

με:

$9y + 99z = 49000 \Rightarrow 9 \cdot (y + 11z) = 49000 \Rightarrow 9 \nmid 49000$ ,  
 που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων  
 του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με  
 το 9.

**Β' τάξη Λυκείου 2007**

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  έχει τις πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$ , και  $x_3$  που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)$$

συναρτήσει των  $\kappa, \lambda$ .

**Λύση**

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (1)$$

Η παράσταση  $\Gamma$  γράφεται:

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_1^2)(1 + x_1^2)(1 - x_2^2)(1 + x_2^2)(1 - x_3^2)(1 + x_3^2) \\ &= (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2) \\ &= P(1) \cdot [(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)] \\ &= -P(1)P(-1) = -(1 + \kappa + \lambda)(-1 - \kappa + \lambda) = \\ &= (1 + \kappa)^2 - \lambda^2. \end{aligned}$$

2. Θεωρούμε τόξο  $\widehat{AB} = 90^\circ$  και προεκτείνουμε τη χορδή  $AB$  κατά ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma = AB$ . Ονομάζουμε  $\Delta$  το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου  $\widehat{AB}$  από το  $\Gamma$  και  $K$  το ίχνος της κάθετης από το  $A$  προς τη  $B\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:  $KB = 2KA$ .

**Λύση**

1<sup>ος</sup> Τρόπος Έχουμε:

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A \cdot \Gamma B = 2R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = 4R^2 \Rightarrow \Gamma\Delta = 2R = 2 \cdot O\Delta.$$

Επειδή επιπλέον  $O\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ , αρκεί να αποδείξουμε ότι  $O\hat{\Gamma}\Delta \approx A\hat{K}B$  ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι:  $O\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}K$ .

Πράγματι αν  $E$  είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του  $A$  ως προς τον κύκλο  $O$ , τότε:

$$OB \parallel EG \Rightarrow EG \perp OE \Rightarrow O\Delta\Gamma E \text{ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}$$

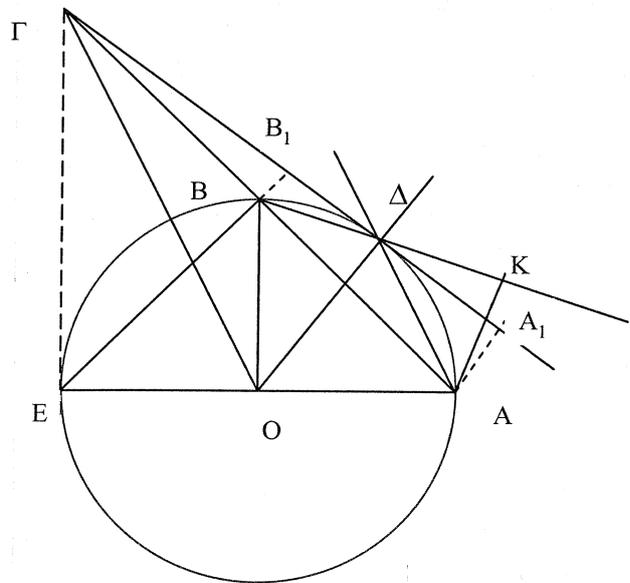
$$\Rightarrow \hat{\Delta}\Gamma E = \hat{\Delta}O A \Rightarrow 2\hat{\Delta}\Gamma O = 2 \cdot \hat{A}B K$$

$$\Rightarrow \hat{\Delta}\Gamma O = \hat{A}B K$$

2<sup>ος</sup> Τρόπος Έστω  $E$  το αντιδιαμετρικό σημείο του  $A$  ως προς τον κύκλο κέντρου  $O$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $A\Delta B E$  έπεται ότι  $\widehat{K\Delta A} = \widehat{AEB} = 45^\circ$ , οπότε και το τρίγωνο  $A\Delta K$

είναι ορθογώνιο ισοσκελές.



Άρα είναι  $KA = K\Delta = \frac{A\Delta\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$

Επιπλέον, αν είναι  $AA_1 \perp \Gamma\Delta$ ,  $BB_1 \perp \Gamma\Delta$  και  $OA = R$ , τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta B}\right)^2 = \frac{\Delta A^2 / 2R}{\Delta B^2 / 2R} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = 2. \quad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι  $\Delta B = \frac{A\Delta\sqrt{2}}{2}$ , οπότε από την

(1) έπεται ότι  $\Delta B = K\Delta = KA$  και  $KB = K\Delta + \Delta B = 2 \cdot KA$ .

