mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ′ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ′ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β′)

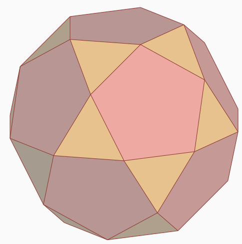
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Δευτέρα 28 Μαΐου 2012

Εκφωνήσεις και Λύσεις των Θεμάτων

4η LaTeX-έκδοση (1/6/2012, 02:40)



Οι απαντήσεις και οι λύσεις είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς των Επιμελητών του δικτυακού τόπου mathematica.gr, αλλά επίσης και από την Δημόσια συζήτηση του mathematica.gr πάνω στα θέματα.

Συνεργάστηκαν:

Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καπελλίδης, Σπύρος Καρδαμίτσης, Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Γρηγόρης Κωστάκος, Ροδόλφος Μπόρης, Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης.

Το Δελτίο διατίθεται ελεύθερα από το δικτυακό τόπο mathematica.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Δευτέρα 28 Μαΐου 2012

ΘΕΜΑ Α. **Α1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

μον. 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

μον. 4

Α2. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο ;

μον. 4

Α4. *Νά χαρακτηρίσετε τίς προτάσεις πού ακολουθούν, γράφωντας στό τετράδιό σας τήν λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στό γράμμα πού αντιστοιχεί σέ κάθε πρόταση.*

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

γ. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ. $\left(\sigma\phi\, x\right)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \,|\, \eta\mu\, x = 0\}$.

ε. $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\, g'(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)\, g(x)\, dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

μον. 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: **Α1.** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1)\,.$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta). \quad \square$$

.

A3. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f. □

A4. α. ⟶ *Σωστό*, β. ⟶ *Σωστό*, γ. ⟶ *Λάθος*, δ. ⟶ *Λάθος*, ε. ⟶ *Λάθος*. □

ΘΕΜΑ Β. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad |w - 5\,\overline{w}\,| = 12 \quad (2)\,.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

μον. 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

μον. 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

μον. 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4\,.$$

μον. 6

ΛΥΣΗ: Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

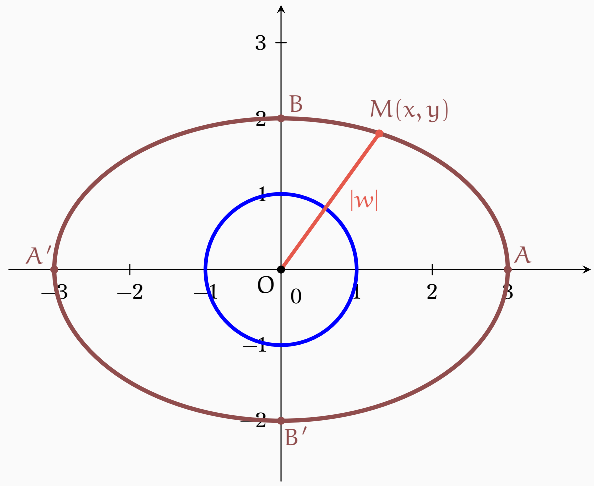
$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad \text{και} \qquad |w - 5\,\overline{w}\,| = 12\,.$$

B1. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(\overline{z}-1) + (z+1)(\,\overline{z+1}\,) = 4 \quad \Leftrightarrow$
$|z|^2 - z - \overline{z} + 1 + |z|^2 + z + \overline{z} + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,|z|^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1 \quad (3)\,.$
Αρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. □

B2. Έχουμε ότι $|z_1| = |z_2| = 1$.
Επίσης $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\,\overline{z_1}\,z_2) = 2 \quad \Rightarrow$
$1^2 + 1^2 - 2\,\mathrm{Re}(\,\overline{z_1}\,z_2) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(\,\overline{z_1}\,z_2) = 0\,.$
Άρα $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\,\overline{z_1}\,z_2) = 1^2 + 1^2 + 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad |z_1 + z_2| = \sqrt{2}\,.$ □

B3. Αν $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $M(x, y)$ η εικόνα του, τότε

$$
\begin{aligned}
&|w - 5\,\overline{w}\,| = 12 && \Leftrightarrow \\
&|w - 5\,\overline{w}\,|^2 = 12^2 && \Leftrightarrow \\
&|-4x + 6yi\,|^2 = 144 && \Leftrightarrow \\
&\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\,.
\end{aligned}
$$



Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\,.$$

Οι κορυφές της έλλειψης είναι $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ και $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$. Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(AA') = 6$ και ο μικρός άξονας $(BB') = 4$.

