραγματικος αριθμός

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=11407

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Ας είναι x μια λύση της εξίσωσης. Ας θέσουμε $a = \sqrt{|x-1|}, b = \sqrt{|x-5|}$.

Είναι προφανώς

$$a, b \geq 0 \text{ και } a + b = 2 \ (1)$$

Όμως,

$$a^2 + b^2 = |x-1| + |x-5| \geq |x - 1 - (x-5)| = 4$$

Από την (1) έχουμε $a^2 + b^2 = 4 - 2ab \leq 4$.

Άρα πρέπει $a = 0$ ή $b = 0$, οπότε έχουμε $x = 1$ ή $x = 5$ (δεκτές)

Λύση 2 (Κώστας Δόρτσιος) Θεωρούμε τις περιπτώσεις α) Ο αριθμός x να είναι μικρότερος του 1 . Αυτό είναι αδύνατο γιατί τότε: $|x-5| > 4 \Rightarrow \sqrt{|x-5|} > 2$ Όμοια και η περίπτωση που χ είναι μεγαλύτερο του 5 οδηγεί σε άτοπο. β) Έστω ότι ο χ βρίσκεται στο κλειστό διάστημα [1,5]. Δηλαδή: $1 \leq x \leq 5$ που σημαίνει $x - 1 \geq 0$ και $5 - x \geq 0$ άρα η δοθείσα εξίσωση γίνεται: $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} = 2 \Rightarrow$ $x - 1 + 5 - x + 2\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{5-x} = 0$
Δηλαδή: $x = 1$ ή$x = 5$ που είναι δεκτές

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Να αποδείξετε ότι αν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε η διαφορά της προόδου ισούται με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.*

---

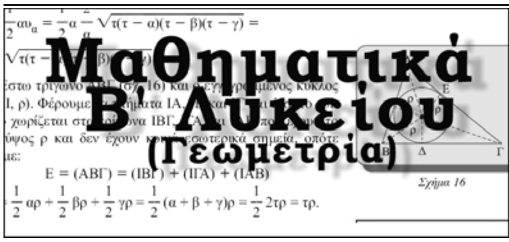
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=10482

Λύση 1 (Μαργαρίτα Βαρελά) Έστω b, c, a οι πλευρές με υποτείνουσα την a. Είναι: $2c = a+b$, $E = t{\cdot}r$, $t = \frac{a+b+c}{2}$ $E = \frac{bc}{2}$, $2tr = bc$, $(a+b+c)r = bc$ $3cr = bc$, $b = 3r$, $w = a - c = 2r + x - (r + x) = r$
όπου x τα εφαπτόμενα τμήματα από την κορυφή Β. $3\rho, 4\rho, 5\rho$ οι πλευρές

Λύση 2 (Σπύρος Καρδαμίτσης) Συμβολίζουμε τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου με $x - \omega$, x, $x + \omega$ ($x + \omega$ η υποτείνουσα του τριγώνου) Ισχύει: $(x+\omega)^2 = x^2 + (x-\omega)^2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 4x\omega = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 4\omega) = 0$ επειδή x διάφορο του μηδενός τότε $x = 4\omega$ Για το εμβαδό του τριγώνου ισχύει:

$$E = \tau\rho \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x-\omega) = \frac{x + x - \omega + x + \omega}{2} \cdot \rho \Leftrightarrow x - \omega = 3\rho$$

$$\Leftrightarrow 4\omega - \omega = 3\rho \Leftrightarrow \rho = \omega$$



Επιμελητής: Ανδρέας Βαρβεράκης

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Νίκος Μαυρογιάννης) Έστω μία σταθερή ευθεία ε και ένα σταθερό σημείο K εκτός της ε. Για κάθε A ονομάζουμε:*

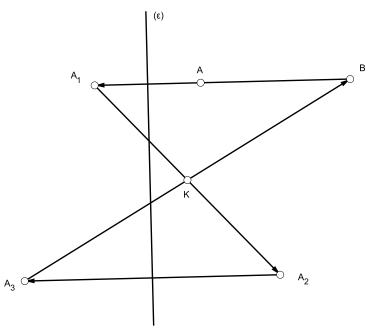
A_1 το συμμετρικό του A ως προς ε

A_2 το συμμετρικό του A_1 ως προς K

A_3 το συμμετρικό του A_2 ως προς ε

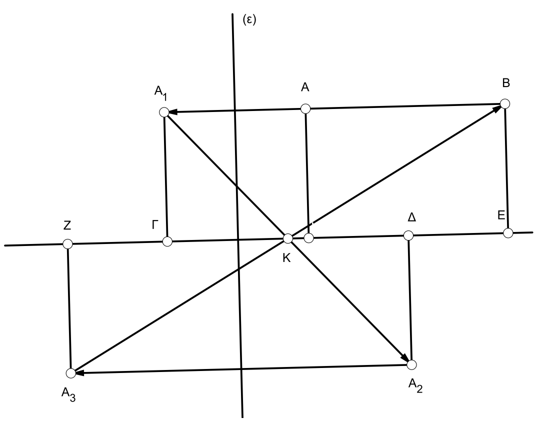
B το συμμετρικό του A_3 ως προς K

Να αποδείξετε ότι το μήκος του AB είναι 4-πλάσιο της απόστασης του K από την ε.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=7575#p7575

Λύση 1 (Γιώργος Ρίζος) Επιχειρώ μία απάντηση δίχως παραλληλόγραμμα και τραπέζια...



Τα A_1, A, B ισαπέχουν από την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το K, (λόγω συμμετρίας), οπότε είναι στην ίδια ευθεία. Τα τρίγωνα A_1KBκαι A_3KA_2είναι ίσα, οπότε $A_1B = A_3A_2$. Αν α η απόσταση του A και κ η απόσταση του K από την (ε), τότε AA_1= 2α. Επίσης, ΓΚ = ΚΔ = α + κ, άρα $A_2A_3 = 2A_2Z$= 2(α + 2κ) = 2α +4κ.

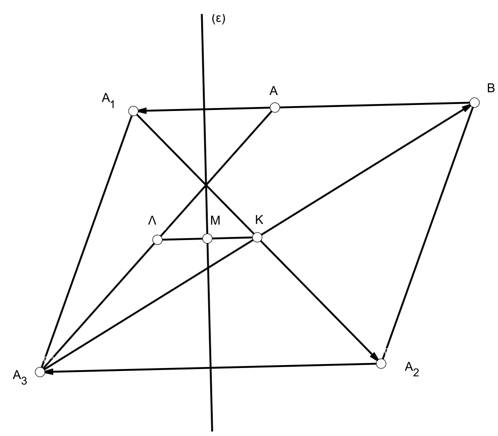
Οπότε $AB = A_1B - A_1A$= 2α +4κ -2α =4κ.

Λύση 2 (Κώστας Βήττας) Έστω το σημείο $P \equiv (\epsilon) \cap A_1A_2$ και λόγω συμμετρίας του σχήματος, έχουμε ότι τα σημεία $A,\ P,\ A_3$ είναι συνευθειακά και ότι το σημείο K', συμμετρικό του K ως προς την ευθεία (ϵ), κειται επί της ευθείας APA_3.

Άρα, από $KA_3 = KB$ και $K'A_3 = K'A$ (συμμετρικό του $KA_2 = KA_1$), προκύπτει ότι $AB \parallel KK'$.

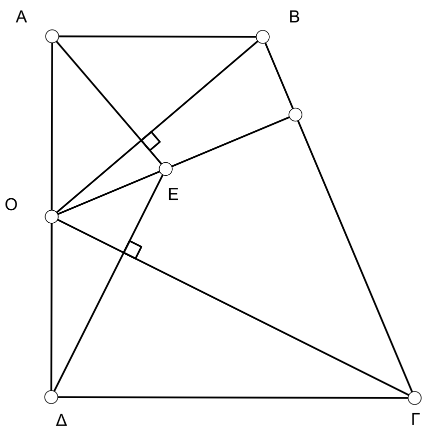
Με το θεώρημα Θαλή τώρα, στο τρίγωνο $\triangle A_3AB$, έχουμε $AB = 2 \cdot KK' = 4 \cdot KQ$, όπου $Q \equiv (\epsilon) \cap KK'$ και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Λύση 3 (Φωτεινή Καλδή) Το $AA_1A_3A_2$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και το $A_1BA_2A_3$ είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $MK = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{A_3A_2 - A_1A}{4}$ Άρα $MK = \frac{A_1B - A_1A}{4} = \frac{AB}{4}$ οπότε $AB = 4MK$.



.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Αντώνης Κυριακόπουλος) Θεωρούμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι γωνίες Α και Δ είναι ορθές. Ονομάζουμε Ο το μέσον της πλευράς ΑΔ. Η κάθετος από το Α στην ευθεία ΟΒ τέμνει την κάθετο από το Δ στην ευθεία ΟΓ σε ένα σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΕ είναι κάθετος στην ευθεία ΒΓ.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=24231#p24231

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Για 4 σημεία Κ, Λ, Μ, Ν του επιπέδου ισχύει η ισοδυναμία: Οι ευθείες ΚΜ, ΛΝ είναι κάθετες αν και μόνο αν $K\Lambda^2 - KN^2 = \Lambda M^2 - MN^2$. Από υπόθεση οι ΟΒ και ΑΕ είναι κάθετες, άρα $AB^2 - AO^2 = EB^2 - OE^2$. Ομοίως $\Gamma\Delta^2 - O\Delta^2 = E\Gamma^2 - OE^2$. Αφαιρούμε κατά μέλη και λαμβάνοντας υπ'οψιν ότι ΟΑ=ΟΔ προκύπτει ότι $AB^2 - \Gamma\Delta^2 = EB^2 - E\Gamma^2$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΔ προκύπτει ότι $AB^2 - \Gamma\Delta^2 = OB^2 - O\Gamma^2$. Τελικά $EB^2 - E\Gamma^2 = OB^2 - O\Gamma^2$.. Άρα με χρήση του παραπάνω λήμματος προκύπτει ότι οι ευθείες ΟΕ και ΒΓ είναι κάθετες.

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Μια διανυσματική λύση: Από υπόθεση $\vec{EA} \cdot \vec{OB} = 0$ οπότε $(\vec{EO} + \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = 0$. Άρα $\vec{EO} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0.(1)$ Ομοίως $\vec{EO} \cdot \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta} \cdot \vec{O\Gamma} = 0.(2)$ Είναι $\vec{O\Delta} \cdot \vec{O\Gamma} = \vec{O\Delta}^2 = \vec{OA}^2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει ότι $\vec{EO} \cdot (\vec{O\Gamma} - \vec{OB}) = 0$ ή $\vec{EO} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ δηλαδή ΕΟ, ΒΓ κάθετες ευθείες.

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Αν* $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$ *και* $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$ *δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, αποδείξτε ότι το διάνυσμα* $\vec{\delta} = \left|\vec{\beta}\right| \vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\, \vec{\beta}$ *είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της* $\widehat{\mathrm{AOB}}$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=3713

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Ισχύει ότι $\frac{\vec{\delta}}{|\vec{\beta}||\vec{\alpha}|} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} + \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ ως άθροισμα δύο μοναδιαίων, άρα η συνισταμένη είναι κατα μήκος της διχοτόμου των, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Λύση 2 (Papel) Θεωρω τα διανυσματα $\vec{a}_o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{\beta}_o = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$που εχουν μετρο ισο με 1 (·). Αρα : $\vec{\delta} = ... = |\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right| \cdot \left(\vec{\alpha}_o + \vec{\beta}_o\right)$ Εάν φ_1, φ_2 οι γωνίες που σχηματίζουν ο φορέας της διχοτόμου με το φορέα του διανύσματος $\vec{\beta}$ και του $\vec{\alpha}$ αντίστοιχα τότε : $\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{\vec{a}_o \cdot \left(\vec{a}_o + \vec{\beta}_o\right)}{|\vec{a}_o|\left|\vec{a}_o + \vec{\beta}_o\right|} = \frac{1 + \vec{a}_o \cdot \vec{\beta}_o}{\left|\vec{a}_o + \vec{\beta}_o\right|} = ... = \sigma\upsilon\nu\varphi_1$. Αφού οι γωνίες είναι οξείες άρα φ1=φ2.Αρα είναι συγγραμικό.