3. Αν  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι, να απο-

δείξετε ότι:  $\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha + \beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta$ .

**Λύση**

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta} &= \frac{\overbrace{\alpha^3 + \alpha^3 + \dots + \alpha^3}^{\alpha\text{-φορές}} + \overbrace{\beta^3 + \beta^3 + \dots + \beta^3}^{\beta\text{-φορές}}}{\alpha + \beta} \geq \\ &\geq \alpha^{+\beta} \sqrt[3]{(\alpha^3)^\alpha (\beta^3)^\beta} = \alpha^{+\beta} \sqrt[3]{(\alpha^\alpha \beta^\beta)^3} \end{aligned}$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε παράλληλες προς τις  $A\Gamma$  και  $AB$  που τέμνουν τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$ , αντίστοιχα. Αν είναι  $MK = x$ ,  $M\Lambda = y$ , να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου M για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Λύση

1<sup>ος</sup> τρόπος Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S \cdot \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right) = \left( \frac{\beta^2 \kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2 \lambda^2}{\alpha^2} \right) \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right) \geq$$

$$\geq (\kappa + \lambda)^2 = \alpha^2 \Rightarrow S \geq \frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$

οπότε έχουμε:  $S_{\min} = \frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$ .

Η ισότητα ισχύει όταν  $\frac{\beta \kappa}{\alpha} = \frac{\gamma \lambda}{\alpha}$  ή  $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$ , όταν

το σημείο M χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο  $\frac{\gamma^2}{\beta^2}$ .

2<sup>ος</sup> Τρόπος Έστω ότι είναι  $MB = \kappa$  και  $MG = \lambda$ , οπότε θα είναι  $\kappa + \lambda = \alpha$ .

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta \kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma \lambda}{\alpha}$$

Αρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2 \kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2 \lambda^2}{\alpha^2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2 \kappa^2 + \gamma^2 (\alpha - \kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left( \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} \right) \kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha} \kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ<sup>2</sup> τον  $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} > 0$ , οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για

$$\kappa = - \frac{-2\gamma^2 / \alpha}{2(\beta^2 + \gamma^2) / \alpha^2} = \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}.$$

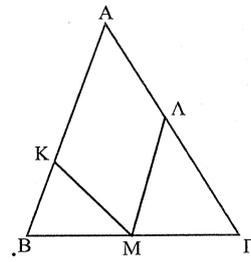
Τότε είναι  $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2}$ , οπότε το σημείο

M στο οποίο λαμβάνεται το ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο

$$\frac{MB}{MG} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}.$$

Η τιμή του ελάχιστου είναι  $f\left(\frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}\right) =$

$$\left( \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} \right) \left( \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} \right)^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha} \cdot \left( \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} \right) + \gamma^2 = \frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$$



### Γ' τάξη Λυκείου

1. Αν  $\log_{150} 2 = x$ ,  $\log_{150} 3 = y$  τότε να υπολογι-

στεί η τιμή της παράστασης  $A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$

Λύση

$$150^x = 2, 150^y = 3$$

$$A = \left( \frac{150}{3} \right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}} = \left( \frac{150}{150^y} \right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}} = (150^{1-y})^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}} = 150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$= (150^{1-y})^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}} = 150^{\frac{1-x-y}{2}} = \sqrt{150^{1-x-y}} =$$

$$= \sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}} = \sqrt{\frac{150}{150^x \cdot 150^y}} = \sqrt{\frac{150}{2 \cdot 3}} = \sqrt{25} = 5.$$

2<sup>ος</sup> τρόπος  $\log_{150} A = \frac{1-x-y}{2(1-y)} = \log_{150} 50 =$

$$= \frac{\log_{150} \left( \frac{150}{6} \right)}{2 \log_{150} \left( \frac{150}{3} \right)} \log_{150} 50 = \frac{1}{2} \log_{150} 25 = \log_{150} 5. \text{ Άρα } A = 5.$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  έχει τις πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$ , και  $x_3$  που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = (1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)$$

συναρτήσεων των κ, λ.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (1)$$

Η παράσταση K γράφεται:

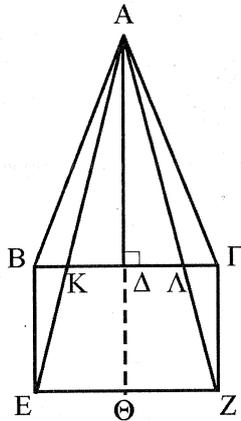
$$K(x_1, x_2, x_3) = (i - x_1)(-i - x_1)(i - x_2)(-i - x_2)(i - x_3)(-i - x_3)$$

$$= (i - x_1)(i - x_2)(i - x_3)(-i - x_1)(-i - x_2)(-i - x_3)$$

$$= P(1)P(-1) = (-i + \kappa i + \lambda)(i - \kappa i + \lambda) = \lambda^2 + (\kappa - 1)^2.$$

Παρατήρηση: Λύνεται και με τους τύπους του Vieta.