Λύση 3 (Παύλος Μαραγκουδάκης)

Καταρχήν $\sigma\upsilon\nu(\vec{a}, \vec{\delta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\delta}|}$και ομοίως$\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}, \vec{\delta}) = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\beta}||\vec{\delta}|} = \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\delta}|}$. Άρα $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = (\vec{\delta}, \vec{\beta})$.Το $\vec{\delta}$είναι άθροισμα δύο διανυσμάτων ομόρροπων προς τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.Άρα αν το $\vec{\delta}$έχει αρχή το Ο τότε το πέρας του θα είναι στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Χρηστος) Αν* $3\overrightarrow{\mathrm{KA}}+2\overrightarrow{\mathrm{KB}}+\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 5\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$ *και* $\left|\overrightarrow{\mathrm{KA}}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{KB}}\right|=8$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|=5$ *. Να δείξετε ότι:*

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ορθογώνιο.

β) Αν $\vec{\upsilon} = \overrightarrow{\mathrm{KB}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$ *είναι κάθετο στο* $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ *τότε* $\lambda = -\frac{32}{7}$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=3606

Λύση (Έλενα Φακιδαράκη) α) Έχουμε

$$3\overrightarrow{\mathrm{KA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 5\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{KA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - 3\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} - 2\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} = \vec{0}$$

$$3\left(\overrightarrow{\mathrm{KA}} - \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right) + 2\left(\overrightarrow{\mathrm{KB}} - \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{\Gamma A}+2\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{\Gamma A}+2\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$$

Άρα Γ μέσο του AB, άρα KΓ διάμεσος στο τρίγωνο AKB. Από θεώρημα διαμέσων
$4\mathrm{K\Gamma}^2=2\mathrm{AK}^2+2\mathrm{KB}^2-\mathrm{AB}^2$
$4\cdot 5^2=2\cdot 6^2+2\cdot 8^2-\mathrm{AB}^2$
$\mathrm{AB}^2=100$
$\mathrm{AB}=10$

Άρα AKB ορθογώνιο.

β)

$$\left(\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{K\Gamma}\right)\overrightarrow{A\Gamma}=0$$
$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\lambda\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0 \quad (1)$$

$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{KB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=8\cdot 5\cdot\frac{8}{10}=32$ (2) (αφού $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{KB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=\sigma\upsilon\nu\widehat{B}$) $\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{K\Gamma},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=5\cdot 5\cdot\frac{7}{25}=7$ (3) (αφού $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{K\Gamma},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=\sigma\upsilon\nu 2\widehat{B}=\sigma\upsilon\nu^2\widehat{B}-\eta\mu^2\widehat{B}=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$) Από (1), (2), (3) 32 + 7λ = 0 $\Rightarrow \lambda=-\frac{32}{7}$

Λύση στο Β ερώτημα (Χρήστος Λαζαρίδης) $0=(\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{K\Gamma})\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{KB}\overrightarrow{A\Gamma}+\lambda\overrightarrow{K\Gamma}\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{K\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}(\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{KB}+\lambda\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{K\Gamma})=\overrightarrow{A\Gamma}(\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{P\Gamma})$ P είναι η προβολή του K στην AB. Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{P\Gamma}$ είναι συγραμμικά και κάθετα, άρα, $\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|-\lambda\overrightarrow{P\Gamma}\right|\Rightarrow|\lambda|=\frac{\left|\overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{P\Gamma}\right|}$ $\overrightarrow{PB}=-\lambda\overrightarrow{P\Gamma}\Rightarrow\lambda<0\Rightarrow\lambda=-\frac{\left|\overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{P\Gamma}\right|}\}$ Από δεύτερο θεώρημα διαμέσων, $8^2-6^2=2.10.(P\Gamma)\Rightarrow(P\Gamma)=\frac{7}{5}$ $(PB)=\frac{7}{5}+5=\frac{32}{5}$ Τελικά: $\lambda=-\frac{32}{7}$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Γενικής Παιδείας)

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Γιώργος Τσικαλουδάκης)*
Έχουμε 200 παρατηρήσεις ομαδοποιημένες σε 5 κλάσεις, ίσου πλάτους. Το πλάτος κλάσης είναι 4, οι συχνότητες κατά αύξουσα σειρά είναι $20, 60, 50, 40, 30$ και η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 20.

1. *Να βρεθούν οι κλάσεις.*
2. *Αυξάνουμε την κάθε παρατήρηση κατά 5 μονάδες και εν συνεχεία τις αυξημένες παρατηρήσεις τις μειώνουμε κατά 20 τοις εκατό.*
   (α) *Να βρεθεί το εύρος των νέων παρατηρήσεων.*
   (β) *Να βρεθούν τα όρια των νέων κλάσεων (ίσου πλάτους), αν το πλήθος τους παραμείνει 5.*
   (ς) *Να αποδείξετε ότι οι συχνότητες των κλάσεων όπως αυτές διαμορφώνονται στο β) ερώτημα παραμένουν όπως ήταν αρχικά: 20, 60 , 50 , 40 ,30 .*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&p=37954#p37954

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

1. Έστω a το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης. Τότε οι κλάσεις είναι: $[a,a+4),[a+4,a+8),[a+8,a+12),[a+12,a+16),[a+16,a+20)$. Επίσης αφού η μέση τιμή είναι 20, έχουμε ότι: $\frac{20(a+2)+60(a+6)+50(a+10)+40(a=14)+30(a+18)}{200}=20\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a+4+6a+36+5a+5a+4a+56+3a+54=200\Leftrightarrow 20a=200\Leftrightarrow a=10$. Επομένως οι κλάσεις είναι οι:
$[10,14),[14,18),[18,22),[22,26),[26,30)$.
2. Αν X είναι η αρχική μεταβλητή και Y είναι η τελική τιμή της μεταβλητής ισχύει ότι: $Y=(X+5)\cdot 0,8\Leftrightarrow Y=0,8X+4$
   (α) $R_y=Y_{max}-Y_{min}=(0,8\cdot 30+4)-(0,8\cdot 10+4)=16$
   (β) Το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης θα είναι: $0,8\cdot 10+4=12$, οπότε οι κλάσεις θα είναι: $[12,16),[16,20),[20,24),[24,28),[28,32)$
   (ς) Κάθε κλάση (τα άκρα και οι τιμές της) μετασχηματίστηκε σε μια νέα κλάση μέσω του μετασχηματισμού $Y=0,8X+4$, οπότε το ίδιο πλήθος παρατηρήσεων θα περιέχεται σε κάθε μία από αυτές, δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις

αυξάνονται γραμμικά οπότε και η σειρά τους θα διατηρείται.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Αντώνης Κυριακόπουλος) Σε ένα κουτί βάζουμε $\nu^2-\nu+2$ άσπρες σφαίρες και ν^2-2 μαύρες σφαίρες, όπου ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 2$. Από το κουτί αυτό βγάζουμε στην τύχη μια σφαίρα.*

1. *Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: A_ν : « Η σφαίρα που βγάλαμε είναι άσπρη».*
2. *Υπάρχει ν με: $P(A_\nu)=P(A'_\nu)$;*
3. *Να βρείτε το ν ώστε η πιθανότητα να είναι η μικρότερη δυνατή.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&p=34672#p34672

Λύση (Α.Κυριακόπουλος)

1. Έχουμε: $P(\mathrm{A}_\nu)=\frac{\nu^2-\nu+2}{(\nu^2-\nu+2)+(\nu^2-2)}=\frac{\nu^2-\nu+2}{2\nu^2-\nu}$.
2. Έχουμε: $P(\mathrm{A}_\nu)=P(\mathrm{A}'_\nu) \Leftrightarrow P(\mathrm{A}_\nu)=1-P(\mathrm{A}_\nu) \Leftrightarrow 2\frac{\nu^2-\nu+2}{2\nu^2-\nu}=1 \Leftrightarrow \nu=4$
3. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-x+2}{2x^2-x}, x \in [2,+\infty)$. Έτσι, έχουμε: $P(\mathrm{A}_\nu)=f(\nu), \nu=2,3,...$ Με $x \geq 2$, έχουμε: $f'(x)=\frac{(2x-1)(2x^2-x)-(x^2-x+2)(4x-1)}{(2x^2-x)^2}=$ $\frac{x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2}\begin{cases}>0, \text{ αν x} > 2+\sqrt{3}\\ =0, \text{ αν x} = 2+\sqrt{3}\\ <0, \text{ αν x} < 2+\sqrt{3}\end{cases}$ Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[2,2+\sqrt{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[2+\sqrt{3},+\infty\right)$. Έτσι, επειδή: $2<3<2+\sqrt{3}<4<5<...$, έχουμε: $f(2)>f(3)$ και $f(4)<f(5)<...$, δηλαδή: $P(\mathrm{A}_2)>P(\mathrm{A}_3)$ και $P(\mathrm{A}_4)<P(\mathrm{A}_5)<...$ Έχουμε: $P(\mathrm{A}_3)-P(\mathrm{A}_4)=\frac{8}{15}-\frac{14}{28}=\frac{1}{30}>0 \Rightarrow P(\mathrm{A}_3)>P(\mathrm{A}_4)$. Συμπεραίνουμε ότι: $P(\mathrm{A}_4) \leq P(\mathrm{A}_\nu)$, για κάθε $\nu=2,3,4,....$ Με το ίσον μόνο για $\nu=4$. Άρα με $\nu=4$ η πιθανότητα $P(\mathrm{A}_\nu)$ είναι η μικρότερη δυνατή.

Επιμελητής: Κώστας Τηλέγραφος

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να υπολογίσετε την δύναμη*

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^{72}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=10381

Λύση (Τηλέγραφος Κώστας) Όταν ζητείται μια μεγάλη δύναμη του z μια πιο μικρή είναι ίση με α ή αi

$z=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{8}+2\frac{3-1}{8}i-\frac{1-2\sqrt{3}+3}{8}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

$z^4=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{4}=\frac{\sqrt{3}i+1}{2}=i\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

$z^6=z^4z^2=i\frac{\sqrt{3}-i}{2}\frac{\sqrt{3}+i}{2}=i\frac{3+1}{4}=i..$

Άρα

$z^{72}=\left(z^6\right)^{12}=i^{12}=\left(i^4\right)^3=1$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να λύσετε την εξίσωση*

$$2z^2=6iz+3,\ z \in \mathbb{C}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=10218

Λύση 1 (Χρήστος Στραγάλης)

$2z^2=6iz+3 \Leftrightarrow 4z^2=12iz+6 \Leftrightarrow \left[(2z)^2-12iz+(3i)^2\right]+3=0 \Leftrightarrow (2z-3i)^2-(\sqrt{3}i)^2=0 \Leftrightarrow (2z-3i-\sqrt{3}i)(2z-3i+\sqrt{3}i)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{(3+\sqrt{3})i}{2}\\ \acute{\eta}\\ z=\frac{(3-\sqrt{3})i}{2}\end{cases}$$

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Θέτωντας $w=iz$ η εξίσωση γίνεται με πραγματικούς συντελεστές: $-2w^2=6w+3$, που ξέρουμε να την λύνουμε.

Ας προσθέσω ότι η μέθοδος του Χρήστου, αν γίνει στη γενική περίπτωση $az^2+bz+c=0$, δείχνει ότι ο γνωστός τύπος των ριζών στο $\mathbb{R}$, ισχύει και στο $\mathbb{C}$ (με υψηλοτέρα γλώσσα, η απόδειξη του γνωστού τύπου στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των σωμάτων που είναι, βέβαια, και ιδιότητες του $\mathbb{C}$, οπότε περνάει ατόφια). Πιστεύω ότι ο τύπος στο $\mathbb{C}$ έπρεπε να διδάσκεται στο Σχολείο, αλλά για κάποιο λόγο είναι εκτός ύλης.

Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Παύλος Διαμαντής) Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x)+xf(x)-x^2=1$, $\forall x\in R$*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=1591

Λύση (Μίλτος Παπαγρηγοράκης) Έστω ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις fκαι g που ικανοποιούν τις δοσμένες σχέσεις. Τότε στην σχέση

$$f(f(x))=x^2-x+1$$

αν θέσουμε όπου x το $f(x)$ έχουμε:

$$f(f(f(x)))=f^2(x)-f(x)+1$$

ή

$$f(x^2-x+1)=f^2(x)-f(x)+1$$

Στην τελευταία για $x=1$ παίρνουμε: $f(1)=f^2(1)-f(1)+1$ από όπου βρίσκουμε ότι $f(1)=1$. Έτσι η

$$g(x)+xf(x)-x^2=1$$

για $x=0$ δίνει

$$g(0)=1$$

ενώ για $x=1$ δίνει

$$g(1)+f(1)-1^2=1$$

ή

$$g(1)=1$$

που είναι άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Μπάμπης Στεργίου) Δύο συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και με αρνητικές τιμές. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$3f(x)+5g(x)+8f(x)g(x)=0 \quad (1)$$

έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=3155

Λύση 1 (Αναστάσιος Κοτρώνης) Είναι
$3f(x)+5g(x)+8f(x)g(x)=0\Leftrightarrow$
$(8f(x)+5)(8g(x)+3)=15$. Καθώς $f(x),g(x)<0$ έχουμε ότι $8f(x)+5<5$ και $8g(x)+3<3$ Έστω ότι υπάρχουν $x_1<x_2$ ρίζες της δοθείσας. Αφού f,g γνησίως αύξουσες, θα έχουμε
$8f(x_1)+5<8f(x_2)+5$ και $8g(x_1)+3<8g(x_1)+3$ (2)
• Αν $8f(x_1)+5>0$ και v, τότε από την (2) έχουμε $15<15$ άτοπο.
• Αν $8f(x_1)+5<0$ και $8g(x_1)+3<0$, τότε:
- Αν $8f(x_2)+5<0$ και $8g(x_2)+3<0$, ομοίως από την (2) έχουμε $15>15$, άτοπο
- Αν $(5>)8f(x_2)+5>0$ και $(3>)8g(x_2)+3>0$, τότε ομοίως έχουμε $15<15$, άτοπο.

Λύση 2 (Γιώργος Ροδόπουλος) Έστω ότι (1) έχει δύο διαφορετικές λύσεις x_1,x_2 με $x_1<x_2$.
Τότε θα ισχύουν:
$f(x_1)<f(x_2)<0$ και $g(x_1)<g(x_2)<0$ (2)
Από την (1) παίρνουμε
$3f(x_1)+5g(x_1)+8f(x_1)g(x_1)=0\Rightarrow g(x_1)(5+8f(x_1))=-3f(x_1)\Rightarrow g(x_1)=\frac{-3f(x_1)}{5+8f(x_1)}$, προφανώς $5+8f(x_1)<0$ λόγω των (2)
Ομοίως βρίσκουμε $g(x_2)=\frac{-3f(x_2)}{5+8f(x_2)}$, $5+8f(x_2)<0$
Είναι $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow\frac{-3f(x_1)}{5+8f(x_1)}<\frac{-3f(x_2)}{5+8f(x_2)}\Rightarrow\frac{f(x_1)}{5+8f(x_1)}>\frac{f(x_2)}{5+8f(x_2)}\Rightarrow f(x_1)(5+8f(x_2))>f(x_2)(5+8f(x_1))\Rightarrow 5f(x_1)+8f(x_1)f(x_2))>5f(x_2)+8f(x_1)f(x_2))\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, που είναι άτοπο. Συνεπώς η (1) έχει το πολύ μια λύση.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση Διαφορικός Λογισμός)

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει*

$$(f'(x))^2 = f(x)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=3568

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης)

Α. Έστω ότι η y δεν είναι η μηδενική συνάρτηση σε διάστημα. Θα υπάρχει (a, b) ώστε $y(x) > 0,\ x \in (a, b)$. Αν η y είχε τουλάχιστον δυο ρίζες που μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι τα a, b τότε από θεώρημα Rolle η y' άρα και η y θα είχε ρίζα στο (a, b) (άτοπο). Συνεπώς η y έχει το πολύ μια ρίζα k σε αυτην την περίπτωση

Β. Αν $y(k) = 0$

Για $x > k$ $|y'| = \sqrt{y} > 0$ άρα η (συνεχής) y' διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε εύκολα $2\sqrt{y} = x + c_1, x > k$ ή $-2\sqrt{y} = x + c_2, x > k$ αλλά και στις δύο περιπτώσεις λόγω συνέχειας στο k προκύπτει $c_1 = c_2 = -k$ έτσι δεκτή μόνον η c_1 γιατί η άλλη δίνει (-)=(+) δηλαδή $y(x) = 1/4(x - k)^2, x \geq k$

Για $x < k$ αντίστοιχα δεκτή μόνο η c_2' που τελικά δίνει την ίδια λύση Άρα $y(x) = \dfrac{1}{4}(x - k)^2, x \in \mathbb{R}$ Αν $y(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$ παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο (λόγω συνέχειας κλπ η y θα είχε ρίζα) (Θεωρήσαμε την y' συνεχή για να μείνει η άσκηση εντός ύλης διαφορετικά εφαρμόζουμε το θεώρημα του Darboux)

Γ. Αν υπάρχει $(c, d) : y(x) = 0, \forall x \in (c, d)$ τότε πριν το c και μετά το d η y αποκλείεται να έχει ρίζα άρα δεν υπάρχει άλλο διάστημα με πεπερασμένα άκρα που η y να είναι μηδενική σε αυτό άρα οι επιπλέον περιπτώσεις λόγω συνέχειας, παραγωγισιμότητας κλπ είναι οι

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c \\ \frac{1}{4}(x - c)^2 & \text{αν } x \geq c \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x > d \\ \frac{1}{4}(x - d)^2 & \text{αν } x \leq d \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - c)^2 & \text{αν } x \leq c \\ 0 & \text{αν } c < x < d \\ \frac{1}{4}(x - d)^2 & \text{αν } x \geq d \end{cases} \quad \begin{array}{c} c, d \in \mathbb{R} \\ c < d \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Χρήστος Κυριαζής) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο,για την οποία να ισχύει:$f' = f \circ f$;*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=1801

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) Οχι διότι Δίνεται ότι $f(x) > 0$για κάθε x στο R.

Θέτοντας όπου x το $f(x)$ παίρνουμε $f(f(x)) > 0, \forall x \in R \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο R [1]

Επειδή $f(x) > 0$λόγω της [1] παίρνουμε $f(f(x)) > f(0) \Rightarrow f'(x) > f(0) \Rightarrow (f(x) - xf(0))' > 0 \Rightarrow f(x) - xf(0) \uparrow$ στο R

Αν πάρουμε $x < 0 \Rightarrow f(x) - xf(0) < f(0) - 0f(0) \Rightarrow f(x) < (1 + x)f(0)$για κάθε $x < 0$ [2]

Επειδή όμως είχαμε $f(x) > 0 \Rightarrow f(0) > 0$.Έτσι για $x < -1$ λόγω της [2], καταλήγουμε σε αντίφαση

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[xf(x)]=0$, να αποδείξετε ότι:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_{x^2}^{2x^2} f(t)\,dt\right]=0$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=7848

Λύση (Θάνος Μάγκος) Θέτοντας $xf(x)=g(x)$, το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο εξής:

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x^2}^{2x^2}\frac{g(x)}{x}dx=0.$$

Είναι $\left|\int_{x^2}^{2x^2}\frac{g(t)}{t}dt\right|\le\int_{x^2}^{2x^2}\left|\frac{g(t)}{t}\right|dt\le\int_{x^2}^{2x^2}\left|\frac{g(t)}{x^2}\right|dt=$

$$\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{2x^2}|g(t)|\,dt\overset{\boxed{*}}{=}\frac{1}{x^2}\cdot x^2|g(\xi)|=|g(\xi)|,\text{ όπου } \xi\in(x^2,2x^2).$$

Επομένως, όταν $x\to+\infty$, θα έχουμε $\xi\to+\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(\xi)|=0$. Από εδώ, προκύπτει το ζητούμενο.

Στο σημείο $\boxed{*}$ γίνεται εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού στην παραγωγίσιμη συνάρτηση $G(y):=\int_{x^2}^{y}|g(t)|\,dt$ στο διάστημα $[x^2,2x^2]$ όπου $x>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί το*

$$I:=\int_0^\pi\cos(2x+2\sin(3x))\,dx$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=8162

Λύση (James Merryfield) Επειδή η $\cos(2x+2\sin 3x)$ είναι άρτια, έχουμε

$$I=\int_0^\pi\cos(2x+2\sin 3x)\,dx=$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x+2\sin 3x)\,dx}_{:=I_1}\overset{t=x+\pi}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t-2\pi+2\sin(3t-3\pi))\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t-2\sin 3t)\,dt\overset{\boxed{*}}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2t-2\sin 3t)\,dt:=I_2,$$

άρα

$$2I=I_1+I_2\overset{\boxed{**}}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)\cos(2\sin 3x)\,dx\overset{\boxed{*}}{=}$$

$$\int_{-\pi/3}^{5\pi/3}\cos(2x)\cos(2\sin 3x)\,dx\qquad(1).$$

Τώρα

$$2I\overset{u=x+2\pi/3}{=}$$

$$\int_{-\pi/3}^{5\pi/3}\cos\left(2u-\frac{4\pi}{3}\right)\cos(2\sin(3u-2\pi))\,du=$$

$$\int_{-\pi/3}^{5\pi/3}\cos\left(2u-\frac{4\pi}{3}\right)\cos(2\sin 3u)\,du\qquad(2)$$

και

$$2I\overset{u=x+4\pi/3}{=}\int_{\pi/3}^{7\pi/3}\cos\left(2v-\frac{8\pi}{3}\right)\cos(2\sin(3v-4\pi))\,dx\overset{\boxed{*}}{=}$$

$$\int_{-\pi/3}^{5\pi/3}\cos\left(2v-\frac{2\pi}{3}\right)\cos(2\sin 3v)\,dv\qquad(3).$$

Όμως $(1)+(2)+(3)\Rightarrow$

$6I = \int_{-\pi/3}^{5\pi/3} \underbrace{\left(\cos 2x + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right)\right)}_{=0} \cos(2\sin 3x)\,dx =$ 0. Στο σημείο $\boxed{*}$ γίνεται χρήση της πρότασης

Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο T, τότε $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Στο σημείο $\boxed{**}$ γίνεται χρήση της $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$.

Γενίκευση: Αν $a, c \in \mathbb{Z}$ με $c \nmid a$, είναι $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(ax + b\sin(cx))\,dx = 0$.

Επιμελητής: Θωμάς Ραϊκόφτσαλης

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Math Rider) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2}$, για κάθε $x > 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.*

α) *Να βρείτε την συνάρτηση f και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.*

β) *Να αποδείξετε ότι*

$$\int_{2^{\sqrt{3}}}^{3} e^x dx \leq \int_{2^{\sqrt{3}}}^{3} x^e dx$$

για κάθε $x > 0$.

γ) *Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με*

$$h(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \ln^2 x$$

είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

δ) *Να λύσετε την εξίσωση*

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt + 2 - 2xf(x) = \frac{2}{x} - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t}dt$$

$x > 0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=6685

Λύση

α) Για $x > 0$ έχουμε: $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow xf'(x) + (x)'f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \Rightarrow xf(x) = \ln x + c \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x + c}{x}$, $x > 0$.

Όμως $A \in C_f \Leftrightarrow f(e) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln e + c}{e} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+c}{e} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως είναι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$. (η οποία επαληθεύει την αρχική σχέση) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f' φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		e		$+\infty$
f ΄(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	ο.μ.	↘	0

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$ και έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

(Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{(DLH)}{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$).

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e\ln x \leq x\ln e \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$ (1) Επειδή $0 < \sqrt{3} < 2 < e$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ έχουμε ότι $f(\sqrt{3}) < f(2) \Rightarrow \frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow 2\ln\sqrt{3} < \sqrt{3}\ln 2 \Rightarrow \ln(\sqrt{3})^2 < \ln 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow \ln 3 < \ln 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow 3 < 2^{\sqrt{3}}$ (γιατί η $\ln x$ γνησίως αύξουσα). Από την σχέση (1) έχουμε ότι $e^x - x^e \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Έτσι ολοκληρώνοντας, (ως προς x), από 3 έως $2^{\sqrt{3}}$ έχουμε ότι:

$\int_3^{2^{\sqrt{3}}} (e^x - x^e)dx \geq 0 \Rightarrow \int_3^{2^{\sqrt{3}}} e^x dx - \int_3^{2^{\sqrt{3}}} x^e dx \geq 0 \Rightarrow$

$\int\limits_3^{2\sqrt{3}} x^e dx \leq \int\limits_3^{2\sqrt{3}} e^x dx \Rightarrow -\int\limits_3^{2\sqrt{3}} x^e dx \geq -\int\limits_3^{2\sqrt{3}} e^x dx \Rightarrow$
$-\int\limits_3^{2\sqrt{3}} e^x dx \leq -\int\limits_3^{2\sqrt{3}} x^e dx \Rightarrow \int\limits_{2\sqrt{3}}^3 e^x dx \leq \int\limits_{2\sqrt{3}}^3 x^e dx$
για κάθε $x > 0$.

γ) Είναι $g(x) = \int\limits_1^x f(t)dt = \int\limits_1^x \frac{\ln t}{t} dt$, $x > 0$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ [αφού η$f(t) = \frac{\ln t}{t}$ είναι συνεχής $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων]. Ομοίως και η συνάρτηση

$g\left(\frac{1}{x}\right) = \int\limits_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt = \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t} dt$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων στο διάστημα $(0, +\infty)$ συναρτήσεων $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x)$. Επομένως η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h'(x) = \left(g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \ln^2 x\right)' =$

$\left(\int\limits_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t} dt + \ln^2 x\right)' = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' -$
$2\ln x(\ln x)' = \frac{\ln x}{x} + x \cdot (-\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} =$
$\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0$

Δηλαδή $h'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

δ) Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι $h(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$. Είναι όμως

$h(1) = g(1) + g\left(\frac{1}{1}\right) - \ln^2 1 = 2g(1) - 0 = 2\int\limits_1^1 f(t)dt =$
$2 \cdot 0 = 0$.

Και επειδή $h(1) = c \Rightarrow 0 = c$. Δηλαδή
$h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln^2 x$,
για κάθε $x > 0$ (2) Έτσι η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$\int\limits_1^x \frac{\ln t}{t} dt + 2 - 2xf(x) = \frac{2}{x} - \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t} dt \Leftrightarrow \int\limits_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{t} dt +$
$2 - 2x\frac{\ln x}{x} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) + 2 - 2\ln x = \frac{2}{x} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$
$\ln^2 x + 2 - 2\ln x = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x\ln^2 x + 2x - 2x\ln x = 2 \Leftrightarrow$
$x\ln^2 x + 2x - 2x\ln x - 2 = 0$ (3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $t(x) = x\ln^2 x + 2x - 2x\ln x - 2$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι για ξ = 1 είναι $t(1) = 1 \cdot \ln^2 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 2 = 0 + 2 - 0 - 2 = 0$. Δηλαδή η $x = 1$ είναι λύση της εξίσωσης $t(x) = 0$ (δηλαδή της (3». Η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με
$t'(x) = (x)'\ln^2 x + x(\ln^2 x)' + (2x)' - 2(x)'\ln x - 2x(\ln x)' - (2)' =$

$\ln^2 x + 2x\ln x(\ln x)' + 2 - 2\ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} - 0 =$
$\ln^2 x + 2x\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 - 2\ln x - 2 =$
$\ln^2 x + 2\ln x + 2 - 2\ln x - 2 = \ln^2 x > 0$

για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$.
Άρα η t είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ (αφού η $t'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ και η $t(x)$ είναι συνεχής στο $x = 1$). Επομένως η $x = 1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $t(x) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) > 0$, να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=7807&p=44481#p44481

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Έστω $x > x_0$. Η συνάρτηση f πληρεί στο διάστημα $[x, x_0]$ τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, επομένως υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επειδή f' γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:
$\xi > x_0 \Rightarrow f'(\xi) > f'(x_0) \Rightarrow$
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) \overset{x-x_0>0}{\Rightarrow}$
$f(x) - f(x_0) > (x - x_0) f'(x_0) \Rightarrow$
$f(x) > f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ίσχυε:
$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) + xf'(x_0) - x_0 f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow$
$f(x_0) + xf'(x_0) - x_0 f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$,
άτοπο, άρα μπορούμε να βρούμε κατάλληλο $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$.
Επομένως $f(x) > f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$, οπότε και
$0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)}$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$.
Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)} = 0$, με συνέπεια από το κριτήριο της παρεμβολής να έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Μπάμπης Στεργίου) Να λυθεί το σύστημα :*

$$\begin{cases} 2x = y + \frac{2}{y} \\ 2y = z + \frac{2}{z} \\ 2z = x + \frac{2}{x} \end{cases}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=10228

Λύση (Χρήστος Στραγάλης) Λόγω συμμετρίας και επειδή προφανώς $x, y, z \neq 0$ θεωρούμε $x, y, z > 0$.Απο την πρώτη σχέση έχουμε:

$y + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{2}{y}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$

Ομοίως απο τις άλλες σχέσεις έχουμε: $y \geq \sqrt{2}, z \geq \sqrt{2}$

Προσθέτοντας κατα μέλη τις αρχικές έχουμε:

$$x + y + z = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$$

όμως

$\left(x \geq \sqrt{2}, \frac{2}{x} \leq \sqrt{2}\right), \left(y \geq \sqrt{2}, \frac{2}{y} \leq \sqrt{2}\right), \left(z \geq \sqrt{2}, \frac{2}{z} \leq \sqrt{2}\right)$

Άρα πρέπει $x = \frac{2}{x}, y = \frac{2}{y}, z = \frac{2}{z}$ απο όπου: $(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$

και ομοίως για τα αρνητικά $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Σπύρος Καπελλίδης) Να βρείτε το σύνολο*

$$A = \{[\frac{2x^2 + 10x + 19}{x^2 + 5x + 7}]/x \in \mathbb{R}\}$$

(Οι αγκύλες σημαίνουν ακέραιο μέρος)

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=49&t=11485

Λύση (Κώστας Δόρτσιος) Έστω: $K(x) = \frac{2x^2+10x+19}{x^2+5x+7}, x \in \mathbb{R}$ όπου ο παρονομαστής: $x^2 + 5x + 7$ είναι πάντα θετικός γιατί ως δευτεροβάθμιο τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $D = -3 < 0$ Είναι ακόμα: $K(x) = 2 + \frac{5}{x^2+5x+7}, x \in \mathbb{R}$ όμως: $x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, x \in \mathbb{R}$ Άρα: $x^2 + 5x + 7 \geq \frac{3}{4}, x \in R$ Επομένως: $0 < \frac{1}{x^2+5x+7} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 0 < \frac{5}{x^2+5x+7} \leq \frac{20}{3}, x \in \mathbb{R}$ και τελικά: $2 < 2 + \frac{5}{x^2+5x+7} \leq 2 + \frac{20}{3} = 8\frac{2}{3}$ και από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η παράσταση παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Άρα: $\left[2 + \frac{5}{x^2+5x+7}\right] = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ Επομένως: $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Σημείωση Το ακέραιο μέρος των τιμών της παράστασης $K(x)$ είναι οι αριθμοί $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Μπάμπης Στεργίου) Αν ισχύει*
$x, y, z > 0$ *και* $x + y + z = 1$
να αποδειχθεί ότι

$$3xyz(xy + yz + zx) + 2xyz \leq (xy + yz + zx)^2$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=454

Λύση 1 (Δημήτρης Παπαδημητρίου) (Σκέψη: Παρουσιάζεται το xyz δύο φορές στο πρώτο μέλος και μετά από λίγη καλή παρατήρηση βλέπουμε ότι «βολεύει» να διαιρέσουμε με $(xyz)^2$). Έτσι παίρνουμε:

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{2}{xyz} \leq (\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

Τώρα είναι φανερό ότι είναι χρήσιμη η αντικατάσταση $a = \frac{1}{x}$ και λοιπά. Η συνθήκη γίνεται

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \iff ab + bc + ca = abc,$$

ενώ η ανισότητα γίνεται $3(a+b+c) + 2abc \leq (a+b+c)^2$. Ομως (προσπαθούμε να «βγάλουμε» το abc απ' τη μέση) $abc = ab + bc + ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$. Έτσι αρκεί πλέον να αποδείξουμε ότι

$$3(a+b+c) \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \iff 9 \leq a+b+c,$$

που ισχύει αφού: $a+b+c = (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ από ανισότητα αριθμητικού- αρμονικού μέσου.

Λύση 2 (Ηλίας Ζαδικ) Ισχύει

$$\begin{aligned}(\sum xy)^2 &= \sum x^2y^2 + 2\sum xyz(\sum x)\\ &= \sum x^2y^2 \sum x + 2xyz\\ &= \sum(x^3y^2 + xy^2z^2 + x^3z^2) + 2xyz.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sum(x^3y^2 + xy^2z^2 + x^3z^2) \geq 3xyz(\sum xy)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum x^3(y^2+z^2) \geq 2xyz(\sum xy).$$

Όμως απο ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε ότι

$$\sum x^3(y^2+z^2) \geq \sum 2x^3yz = 2xyz(\sum x^2) \geq 2xyz\sum xy$$

που είναι το ζητούμενο.

Σχόλιο Λύθηκε επίσης από τους Αλέξανδρο Συγκελάκη και Δημήτρη Σκουτέρη.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=277

Λύση (Σιλουανός Μπραζιτίκος) Θέτοντας $y = 0$ παίρνουμε ότι αν η f δεν είναι σταθερή, τότε $f(0) = -1$. Θέτοντας τώρα $x = 1$, $y = -1$ παίρνουμε $f(1) = 1$ ή $f(-1) = 0$.

Αν $f(1) = 1$, τότε για $x = 1$ η αρχική σχέση μας δίνει $f(x) = 2x - 1$ που είναι όντως μια λύση. Αν $f(1) = a \neq 1$, τότε $f(-1) = 0$ και για $(x, y) = (z, 1)$ και $(x, y) = (-z, -1)$ παίρνουμε $f(z+1) = (1-a)f(z) + 2z + 1$ και $f(-z-1) = f(z) + 2z + 1$. Άρα $f(z+1) = (1-a)f(-z-1) + a(2z+1)$ ή πιο απλά

$$f(x) = (1-a)f(-x) + a(2x-1) \quad (*)$$

Θέτοντας τώρα όπου x το $-x$ στην τελευταία παίρνουμε

$$f(-x) = (1-a)f(x) + a(-2x-1).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες παίρνουμε:

$$(a^2 - 2a)f(x) = -2a^2x - (a^2 - 2a)$$

Για a διαφορετικό από 0 και 2, παίρνουμε $f(x) = \frac{-2ax}{a-2} - 1$ και βάζοντας την στην αρχική μας έχουμε $a = -2$ και $f(x) = -x - 1$. Η περίπτωση $a = 2$ προφανώς απορρίπτεται οπότε τώρα μας μένει μόνο η $a = 0$. Για $a = 0$ η (*) δίνει $f(x) = f(-x)$ και θέτοντας $(x, y) = (z, z)$ και $(x, y) = (z, -z)$ στην αρχική μας παίρνουνε: $f(2z) + f^2(z) = f(z^2) + 2z^2 + 1$ και $-1 + f^2(z) = f(z^2) - 2z^2 + 1$. Αφαιρώντας τις έχουμε : $f(2z) = 4z^2 - 1$, οπότε $f(x) = x^2 - 1$. Άρα οι συναρτήσεις είναι οι $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 1$.