3. Να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την εξίσωση:



$$\beta) E(AEZ) = \frac{1}{2} \cdot EZ \cdot A\Theta = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \frac{3}{2} A\Delta = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta \right) = \frac{3}{2} E(AB\Gamma) = \frac{3\kappa^2}{2}$$

$$\frac{E(AK\Lambda)}{E(AEZ)} = \left( \frac{AK}{AE} \right)^2 = \left( \frac{A\Delta}{A\Theta} \right)^2 = \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\text{οπότε } E(AK\Lambda) = \frac{4}{9} E(AEZ) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3\kappa^2}{2} = \frac{2\kappa^2}{3}.$$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Αν είναι  $A = 2(\lambda^2 + \mu^2) - (\lambda + \mu)^2 - 4$  και  $B = \lambda^2 - \lambda\mu + \lambda + \mu - 2$ , όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , να λύσετε την εξίσωση

$$Ax = B,$$

ως προς  $x$ , για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$ .

Μονάδες 5

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu - 4 = (\lambda - \mu)^2 - 2^2 = \\ &= (\lambda - \mu - 2)(\lambda - \mu + 2) \\ B &= \lambda^2 - \lambda\mu + \lambda + \mu - 2 \\ &= \lambda^2 - \lambda\mu + \lambda + \mu - 1 - 1 \\ &= (\lambda^2 - 1) - \mu(\lambda + 1) + (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1 - \mu + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - \mu + 2) \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$(\lambda - \mu - 2)(\lambda - \mu + 2) x = (\lambda - 1)(\lambda - \mu + 2)$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- i) Αν  $\lambda - \mu + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu - 2, \mu \in \mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $0 \cdot x = 0$  και είναι ταυτότητα, δηλαδή αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- ii) Αν  $\lambda - \mu - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu + 2, \mu \in \mathbb{R}$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $0 \cdot x = 4(\mu + 1)$ .

- Για  $\mu = -1$ , οπότε  $\lambda = 1$ , η εξίσωση αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ενώ
- Για  $\mu \neq -1$  η εξίσωση είναι αδύνατη.

- iii) Αν  $\lambda \neq \mu + 2$  και  $\lambda \neq \mu - 2$ , τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - \mu - 2}.$$

**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

2005

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Η μεσοκάθετη της  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ .

Από το  $A$  φέρουμε κάθετη προς τη  $B\Delta$  που τέμνει τη  $B\Delta$  στο  $E$  και τη  $B\Gamma$  στο  $Z$ .

Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AZ$  στο σημείο  $I$ .

Ν' αποδείξετε ότι:

- (α) η  $BI$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{AB\Delta}$ .

Μονάδες 2

- (β) το τετράπλευρο  $BZ\Delta I$  είναι ρόμβος.

Μονάδες 3

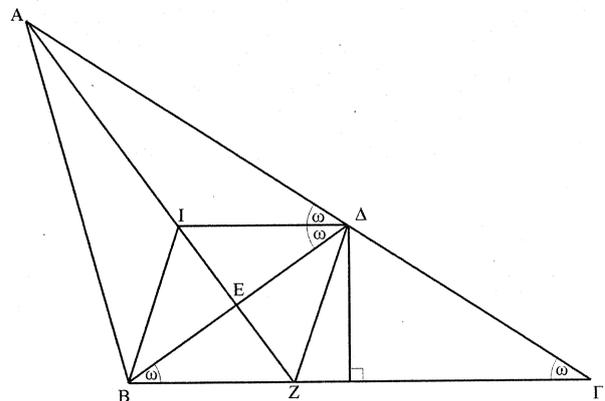
**Λύση**

- α) Αν είναι  $\hat{\Gamma} = \omega$ , τότε  $\hat{B} = 3\omega$  και από  $\Delta B = \Delta\Gamma$  έχουμε ότι  $\Delta\hat{B}\Gamma = \omega$ .