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 2010) Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(O_1, r_1)$ και $c_2(O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία Α και Β, αντιστοίχως. Αν το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$ και ισχύει ότι $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=57805

Λύση (Ανδρέας Πούλος) Το πρόβλημα ανάγεται στο εξής: Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο O_1ABO_2 με βάσεις O_1A, O_2B και $O_1A < O_2B$. Αν M σημείο στο εσωτερικό του τραπεζίου και $O_1A = O_1M$ και $O_2M = O_2B$, τότε να αποδειχθεί ότι $AM < MB$. Στις κορυφές του τραπεζίου δίνουμε τις εξής συντεταγμένες $O_1(0,0), A(0,a), B(b,a), O_2(b,-c)$ με $a,\ b,\ c > 0$ και $M(x,y)$. Αφού ισχύει $|OA| = |OM|, |O_2M| = |O_2B|$ προκύπτουν οι σχέσεις: $a^2 = x^2 + y^2$ (1), $(b-x)^2+(y+c)^2 = (a+c)^2$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) μετά από πράξεις και απλοποιήσεις οδηγούμαστε στην σχέση $2c(a-c) = b(b-2c)$. Αφού το M είναι εσωτερικό σημείο του τραπεζίου σημαίνει ότι $a > y$ και $b > 2x$ (3). Τώρα, η ζητούμενη ανισοτική σχέση $AM < BM$ είναι ισοδύναμη με την: $x^2 + (a-y)^2 < (b-x)^2 + (y-a)^2$ και μετά από πράξεις και με δεδομένο ότι $a^2 = x^2 + y^2$, καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχέση $0 < b(b-2x)$, που ισχύει λόγω της (3).
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν οι κύκλοι (O_1, r_1) και (O_2, r_2) εφάπτονταν (εξωτερικά) και δεν τέμνονταν, η προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία είναι ακόμα πιο απλή.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προκριματικός Διαγωνισμός 2010) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα: $f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right) = \dfrac{1}{y} \cdot f(f(x))$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ και είναι γνησίως μονότονες στο $(0, +\infty)$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=35560

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Για $x = y$ η αρχική γίνεται: $f(1) = \dfrac{1}{x} f(f(x))$ άρα $f(f(x)) = f(1)x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$. Θέτουμε $a = f(1)$ κι έτσι η παραπάνω γίνεται $f(f(x)) = ax,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$. Για $x = \dfrac{1}{a}$ στην παραπάνω παίρνουμε $f\left(f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right) = 1$ (1). Ενώ για $y = f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ στην αρχική χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε: $f(f(x)) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{a}\right)} f(f(x)),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$ δηλαδή $ax = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{a}\right)} ax,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$ που για $x = 1$ δίνει: $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$ δηλαδή λόγω της (1): $\boxed{f(1) = 1}$ οπότε $a = 1$. Τώρα η (1) γίνεται: $\boxed{f(f(x)) = x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star}$ (που δείχνει ότι η συνάρτηση που ψάχνουμε είναι 1-1 αλλά ΚΑΙ επί του $\mathbb{R}^\star$) και η αρχική συναρτησιακή γίνεται: $f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right) = \dfrac{x}{y},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^\star$ (2). Στην τελευταία θέτουμε όπου x το 1 και όπου y το $f(y)$ και παίρνουμε: $f\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{f(y)}, \forall y \in \mathbb{R}^\star$ (3) οπότε θέτουμε στην (2) όπου y το $\dfrac{1}{y}$ και χρησιμοποιούμε την (3) για να πάρουμε: $\boxed{f(xy) = f(x)f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^\star}$. Για $x = y = -1$ παίρνουμε $f(-1) = 1$ ή $f(-1) = -1$. Όμως δε γίνεται $f(-1) = 1$ γιατί τότε η f δε θα ήταν $1-1$. Άρα $\boxed{f(-1) = -1}$. Περιοριζόμαστε πλέον στο διάστημα $(0, +\infty)$ όπου η συνάρτηση f είναι γν. μονότονη και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(e^x)$, για την οποία ισχύει $g(x+y) = g(x) + g(y)$ που είναι η συναρτησιακή του äυσηψ για την οποία είναι γνωστό ότι αν η συνάρτηση g είναι γν. μονότονη (εδώ είναι αφού είναι σύνθεση γν. μονότονων συναρτήσεων), τότε ισχύει $g(x) = ax$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Συνεπώς για $x > 0$ παίρνουμε $\ln f(e^x) = ax$ δηλαδή $f(x) = x^a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Όμως η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την $f(f(x)) = x$ άρα $a^2 = 1$ οπότε $a = 1$ ή $a = -1$ δηλαδή $f(x) = x$ ή $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γν. μονότονη στο $(0, +\infty)$ άρα $f(x) = x,\ \ \forall x \in (0, +\infty)$ ή $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ \forall x \in (0, +\infty)$.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

(*i*) Αν $f(x) = x,\ \ \forall x \in (0, +\infty)$ τότε θα δείξουμε ότι $f(x) = x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$. Ας πάρουμε $x < 0$ και $y < 0$. Τότε $xy > 0$ οπότε από τη σχέση $f(x)f(y) = f(xy)$ παίρνουμε $f(x)f(y) = xy$ η οποία για $y = -1$ δίνει $f(x)(-1) = -x$ δηλαδή $f(x) = x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. (Αν πάρουμε $x > 0$ και $y < 0$. Τότε από τη σχέση $f(x)f(y) = f(xy)$ παίρνουμε $xf(y) = f(xy)$ που για $y = -1$ δίνει: $f(-x) = -x$ για κάθε $x > 0$ άρα $f(x) = x$ για κάθε $x < 0$ και απλά επιβεβαιώνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα. Όμοια εργαζόμαστε για την περίπτωση όπου $x < 0$ και $y > 0$.)

(*ii*) Αν $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ \forall x \in (0, +\infty)$ τότε η διαδικασία για να δείξουμε ότι $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star$ είναι εντελώς όμοια με την παραπάνω.

Τελικά $\boxed{f(x) = x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star}$ ή $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^\star}$

Λύση 2 (Κώστας Σερίφης) Από (1) για $y = x$ είναι: $f(f(x)) = x \cdot f(1)$ (2). Από τη (2) εύκολα δείχνουμε το $1-1$ της f. Στη (2) για $x = 1$ είναι: $f(f(1)) = f(1)$ και λόγω του $1-1$ της f είναι $f(1) = 1$. Άρα $f(f(x)) = x$ για κάθε $x, \in \mathbb{R}^*$ (3) και $f\left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right) = \dfrac{x}{y}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ (4)

Στην (4) για $x = 1, \;\; y = -1$ έχουμε: $f\left(\dfrac{f(1)}{f(-1)}\right) = -1 \;\Rightarrow\; f\left(\dfrac{1}{f(-1)}\right) = f(f(-1))$ και έτσι, εύκολα καταλήγουμε, $f(-1) = -1$.

Στην (4) για $y = -x$ έχουμε: $f\left(\dfrac{f(x)}{f(-x)}\right) = -1 = f(-1)$ και αφού η $f : 1-1$ θα είναι $f(-x) = f(x)$, οπότε η f είναι περιττή.

Στην (4) για $x = 1, y = x$ έχουμε:$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f\left[f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right] = f\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$ (5).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε: Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 > 0$ και για $0 < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 1 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) > f(1) = 1 > 0$ και από (5) $f(x) > 0$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$. Αφού η f είναι περιττή θα είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0)$ και ακόμα $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$. Εύκολα τώρα, με άτοπο και τη βοήθεια της (3), δείχνουμε ότι:

$f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε ακολουθώντας την ίδια τεχνική δείχνουμε ότι: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Νίκος Κολλιόπουλος) Να υπολογιστεί (αν υπάρχει) το όριο:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-1)^k}{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^k}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=1354

Λύση (Θανάσης Κοντογεώργης) Ορίζουμε τις ακολουθίες $a_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^k$ και $b_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^k$. Παρατηρούμε ότι η (b_n) είναι θετική, αυστηρώς αύξουσα και μή φραγμένη. Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{n+2} = e^{-2}$$

Άρα από το θεώρημα Cesáro-Stolz, το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-1)^k}{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^k}$ υπάρχει και ισούται με e^{-2}.

Σχόλιο: Το θεώρημα Cesáro-Stolz λέει το εξής: Έστω $(a_n), (b_n)$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την (b_n) να είναι θετική, αυστηρώς αύξουσα και μη φραγμένη. Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ υπάρχει και ισούται με ℓ, τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ επίσης υπάρχει και ισούται με ℓ.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω* $A_n = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} :$ *το πρώτο ψηφίο του* 2^k *είναι 1*$\}$ *και*

$$a_n = |A_n|$$

Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

και αν υπάρχει να υπολογιστεί.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=5619

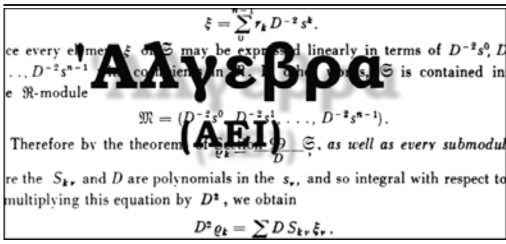
Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Ο 2^k έχει ως πρώτο ψηφίο το 1 αν και μόνο αν $k \in \left[\frac{\ell \ln 10}{\ln 2}, \frac{\ell \ln 10}{\ln 2} + 1\right)$ για κάποιο $\ell \in \mathbb{N}$. Από όπου βγαίνει το συμπέρασμα οτι

$$a_n = \left\lfloor \frac{n \ln 2}{\ln 10} \right\rfloor + O(1)$$

και $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$.

Σχόλιο (Δημήτρης Χριστοφίδης): Για να βγάλουμε το συμπέρασμα παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\ln 2 / \ln 10$ είναι άρρητος και χρησιμοποιούμε το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl που λέει:

Αν θ άρρητος, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ και $A_n = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : a \leqslant \{k\theta\} \leqslant b\}$, τότε $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{n} = b - a$.



Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Αναστάσιος Κοτρώνης) Να εξεταστεί αν τα υποσώματα*

$$K_1 = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

και

$$K_2 = \{a + b\sqrt{q} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

των πραγματικών, όπου p, q διακεκριμένοι πρώτοι, είναι ισόμορφα.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=1881

Λύση (Νίκος Μαυρογιάννης) Τα σώματα δεν είναι ισόμορφα. Αν ήσαν και $\varphi : \mathbb{Q}\left(\sqrt{p}\right) \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ ήταν ο ισομορφισμός, τότε φυσικά ο φ απεικονίζει ρητούς σε ρητούς και με $\alpha = \sqrt{p}$ θα είχαμε $\varphi(\alpha)^2 = p$. Δηλαδή με $\beta = \varphi(\alpha)$ στο $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ είναι $\beta^2 = p$. Αλλά $\beta = x + y\sqrt{q}$ με x, y ρητούς. Το άτοπο προκυπτει από την σχέση $\left(x^2 + y^2 q\right) + (2xy)\sqrt{q} = p$ που δίνει $xy = 0$ από την οποία προκύπτει ότι κάποιος από τους $\sqrt{p}, \sqrt{p/q}$ θα πρέπει να είναι ρητός.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Νικόλαος Κατσίπης) Να υπολογιστεί το άθροισμα*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{n} e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=2046

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Συμβολίζουμε το άθροισμα με s_n.

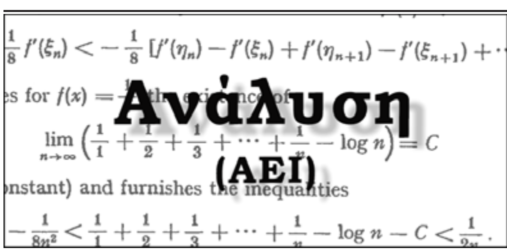
• Έστω ότι ο n είναι πρώτος. Τότε το άθροισμα περιλαμβάνει όλες τις n-οστές ρίζες της μονάδας εκτός του 1 και έχουμε $s_n = -1$.