Όμως έχουμε  $\Gamma\hat{\Delta}B = \Delta\hat{\Gamma}B = \omega$  και

$I\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma} = \omega$ , αφού  $\Delta I \parallel B\Gamma$ .

Άρα  $I\hat{\Delta}B = I\hat{\Delta}A = \omega$ , οπότε η  $\Delta I$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\Delta B$ .



Επειδή  $\widehat{A\hat{D}B} = \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2\omega$  και  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \hat{B} - \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma} = 3\omega - \omega = 2\omega$ , έπεται ότι το τρίγωνο  $A\hat{D}B$  είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος του  $AE$  είναι και διχοτόμος. Άρα το σημείο  $I$  είναι το έγκεντρο του τριγώνου  $AB\Delta$ , οπότε η  $BI$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ .

β) Επειδή η  $AZ$  είναι μεσοκάθετη της  $B\Delta$  θα είναι  $IB = I\Delta$  και  $ZB = Z\Delta$ .

Επιπλέον  $\widehat{I\hat{B}\Delta} = \frac{\widehat{A\hat{B}\Delta}}{2} = \omega = \widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ , οπότε η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $IBZ$  και αφού  $BE \perp IZ$  ( $BE$  ύψος), το τρίγωνο  $IBZ$  είναι ισοσκελές με  $IB = BZ$ .

Άρα το τετράπλευρο  $IBZ\Delta$  έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

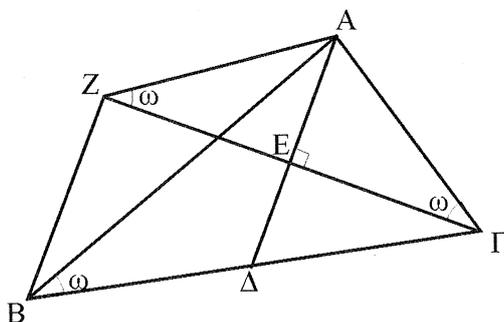
### ΘΕΜΑ 2°

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB > A\Gamma$  η κάθετη από το  $\Gamma$  προς τη διάμεσο  $A\Delta$  την τέμνει στο  $E$  και ισχύει ότι  $\widehat{A\hat{G}E} = \widehat{A\hat{B}\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

Λύση

Έστω  $Z$  το συμμετρικό του  $\Gamma$  ως προς την  $A\Delta$ . Τότε  $A\Gamma = AZ$  και  $\widehat{A\hat{Z}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}Z} = \omega = \hat{B}$ . Άρα το τετράπλευρο  $AZB\Gamma$  είναι εγγράψιμο.



Επιπλέον  $E\Delta \parallel ZB$ , αφού  $E, \Delta$  είναι μέσα των  $\Gamma Z$  και  $\Gamma B$ , αντίστοιχα.

Επομένως  $\widehat{\Gamma\hat{Z}B} = \widehat{\Delta\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$ , οπότε από το εγγράψιμο  $AZB\Gamma$  προκύπτει ότι  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{Z}B} = 90^\circ$ .

### ΘΕΜΑ 3°

Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z$  ικανοποιούν τις ισότητες

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 96 \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

να αποδείξετε ότι και οι τρεις ανήκουν στο διάστημα  $\left[ \frac{8}{3}, \frac{26}{3} \right]$ .

Μονάδες 3

Αν οι  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  με  $x \leq y \leq z$ , να βρείτε τις τριάδες  $(x, y, z)$  που είναι λύσεις του  $(\Sigma)$ .

Μονάδες 2

Λύση

Είναι  $y + z = 16 - x$  και  $y^2 + z^2 = 96 - x^2$ , οπότε από την γνωστή ανισότητα

$$2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2$$

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 2(96 - x^2) &\geq (16 - x)^2 \\ \Leftrightarrow 192 - 2x^2 &\geq 256 - 32x + x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 32x + 64 &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leq x \leq 8, \end{aligned}$$

αφού η εξίσωση  $3x^2 - 32x + 64 = 0$  έχει δύο ρίζες στο  $\mathbb{R}$ ,

$$x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{6} = \frac{32 \pm 16}{6} = \left\langle \frac{8}{3} \right.$$

Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε και ότι πρέπει

$$\frac{8}{3} \leq y \leq 8 \text{ και } \frac{8}{3} \leq z \leq 8.$$

Αν  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  με  $x \leq y \leq z$ , τότε  $z \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