• Έστω ότι $n = p^k$ με $k > 1$ και p πρώτο. Τότε από το άθροισμα των n-οστών ριζών της μονάδας θα αφαιρεθούν οι p^{k-1}-οστές ρίζες της μονάδας, που έχουν άθροισμα 0, και έχουμε $s_n = 0$.

• Εστω $n = pq$ με $\gcd(p, q) = 1$. Τότε για κάθε αποδεκτό k υπάρχουν $1 \leqslant s \leqslant q$ και $1 \leqslant r \leqslant p$ με $(s, q) = 1$ και $(r, p) = 1$ ώστε $k \equiv sp + rq \bmod pq$ και αντιστρόφως. Έτσι, το άθροισμά μας έχει την πολλαπλασιαστική ιδιότητα

$$s_{pq} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,pq)=1}}^{pq} e^{\frac{2\pi i k}{pq}} = \sum_{\substack{s=1 \\ (s,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{r=1 \\ (r,p)=1}}^{p} e^{\frac{2\pi i (sp+rq)}{pq}} = s_p + s_q.$$

Από όλα μαζί έπεται ότι το άθροισμα s_n μηδενίζεται όταν το n διαιρείται με το τετράγωνο κάποιου πρώτου και ισούται με $(-1)^r$, όταν το n είναι γινόμενο ακριβώς r πρώτων. Με άλλα λόγια πρόκειται για τη γνωστή συνάρτηση $\mu(n)$ του Möbius.



Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Δημήτρης Σκουτέρης) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x_0-) \equiv \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

και
$$f(x_0+) \equiv \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
με τιμες στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των σημείων ασυνέχειας της f *είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=444

Λύση 1 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω x σημείο ασυνέχεις της f και έστω $n\in\mathbb{N}$. Αφού υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x-)$ και $f(x+)$ τότε υπάρχει $\delta=\delta(x,n)$ ώστε:

(α) για κάθε $y_1\in(x-2\delta,x)$ έχουμε $\left|f(y_1)-f(x-)\right|<1/n$ και

(β) για κάθε $y_2\in(x,x+2\delta)$ έχουμε $\left|f(y_2)-f(x+)\right|<1/n$.

Έστω $z_1\in(x-\delta,x)$ και y_1 τέτοιο ώστε $|y_1-z_1|<\min\{\delta,x-z_1\}$. Τότε $y_1\in(x-2\delta,x)$ και άρα
$$|f(y_1)-f(z_1)|\leqslant|f(y_1)-f(x-)|+|f(x-)-f(z_1)|<2/n.$$

Άρα για κάθε $z_1\in(x-\delta,x)$ έχουμε $|f(z_1-)-f(z_1+)|\leqslant|f(z_1-)-f(z_1)|+|f(z_1)-f(z_1+)|<4/n$

Ομοίως αν $z_2\in(x,x+\delta)$ τότε $|f(z_2-)-f(z_2+)|<4/n$. Έχουμε βρει δηλαδή ένα διάστημα μήκους $2\delta(x,n)$ γύρω από το x, ώστε για κάθε z σε αυτό το διάστημα, (εκτός ίσως από το x) έχουμε
$$\left|f(z-)-f(z+)\right|<4/n \quad (1).$$

Έστω $A_n=\{x:|f(x-)-f(x+)|\geqslant 4/n\}$. Από την (1) αν $x\in A_n$ και $z\in(x-\delta(x,n),x+\delta(x,n))$ με $z\neq x$, τότε $z\notin A_n$. Άρα όλα τα διαστήματα $\left(x-\frac12\,\delta(x,n),\ x+\frac12\,\delta(x,n)\right)$ με $x\in A_n$ έχουν ανά δύο κενή τομή. Για κάθε $x\in A_n$ έστω $q_x\in\mathbb{Q}\cap\left(x-\frac12\,\delta(x,n),\ x+\frac12\,\delta(x,n)\right)$. Τότε η συνάρτηση $f:A_n\to\mathbb{Q}$ που δίνεται από τον τύπο $f(x)=q_x$ είναι 1-1 και άρα το A_n είναι αριθμήσιμο. Κάθε σημείο ασυνέχειας της f πρέπει να ανήκει σε κάποιο A_n και άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι αριθμήσιμο αφού είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων.

Λύση 2 (Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω $D\subseteq\mathbb{R}$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Για τυχαίο $x_0\in D$ θέτουμε $y_{max}=\max\{f(x_0-),f(x_0+),f(x_0)\}$ και $y_{min}=\min\{f(x_0-),f(x_0+),f(x_0)\}$. Προφανώς $y_{min}\neq y_{max}$ και μπορούμε να επιλέξουμε ρητό $q_y\in(y_{min},y_{max})-\{f(x_0-),f(x_0+)\}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε κατάλληλο διάστημα $I\equiv(x_0-\delta,x_0+\delta)$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-q_y|>s>0$ για κάποιο θετικό s (ανεξάρτητο του x). Επιλέγουμε ρητό $q_x\in I$ και αντιστοιχίζουμε στο x_0 το διατεταγμένο ζεύγος (q_x,q_y).

Παρατηρούμε οτι, για οποιαδήποτε άλλο σημείο ασυνέχειας $x\in D$ που αντιστοιχίζεται στο (r_x,r_y) :

Είτε $x\notin I$, οπότε $q_x\neq r_x$, είτε $x\in I-\{x_0\}$, οπότε εκ κατασκευής $q_y\neq r_y$.

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Γιώργος Παπαδόπουλος) Να υπολογιστεί το άθροισμα*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{3n}{n}\frac{1}{8^n}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=2340

Αχιλλέας Συνεφακόπουλος Είναι $\binom{n}{k}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz$, όπου C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη γύρω από το 0. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)^{3n}}{8^n z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{(1+z)^3}{8z}\right)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{(1+z)^3}{8z}}=\frac{8}{8z-(1+z)^3}=\frac{-8}{z^3+3z^2-5z+1}=\frac{-8}{(z-1)(z^2+4z-1)}$ για $|z|=1/2$.

Οπότε $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=1/2}\frac{(1+z)^{3n}}{8^n z^{n+1}}dz=\frac{-8}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1/2}\frac{dz}{(z-1)(z^2+4z-1)}=$
$$-8\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z^2+4z-1)};-2+\sqrt5\right)=\frac{4}{3\sqrt5-5},$$
αφού
$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z^2+4z-1)};-2+\sqrt5\right)=\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^3+3z^2-5z+1)|_{z=-2+\sqrt5}}$$
$$=\frac{1}{3z(z+2)-5}\bigg|_{z=-2+\sqrt5}=\frac{1}{2\big(5-3\sqrt5\,\big)}.$$

Σεραφείμ Τσιπέλης Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $f(x)=\sin\!\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)$ τότε
$$f(x)=\frac13\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$f(x)=\sin\!\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac13\cos\!\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$

$3\sqrt{1-x^2}\,f'(x)=\cos\!\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\Rightarrow$

$3\left(\sqrt{1-x^2}\,f''(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,f'(x)\right)=-\frac13\sin\!\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$

$9\,(1-x^2)\,f''(x)-9x\,f'(x)=-f(x).$

Άρα μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $9\,(1-x^2)\,f''(x) - 9x\,f'(x) + f(x) = 0$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 0$ και $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)$.

Θεωρώντας την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, μετά από πράξεις, διαπιστώ-νουμε ότι κι αυτή επαληθεύει την παραπάνω διαφορική εξίσωση, καθώς και τις αρχικές συνθήκες.

Λόγω μοναδικότητας της λύσης έχουμε $\sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Τότε $\left(\sin\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\right)' = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n}\frac{\left(x^{2n+1}\right)'}{2n+1} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{4^n}{27^n}x^{2n} \Rightarrow$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{2x}{3\sqrt{3}}\right)^{2n} = \cos\left(\frac{\arcsin x}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Θέτοντας $y = \dfrac{2x}{3\sqrt{3}}$ και επομένως $x = \dfrac{3\sqrt{3}\,y}{2}$ έχουμε

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}y^{2n} = \cos\left(\dfrac{\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}\,y}{2}\right)}{3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}\,y}{2}\right)^2}} = \cos\left(\dfrac{\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}\,y}{2}\right)}{3}\right)\dfrac{2}{\sqrt{4-27y^2}}$.

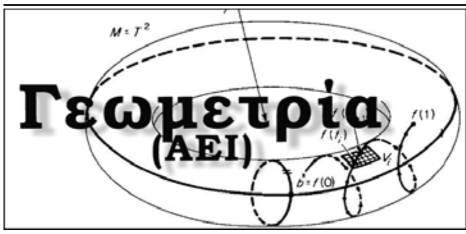
Οπότε για $y = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$ προκύπτει $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{1}{8^n} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos\left(\tfrac{1}{3}\arcsin\left(\tfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right)$. $\square$

Αλλά καί $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \dfrac{4}{3\sqrt{5}-5} \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{3-\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\cos\left(\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right) = 4\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\right)^3 - 3\,\dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \ldots = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}\right)^2} = \ldots = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.



Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Γρηγόρης Κωστάκος) Να αποδειχθεί ότι άν όλες οι εφαπτομένες ευθείες μιάς λείας και κανονικής επίπεδης καμπύλης διέρχονται από κοινό σημείο, τότε η καμπύλη είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας).*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&p=54355#p54355

Λύση 1 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Έστω γ : η λεία καμπύλη και M σημείο της. Υπάρχει περιστροφή του συστήματος των αξόνων, ώστε κάποιο τμήμα της γ, έστω το $\gamma*$, «γύρω» από το σημείο M να είναι συνάρτηση. Στο νέο σύστημα αξόνων έχουμε $f : D \to \gamma*$, όπου D : διάστημα. Οι εφαπτόμενες της $\gamma*$ για κάθε $x_o \in D$, διέρχονται από $N\,(a,b)$.

Η εφαπτομένη είναι $\varepsilon : y = f'\,(x_0)\cdot x + f\,(x_0) - x_0\cdot f'\,(x_0)$. Για κάθε $x_o \in D$, ισχύει $f'\,(x_0)\cdot a + f\,(x_0) - x_0\cdot f'\,(x_0) = b$.

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση: $f'\,(x)\cdot a + f\,(x) - x\cdot f'\,(x) = b$. Τότε $f'\,(x)\cdot(a-x) + f\,(x) = b \Rightarrow \frac{f'(x)}{a-x} + \frac{f(x)}{(a-x)^2} = \frac{b}{(a-x)^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{a-x}\right)' = \left(\frac{b}{a-x}\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{a-x} = \frac{b}{a-x} + c \Rightarrow f\,(x) = b + c\cdot(a-x)$.

Δηλαδή η $\gamma*$ αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, είναι λεία, συνεπώς πρόκειται για ευθεία ή τμήμα ευθείας.

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος) Μία λύση με διαφορική γεωμετρία (οι συναρτήσεις θεωρούμε ότι είναι C^2)

Ας είναι $\bar{x} = \bar{x}(s)$ η εξίσωση της καμπύλης, όπου s η φυσική παράμετρός της. Λόγω της συνθήκης που δίνεται, ισχύει

$\bar{x} = m\bar{x}'$, όπου m συνάρτηση του s.

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε

$\bar{x}' = m'\bar{x}' + m\bar{x}''$.

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\bar{x}''$ και επειδή ισχύει $\bar{x}'\cdot\bar{x}'' = 0$, βρίσκουμε

$m\bar{x}'' = 0$.

Άρα είναι $\bar{x}'' = 0$, οπότε $\bar{x} = \bar{a} + s\bar{b}$, όπου τα $\bar{a}, \bar{b}$ τυχαία σταθερά διανύσματα. Δηλαδή η καμπύλη είναι ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Δημήτρης Χριστοφίδης) (Το Θεώρημα Καραθεοδωρή) Δίνεται ένα υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ και ένα σημείο x που ανήκει στην κυρτή θήκη του X. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει υποσύνολο Y του X ώστε:*

- $|Y| \leqslant n+1$
- *Το x ανήκει στην κυρτή θήκη του Y.*

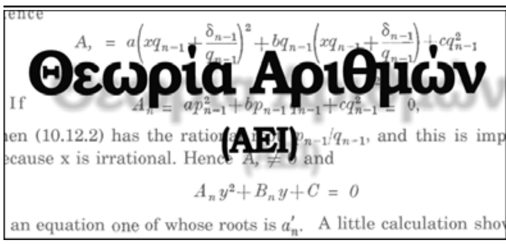
---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=11&p=42317#p42317

Λύση (Νίκος Μαυρογιάννης) Το x είναι κυρτός γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένων το πλήθος στοιχείων του X. Δηλαδή υπάρχουν στοιχεία x_1, ...,x_m του X και μη αρνητικοί αριθμοί c_1, ...,c_m που έχουν άθρισμα 1 έτσι ώστε $x = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i$ Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο m είναι ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα δηλαδή ότι το x δεν είναι κυρτός γραμμικός συνδυασμός λιγότερων από m στοιχείων του X.

Περίπτωση 1 $m \leq n+1$ Τότε έχουμε τελειώσει

Περίπτωση 2 $m \geq n+2$ Θα υπάρχουν $t_1 \leq .... \leq t_r < 0 \leq t_{r+1} \leq ... \leq t_m$ με άθροισμα μηδέν ώστε $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i x_i = 0$ Τότε για κάθε αριθμό p ισχύει: $x = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i + p \sum\limits_{i=1}^{m} t_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (c_i + p t_i) x_i$ και $\sum\limits_{i=1}^{m} (c_i + p t_i) = 1$ Υπάρχουν επιλογές του p έτσι ώστε να ισχύει $c_i + p t_i \geq 0$ για όλα τα i. Μάλιστα πρέπει $p \geq -\frac{c_i}{t_i}$ αν $t_i > 0$ $p \leq -\frac{c_i}{t_i}$ αν $t_i < 0$ Αν θεωρήσουμε τον p να είναι ίσος με τον ελάχιστο από τους $-\frac{c_i}{t_i}$ για τα $t_i < 0$ δηλαδή για τα $i \leq r$ ας τον πούμε $p = -\frac{c_{i_0}}{t_{i_0}}$ τότε όλοι οι συντελεστές $c_i + p t_i$ είναι μη αρνητικοί αλλά αυτός που αντιστοιχεί στην θέση i_0 είναι μηδέν Επομένως το x είναι κυρτός γραμμικός συνδυασμός $m-1$ στοιχείων του X άτοπο απο την υπόθεση ότι ο m είναι ελάχιστος.



Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Γιάννης Τσόπελας) Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς ν με άθροισμα ψηφίων $\Sigma(\nu)$ οι οποίοι ικανοποιούν συγχρόνως τις παρακάτω ιδιότητες*

- $\Sigma(\nu) | \nu$ *και*
- *Οι αριθμοί $\Sigma(\nu)$ και $\dfrac{\nu}{\Sigma(\nu)}$ είναι πρώτοι μεγαλύτεροι του 3.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=6385

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Υποθέτουμε ότι $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$. Τότε $\Sigma(n) = a + b + c$, όπου $0 \leq a, b, c \leq 9$ και $a \neq 0$. Από τις υποθέσεις έπεται ότι

$$n = \Sigma(n) \cdot p, \text{ όπου } p \text{ πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 3} \tag{1}$$

και

$$\Sigma(n) = a + b + c \text{ είναι πρώτος μεγαλύτερος του 3} \tag{2}$$

Όμως $n - \Sigma(n) = 9(11a + b) \equiv 0 \pmod 9$ και από την άλλη

$n - \Sigma(n) = \Sigma(n) \cdot p - \Sigma(n) = \Sigma(n)(p-1)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\Sigma(n)(p-1) \equiv 0 \pmod 9$ και αφού $(\Sigma(n), 9) = 1$ προκύπτει ότι $p - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Επίσης, αφού p περιττός πρώτος προκύπτει ότι $p - 1 \equiv 0 \pmod 2$ κι έτσι

$$p - 1 \equiv 0 \pmod{18}. \tag{3}$$

Λόγω των (1) και (3) έπεται ότι $p = 19, 37, 73, 109, 127, 163, 181, 199$.

Αν $p = 163, 181, 199$ τότε λόγω της (1) (αφού n τριψήφιος) έπεται ότι $\Sigma(n) = 5$ από το οποίο δεν προκύπτουν λύσεις.

Αν $p = 109, 127$ τότε $\Sigma(n) = 5$ ή 7 και δεν προκύπτει κάποια λύση.

Αν $p = 73$ τότε $\Sigma(n) = 5, 7, 11, 13$ από το οποίο προκύπτουν οι λύσεις $n = 7 \cdot 73 = 511$ και $n = 11 \cdot 73 = 803$.

Αν $p = 37$ τότε $\Sigma(n) = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ από το οποίο προκύπτουν οι λύσεις $n = 11 \cdot 37 = 407$,

$n = 13 \cdot 37 = 481$ και $n = 17 \cdot 37 = 629$.

Αν $p = 19$ τότε από τη σχέση (1)

$$n = 19\Sigma(n),$$

οπότε $100a+10b+c = 19a+19b+19c$, δηλαδή $b = 9a-2c$. Για $a \geq 4$ η τελευταία είναι αδύνατη. Για $a = 3$ παίρνουμε $b = c = 9$ από το οποίο δεν προκύπτει λύση. Για $a = 2$ αφού $a + b + c = 2 + 18 - 2c + c = 20 - c$ είναι πρώτος έπεται ότι $c = 1, 3, 7, 9$ οπότε προκύπτουν οι λύσεις $n = 13 \cdot 19 = 247$ και $n = 11 \cdot 19 = 209$. Για $a = 1$ όμοια ο $a + b + c = 10 - c$ πρέπει να είναι πρώτος δηλαδή $c = 3, 5$ απο τα οποία προκύπτει η λύση $n = 7 \cdot 19 = 133$.

Οι λύσεις είναι οι αριθμοί

$$n = 133, 209, 247, 407, 481, 511, 629, 803$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Σεραφείμ Τσιπέλης) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία*

$$a_n = [n\sqrt{2}] \text{ με } n \epsilon \mathbb{N}$$

έχει άπειρους όρους που είναι δυνάμεις του 2.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=2591

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος αριθμός, οπότε το δυαδικο του αναπτυγμα περιεχει απειρα 1. Εστω τυχαιο $M \in \mathbb{N}$ και εστω $m > M$ τετοιο ωστε το $(m+1)-$οστο ψηφιο του αναπτυγματος ειναι 1 και τα m ψηφια στα αριστερα του σχηματιζουν τον αριθμο k. Τοτε εχουμε

$$\frac{k+1}{2^m} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{k+1/2}{2^m}.$$

Αντιστρεφοντας εχουμε

$$\frac{2^m}{k+1} < \sqrt{2} < \frac{2^m}{k+1/2} < \frac{2^m+1}{k+1}.$$

(η τελευταια ανισοτητα οφειλεται στο γεγονος οτι $k \geq 2^{m-1}$, αφού $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$)

Αρα $\lfloor (k+1)\sqrt{2} \rfloor = 2^m$ και ο $(k+1)-$οστος ορος της ακολουθιας μας ειναι ο 2^m.

Επειδή διαφορετικά m δίνουν διαφορετικά k, το άπειρο πλήθος των m, εξασφαλίζει την ύπαρξη άπειρων όρων, οι οποίοι είναι δυνάμεις του 2, στην ακολουθία $a_n = [n\sqrt{2}]$, $n \epsilon N$.

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Χρήστος Κυριαζής) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε πως για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν αριθμοί*

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n$$

στο διάστημα $[a, b]$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\vartheta_1) + f'(\vartheta_2) + \ldots. + f'(\vartheta_n)}{n}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&p=61378#p61378

Λύση (Κώστας Τσουβαλάς) Χωρίζουμε το διάστημα $[d_1, d_n]$ σε n υποδιαστήματα :

$[d_1, d_2], [d_2, d_3], \ldots, [d_{n-1}, d_n]$ έτσι ώστε:

$d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \ldots = d_n - d_{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Εφαρμόζοντας ΘΜΤ στα $[a, d_1], [d_1, d_2], \ldots, [d_{n-1}, b]$ υπάρχουν:

$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n \epsilon (a, d_1), (d_2, d_1), \ldots, (d_{n-1}, b)$

αντίστοιχα έτσι ώστε:

$\sum_{j=1}^{n} f'(\vartheta_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(d_j) - f(d_{j-1})}{d_j - d_{j-1}} = \frac{1}{d_j - d_{j-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} f(d_j) - f(d_{j-1}) \right) = \frac{f(d_n) - f(d_1)}{d_j - d_{j-1}}$

Όμως

$$\sum_{j=1}^{n} d_j - d_{j-1} = d_n - d_1 = n(d_j - d_{j-1})$$

Άρα: $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f'(\vartheta_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{f(d_n) - f(d_1)}{d_j - d_{j-1}} = \frac{f(d_n) - f(d_1)}{d_n - d_1}$

Υ.Γ Θεώρησα $a = d_1, b = d_n$

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αν A είναι ένας $\nu\times\nu$ πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση $A^2-A+I=\mathbb{O}$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $B=A-kI$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $k\in\mathbb{R}$ και να βρεθεί ο αντίστροφός του συναρτήσει του πίνακα A.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=11183

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Είναι $A=B+kI$, οπότε η δοθείσα γράφεται $(B+kI)^2-(B+kI)+I=0$ και άρα $B(B+(2k-1)I)=(k^2-k+1)I$ (*).

Ο αριθμός $k^2-k+1=(k-1/2)^2+1/4\geq\frac{1}{4}$ είναι μη μηδενικός, οπότε από την (*), διαιρώντας με τον μη μηδενικό αυτό αριθμό, βλέπουμε ότι $B^{-1}=(B+(2k-1)I)/(k^2-k+1)=(A+(k-1)I)/(k^2-k+1)$. Αυτό απαντά και στις δύο ερωτήσεις. Λύση 2η (Δημήτρης Χριστοφίδης) Μια διαφορετική απάντηση αλλά μόνο για το πρώτο ερώτημα: Αν ο B δεν ήταν αντιστρέψιμος για κάποιο $k\in\mathbb{R}$, τότε θα υπήρχε $0\neq v\in\mathbb{R}^n$ ώστε $Av=kv$. Αλλά τότε θα είχαμε $(k^2-k+1)v$ = 0, άτοπο αφού $v\neq 0$ και $k^2-k+1>0$ για $k\in\mathbb{R}$.

Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Στράτος Παπαδόπουλος) Αν μια συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και ισχύει $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to\beta^-}f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο (α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=3018&view=next

---

Λύση 1 (Κώστας Σερίφης)
Θεωρούμε την συνάρτηση g γιατην οποία:
$g(x)=e^{f(x)},x\in(\alpha,\beta)$ και $g(\alpha)=g(\beta)=0$.
Κατόπιν εφαρμόζουμε Rolle στο $[\alpha,\beta]$ για την g. Και αν το όρια ήταν $+\infty$, θα θεωρούσαμε την g: $g(x)=e^{-f(x)},x\in(\alpha,\beta)$ και $g(\alpha)=g(\beta)=0$.
Λύση 2 (Αλέξανδρος Συγκελάκης)
Λόγω της $\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$:
$(\exists\ \frac{b-a}{2}>\epsilon_1>0)(\forall x\in(a,a+\epsilon_1))(f(x)<0)$ άρα λόγω θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής υπάρχει κάποιο $x_1\in(a,a+\epsilon_1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=2f(a+\epsilon_1)$. Όμοια, λόγω της $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$:
$(\exists\ \frac{b-a}{2}>\epsilon_2>0)(\forall x\in(b-\epsilon_2,b))(f(x)<0)$ άρα λόγω θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής υπάρχει κάποιο $x_2\in(b-\epsilon_2,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2f(b-\epsilon_2)$. Αν $2f(a+\epsilon_1)=2f(b-\epsilon_2)$ τότε από θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$ (τα x_1,x_2 είναι διαφορετικά μεταξύ τους διότι έχει γίνει κατάλληλη επιλογή των ϵ_1, ϵ_2 στην αρχή ώστε να μην είναι ίσα με $\dfrac{a+b}{2}$) τελειώνουμε. Αν π.χ. $2f(a+\epsilon_1)>2f(b-\epsilon_2)$, τότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα (a,x_1) υπάρχει x_3 τέτοιο ώστε $f(x_3)=2f(b-\epsilon_2)$ και τότε εφαρμόζουμε το θ. Rolle στο διάστημα $[x_3,x_2]$. Όμοια αν $2f(a+\epsilon_1)<2f(b-\epsilon_2)$.
Σχόλιο 1 (Μιχάλης Λάμπρου)
Μετά τις δύο κομψές και εκ διαμέτρου διαφορετικές αποδείξεις, θα ήθελα να κάνω μερικά σχόλια. Νομίζω ότι είναι χρήσιμα για συζήτηση στη τάξη.
1) Στη θέση της g του Κώστα, υπάρχει μία ποικιλία άλλων συναρτήσεων που και αυτές οδηγούν σε λύση. Π.χ. $g(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}$ αν $a<x<b$ και $g(a)=g(b)=0$. ή (αν οι μαθητές ξέρουν την παράγωγο της $\arctan$)
$g(x)=\arctan f(x)$ αν $a<x<b$ και $g(a)=g(b)=-\pi/2$.
2) Η μέθοδος του Αλέξανδρου ουσιαστικά λέει:
Εξετάζουμε μία ευθεία της μορφής $y=c$ κάτω από την $y=f((a+b)/2)$. Η ευθεία αυτή θα κόβει το γράφημα της f σε τουλάχιστον δύο σημεία, ένα αριστερά και ένα δεξιά του $x=(a+b)/2$. Πράγματι, αν αριστερά του $x=(a+b)/2$ ίσχυε $f(x)>c$ τότε θα ήταν και $lim_{x\to a_+}f(x)\geq c$, άτοπο. Όμοια δεξιά. Υπάρχουν λοιπόν δύο σημεία p,q με $p<(a+b)/2<q$ τέτοια ώστε $f(p)=f(q)=c$. Εφαρμόζουμε τώρα Rolle στο $[p,q]$. Πιστεύω ότι μπορεί κανείς να κτίσει ωραία συζήτηση με τους μαθητές πάνω σε αυτό το θέμα. Να ένα ακόμα πόρισμα που ταιριάζει τόσο στην τεχνική Κώστα, όσο και Αλέξανδρου: Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση με την παραπάνω ιδιότητα (για το όριο στο α+ και β-) είναι άνω φραγμένη και λαμβάνει αυτή την ακρότατη τιμή της.
Λύση 3 (Γιώργος Ροδόπουλος)
Πολύ ωραίες οι αποδείξεις και οι επισημάνσεις. Μια άλλη προσέγγιση είναι και η εξής: Αν δεχθούμε ότι η f είναι 1-1 τότε σαν συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο (α,β) θα ήταν γνησίως μονότονη που έρχεται σε αντίφαση με τα δοθέντα

όρια. Συνεπώς η f δεν είναι 1-1 και έτσι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ *και* $f(x_1) = f(x_2)$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ *ή* $[x_2, x_1]$ προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Σπύρος Καπελλίδης) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση* $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *υπάρχει παράγουσά της* g *με την ιδιότητα* $g(x) = f^2(x) + f(x), \forall x > 0$, *να αποδειχθεί ότι* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&p=56890#p56890

Λύση 1 (Μιχάλης Λάμπρου) Έχουμε
$f = g' = (f^2 + f)' = 2ff' + f'$ (*).
Πρώτον $f(x) \neq -1/2$ γιατί η (*) θα έδινε $-1/2 = 0$. Άρα από την (*) έχουμε
$f' = \frac{f}{2f+1} > 0.$ (**)
συνεπώς f αύξουσα και άρα συγκλίνει καθώς το x τείνει στο άπειρο είτε σε c πραγματικό είτε στο $+\infty$. Όμως δεν μπορεί να τείνει σε c πραγματικό γιατί τότε η (**) δίνει ότι $f' \to \frac{c}{2c+1}$, άρα για μεγάλα x είναι $f' \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2c+1}$ = θετική σταθερά, οπότε (απλό) θα είχαμε και $f(x) \to \infty$. Τελικά, $f(x) \to \infty$ αφού δεν τείνει σε πραγματική σταθερά, και άρα από την (**) $f' \to 1/2$. Βλέπουμε τώρα ότι το ζητούμενο όριο είναι περίπρωση $\frac{\infty}{\infty}$. Από τον κανόνα του De l'Hospital ισούται με το όριο στο άπειρο του $\frac{f'}{(x)'} = f'$, που είδαμε ότι είναι $1/2$.

Λύση 2 (Σπύρος Καπελλίδης) Να δώσω μία διαφορετική αντιμετώπιση, μόνον στο θέμα γιατί η f δεν είναι φραγμένη: Αν ήταν, τότε λόγω της δοθείσας σχέσης θα ήταν φραγμένη και η g Η g όμως είναι γνησίως αύξουσα, ως άθροισμα δύο γνησίως αυξουσών, άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = k > 0 \wedge g(x) < k, \forall x > 0$ Αφ' ετέρου η g είναι γνησίως κυρτή, γιατί $g'' = f' = \frac{f}{2f+1} > 0$, άρα $g(\frac{1+n}{2}) < \frac{g(1)+g(n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} g(\dfrac{1+n}{2}) \leq \lim\limits_{n \to \infty} (\dfrac{g(1)+g(n)}{2}) \Rightarrow k \leq \frac{g(1)+k}{2} \Rightarrow k \leq g(1)$, άτοπο.

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Θωμάς Ραϊκόφτσαλης) Ο τύπος παρεμβολής του Lagrange*
Πηγή: Παναγιώτης Μάγειρας, «Αλγεβρικά θέματα», Τόμος 5, 1974
Να κατασκευασθεί πολυώνυμο $f(x)$ *βαθμού μικρότερου ή ίσου του* $\nu - 1$, *ώστε για τις διακεκριμμένες τιμές* $x_1, x_2, ..., x_\nu$ *της μεταβλητής* x, *να παίρνει αντίστοιχα τις τιμές* $y_1, y_2, ..., y_\nu$, *δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις:*

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, ..., f(x_\nu) = y_\nu$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=11978#p11978

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Κατασκευάζουμε το πολυώνυμο $f_1(x)$, βαθμού το πολύ $\nu - 1$ τέτοιο ώστε: $f_1(x_1) = y_1$ και $f_1(x_2) = f_1(x_3) = ... = f_1(x_\nu) = 0$.
Τότε θα είναι:
$f_1(x) = c\,(x - x_2)\,(x - x_3)\,.....\,(x - x_\nu)$ και
$f_1(x_1) = y_1 = c\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,.....\,(x_1 - x_\nu)$
Αρα θα έχουμε:
$f_1(x) = \frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_\nu)} \cdot$
$(x - x_2)\,(x - x_3)\,....\,(x - x_\nu)$
Με εντελώς όμοιο τρόπο κατασκευάζουμε τα:
$f_2(x) = \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)...(x_2-x_\nu)} \cdot$
$(x - x_1)\,(x - x_3)\,....\,(x - x_\nu)$
.....αλλά και:
$f_\nu(x) = \frac{y_\nu}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)...(x_\nu-x_{\nu-1})} \cdot$
$(x - x_1)\,(x - x_2)\,....\,(x - x_{\nu-1})$
Τώρα θέτουμε:
$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_\nu(x)$
Τότε θα είναι:
$f(x_1) = f_1(x_1) + f_2(x_1) + ... + f_\nu(x_1) = y_1$
$f(x_2) = f_1(x_2) + f_2(x_2) + ... + f_\nu(x_2) = 0 + y_2 + 0 + ... + 0 = y_2$
αλλά και:
$f(x_\nu) = f_1(x_\nu) + f_2(x_\nu) + ... + f_\nu(x_\nu) = 0 + 0 + ... + y_\nu = y_\nu$
Τώρα το $f(x)$ είναι το πολύ $\nu - 1$ βαθμού και επαληθεύει το ζητούμενό μας. Αν $g(x)$ κι άλλη λύση για το πρόβλημα, τότε θα ισχύει:

$$f(x_1) = g(x_1), f(x_2) = g(x_2), ...f(x_\nu) = g(x_\nu)$$

απ'οπου έχουμε:

$$f(x) \equiv g(x).$$

Αρα το πολυώνυμο $f(x)$ είναι και η μοναδική λύση του προβλήματος.
Πηγή: Θ.Καζαντζής «*Πολυώνυμα*», 1977

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=9776

Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή) Για να μη μπορεί ο άλλος παίκτης να νικήσει (να πει 100), θα πρέπει εγώ να έχω πει το 89 (11 μικρότερο από το 100). Για να πω το 89 θα πρέπει πριν να έχω πει πάλι 11 μικρότερο του 89 (δηλαδή 78) κ.λ.π. Οπότε, αν και ο άλλος παίκτης γνωρίζει τη στρατηγική πρέπει να ξεκινήσω πρώτη. Ας συμπληρώσω τους αριθμούς που πρέπει να πω :1,12,23,34,45,56,67,78,89
Σχόλιο (Δημήτρης Χριστοφίδης) Στην πράξη φυσικά, αν ακολουθήσουμε την τεχνική της Φωτεινής θα ξεσκεπαστούμε γρήγορα. Νομίζω ότι είναι πιο ασφαλές αρχικά να παίζουμε τυχαία και προς το τέλος να επιλέξουμε κάποιο αριθμό ώστε να κάνουμε το άθροισμα ίσο με 67 (ή αν είμαστε άτυχοι ίσο τότε να πάμε για το 78) και μετά να συνεχίσουμε με την τακτική. Αυτό θα μας κερδίσει περισσότερα παιχνίδια (ακόμη και όταν παίζουμε δεύτεροι) μέχρι ο αντίπαλος να αντιληφθεί την στρατηγική.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Θάνος Μάγκος) (Μία ειδική περίπτωση του 17ου προβλήματος του Hilbert). Ας είναι $f(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $A(x), B(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ώστε*

$$f(x) = (A(x))^2 + (B(x))^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&p=55231#p55231

Λύση (Αναστάσιος Κοτρώνης) Αφού το πολυώνυμο παίρνει μη αρνητικές τιμές, θα είναι $p(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_0$ με $a_{2n} > 0$. Τότε όμως

$$P(x) = \underbrace{\prod_{i=1}^{m}(x - z_i)(z - \bar{z}_i) \prod_{i=1}^{\ell}(x - \rho_i)^{2m_i}}_{K} =$$

$$\underbrace{\left(\sqrt{a_{2m}} \prod_{i=1}^{k}(x - z_i)\right) \cdot \left(\sqrt{a_{2m}} \prod_{i=1}^{k}(x - \bar{z}_i)\right)}_{L} =$$

$$(A(x) + iB(x)) \cdot (A(x) - iB(x)) = A^2(x) + B^2(x)$$

1. Στην παράσταση K $z_i, \bar{z}_i$ είναι οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες και ρ_i οι πραγματικές.

2. Στην παράσταση L κάποιοι από τα $z_i, \bar{z}_i$ είναι πραγματικοί.

3. $A(x)$, $B(x) \in \mathbb{R}[x]$.

4. Ο εκθέτης του $(x - \rho_i)$ είναι άρτιος γιατί αν είχαμε $f(x) = (x - \rho)^{2k+1}g(x)$ με $g(\rho) \neq 0$, λόγω συνέχειας της g, σε μικρή περιοχή εκατέρωθεν του ρ θα είχαμε αλλαγή προσήμου της f, που είναι άτοπο

Από το Prasolov *Polynomials*, Springer, 2004
Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ισχύει το ίδιο για τα πολυώνυμα με περισσότερες από μια μεταβλητές. Ένα παράδειγμα το οποίο δόθηκε το 1967 από τον T. Motzkin είναι το $F(x, y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1$. Το παραπάνω πολυώνυμο έχει μη αρνητικές τιμές αλλά δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τετραγώνων πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.