- Για  $z = 8$  έχουμε:  $\{x + y = 8, x^2 + y^2 = 32\} \Leftrightarrow x = 4 = y$
- Για  $z = 7$  έχουμε:  $\{x + y = 9, x^2 + y^2 = 47\}$ , αδύνατο
- Για  $z = 6$  έχουμε  $\{x + y = 10, x^2 + y^2 = 60\}$ , αδύνατο

Για  $z \in \{3, 4, 5\}$ , επειδή  $x \leq y \leq z$ , θα είναι  $x + y + z < 16$ , οπότε δεν υπάρχει λύση. Άρα έχουμε μόνο τη λύση  $(x, y, z) = (4, 4, 8)$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές

$BΓ = α < ΓΑ = β < ΑΒ = γ$ . Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να ελαττωθούν και οι τρεις πλευρές κατά το ίδιο μήκος, έτσι ώστε να γίνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

Μονάδες 5

**Λύση**

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $x < 0$ , τέτοιος ώστε:

$$(α + x)^2 + (β + x)^2 = (γ + x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(α + β - γ)x + α^2 + β^2 - γ^2 = 0, \text{ με } x < 0 \text{ (1)}$$

Η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες στο  $\mathbb{R}$ , αφού

$$\Delta = 4[(α + β - γ)^2 - (α^2 + β^2 - γ^2)] = 8(γ - β)(γ - α) > 0$$

Έτσι η εξίσωση (1) έχει τις ρίζες

$$x_1 = γ - α - β + \sqrt{2(γ - β)(γ - α)},$$

$$x_2 = γ - α - β - \sqrt{2(γ - β)(γ - α)}$$

και ισχύουν

$$S = x_1 + x_2 = 2(γ - α - β)$$

$$P = x_1 x_2 = α^2 + β^2 - γ^2$$

Επειδή οι  $α, β, γ$  είναι πλευρές τριγώνου θα είναι  $S < 0$ , οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i)  $α^2 + β^2 > γ^2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} < 90^\circ$  και το τρίγωνο είναι ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Τότε  $P > 0$  και  $x_2 < x_1 < 0$ , δηλαδή υπάρχουν δύο αρνητικές λύσεις.

Επειδή  $α + x_1 = γ - β + \sqrt{2(γ - β)(γ - α)} > 0$ , η λύση  $x_1$  είναι δεκτή.

Η λύση  $x_2 = γ - α - β - \sqrt{2(γ - β)(γ - α)}$  είναι δεκτή, εφόσον ισχύει ότι:

$$α + x_2 > 0 \Leftrightarrow γ - β > \sqrt{2(γ - β)(γ - α)}$$

$$\Leftrightarrow (γ - β)^2 > 2(γ - β)(γ - α)$$

$$\Leftrightarrow (γ - β)(2α - β - γ) > 0$$

$$\Leftrightarrow β + γ < 2α, \text{ αφού } γ - β > 0.$$

Όμως από  $α < β < γ$  έπεται ότι  $β + γ > 2α$ , οπότε η λύση  $x_2$  δεν είναι δεκτή.

ii)  $α^2 + β^2 = γ^2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$  (το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο).

Τότε  $P = 0$  και  $x_2 < x_1 = 0$ , δηλαδή υπάρχει μια αρνητική λύση.

iii)  $α^2 + β^2 < γ^2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma} > 90^\circ$  (το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο).

Τότε  $P < 0$  και  $x_2 < 0 < x_1$ , δηλαδή υπάρχει μια αρνητική λύση.

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii) η λύση  $x_2$  δεν είναι δεκτή, αφού  $α + x_2 < 0$ .

Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε:

- Αν  $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ , υπάρχει μια λύση
- Αν  $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ , δεν υπάρχει λύση
- Αν  $\hat{\Gamma} > 90^\circ$ , δεν υπάρχει λύση

Στη τρίτη περίπτωση υπάρχει θετική λύση  $x_1$ , οπότε είναι δυνατό να αυξηθούν και οι τρεις πλευρές του τριγώνου κατά τον ίδιο αριθμό, έτσι ώστε να γίνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$|z + 1| = 4z - 2\bar{z} - 6i$$

Μονάδες 5

**Λύση**

$$|z + 1| = 4z - 2\bar{z} - 6i \Leftrightarrow |(x + 1) + yi| = 4(x + yi) - 2(x - yi) - 6i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 2x + 6(y - 1)i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - 2x - 6(y - 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - 2x = 0, -6(y - 1) = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ y = 1, (x + 1)^2 + 1 = 4x^2, x > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ y = 1, 3x^2 - 2x - 2 = 0, x > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ y = 1, x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}, x > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ y = 1, x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right\}.$$

**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 2006**

1. Υπάρχει θετικός ακέραιος  $n$  τέτοιος ώστε:
- Ο  $3n$  είναι τέλειος κύβος, ο  $4n$  τέλεια τέταρτη δύναμη και ο  $5n$  τέλεια πέμπτη δύναμη;
  - Ο  $3n$  είναι τέλειος κύβος, ο  $4n$  τέλεια τέταρτη δύναμη, ο  $5n$  τέλεια πέμπτη δύναμη και ο  $6n$  τέλεια έκτη δύναμη;

Λύση

A) Ναι, π.χ.  $n = 2^{30}3^{30}5^{24}$ .

B) Όχι., διότι, αν υπήρχε, τότε  $2|n$ . Έστω  $a$  ο μεγαλύτερος εκθέτης τέτοιος ώστε  $2^a|n$ .

Τότε  $4|a+2$  (λόγω του ότι ο  $4n$  είναι τέλεια τετάρτη δύναμη) και  $2|a+1$  (λόγω του ότι ο  $6n$  είναι τέλεια έκτη δύναμη) και άρα  $2|1$ , που είναι άτοπο.

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί  $x, y, z, w$  για τους οποίους ισχύει

$$\sqrt{x-y} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-w} + \sqrt{x+w} = x+2.$$

Λύση

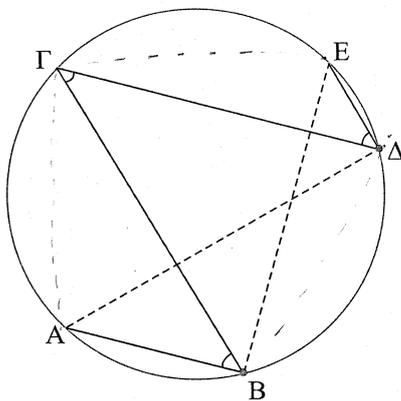
Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x-y}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + \\ &(\sqrt{z-w}-1)^2 + (\sqrt{x+w}-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

και άρα  $x=2, y=1, z=0, w=-1$ .

3. Οι κορυφές  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα έτσι ώστε οι γωνίες  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}, \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{E}$  να είναι ίσες με  $45^\circ$ . Να αποδειχτεί ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2$$



Λύση

Προφανώς  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $B\Gamma \parallel \Delta E$  επομένως:

$$A\Gamma = B\Delta = E\Gamma.$$

Επίσης έχουμε

$$B\Gamma = A\Delta, \Delta\Gamma = BE \text{ και } \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = 90^\circ.$$

Άρα

$$\begin{aligned} AB^2 + \Gamma\Delta^2 &= AB^2 + \Gamma\Delta^2 = AE^2 = \\ &= A\Delta^2 + \Delta E^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2. \end{aligned}$$

- \*4. Μια πραγματική συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = f(x)$$

Να δειχθεί ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύουν:

- $f(x) \neq -1$ ,
- $f(x) \neq 0$
- $f(x+4) = f(x)$

Λύση

- Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας  $a \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(a) = -1$ , τότε  $2 = 0$  άτοπο.
- Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας  $\beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(\beta) = 0$ , τότε  $f(\beta+1) = -1$ . Άτοπο από την προηγούμενη σχέση.
- Έχουμε  $f(x+1) = (f(x)-1)/(f(x)+1)$ ,  $f(x+2) = -1/f(x)$  και επομένως  $f(x+4) = -1/f(x+2) = f(x)$ .

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

- \*1. Για μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει

$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

A) Να βρεθεί το  $f(1)$ .

B) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση  $g(x) = x^3 + x^2f(x) - 2xf^2(x) + 3$  είναι 1-1.

Λύση

Ισχύει  $f(f(1)) = 1$  επομένως

$$f(1) = f(f(f(1))) = (f(1))^3 - 2(f(1))^2 + 3f(1) - 1.$$

Λύνοντας ως προς  $f(1)$  έχουμε  $f(1) = 1$ .

Επίσης,  $g(0) = g(1) = 3$ , οπότε η  $g$  δεν είναι 1-1.

- \*2. Έστω  $\alpha, \beta$  θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

~~$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + w + 4 = 2(x+2)$~~   $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + w + 4 = 2(x+2) \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$