Για οποιοδήποτε σημείο M της έλλειψης ισχύει ότι $\dfrac{(BB')}{2} \le (OM) \le \dfrac{(AA')}{2}$.

Άρα $2 \le |w| \le 3$ (4).

- Για $w = 2i$ ή $w = -2i$, έχω ότι $\min |w| = 2$ και
- για $w = 3$ ή $w = -3$, έχω ότι $\max |w| = 3$. □

B4. Από τις (3), (4) και την τριγωνική ανισότητα προκύπτει:

$$0 < 1 = 2 - 1 \overset{(4)}{\le} |w| - 1 = \big||w| - 1\big| \overset{(3)}{=} \big||w| - |z|\big| =$$

$$\big||z| - |-w|\big| \le |z + (-w)| = |z - w| \le |z| + |-w| \overset{(3)}{=} 1 + |w| \overset{(4)}{\le} 3 + 1 = 4\,. \quad \square$$

ΘΕΜΑ Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln x - 1\,, \quad x > 0\,.$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

μον. 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

μον. 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2., να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012\,.$$

μον. 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

μον. 7

ΛΥΣΗ: Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, διότι προκύπτει από πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_1(x) = x - 1$ (πολυώνυμο), $f_2(x) = \ln x$ (λογαριθμική συνάρτηση).

$f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x\ln x + x - 1}{x}$, $x > 0$ και $f'(1) = 0$.

- Αν $0 < x < 1$, τότε $\ln x < 0 \Rightarrow x\ln x < 0$ και $x - 1 < 0$.

Άρα $x\ln x + x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

- Αν $x > 1$, τότε $\ln x > 0 \Rightarrow$ $x\ln x > 0$ και $x - 1 > 0$.

Άρα $x\ln x + x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1 Ο.Ε.	$\nearrow$	$+\infty$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, έπεται ότι $f\big((0,1]\big) = \Big[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\Big) = [-1,+\infty)$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\big[(x-1)\ln x - 1\big] = +\infty$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, έπεται ότι $f\big([1,+\infty)\big) = \Big[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\Big) = [-1,+\infty)$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}[(x-1)\ln x - 1] = +\infty$.

Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$. $\square$

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1, γράφεται ισοδύναμα:

$$(x-1)\ln x = 2013 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\ln x - 1 = 2012 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 2012\,.$$

Επειδή $f\big((0,1]\big) = [-1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, έπεται ότι υπάρχει διάστημα $[k,1] \subset (0,1]$ με $f(k) > 2012$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[k,1]$ και $2012 \in f\big([k,1]\big)$, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι υπάρχει $x_1 \in (k,1) \subset (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2012$.
Επειδή, επιπλέον, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, το x_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 2012$ στο $(0,1)$.

Ομοίως, επειδή $f\big([1,+\infty)\big) = [-1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, έπεται ότι υπάρχει διάστημα $[1,m] \subset [1,+\infty)$ με $f(m) > 2012$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,m]$ και $2012 \in f\big([1,m]\big)$, από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι υπάρχει $x_2 \in (1,m) \subset [1,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(x_2) = 2012$.
Επειδή, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, το x_2 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 2012$ στο $[1,+\infty)$.

Τελικά η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις x_1 και x_2. $\square$

Γ3. Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) + f(x) = 2012 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)\,e^x + f(x)\,e^x = 2012\,e^x \quad \Leftrightarrow \quad \big(f(x)\,e^x - 2012\,e^x\big)' = 0\,,$$

έχει λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x)\,e^x - 2012\,e^x$, $x \in [x_1, x_2]$.

Η συνάρτηση H είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ διότι προκύπτει από πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) διότι προκύπτει από πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $H'(x) = f'(x)\,e^x + f(x)\,e^x - 2012\,e^x$.

Επίσης $H(x_1) = H(x_2) = 0$ διότι από το ερώτημα Γ2. ισχύει $f(x_1) = f(x_2) = 2012$.

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την H στο $[x_1, x_2]$.

Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$H'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)\,e^{x_0} + f(x_0)\,e^{x_0} - 2012\,e^{x_0} = 0 \overset{e^{x_0} \neq 0}{\Longleftrightarrow} f'(x_0) + f(x_0) = 2012. \quad \square$$

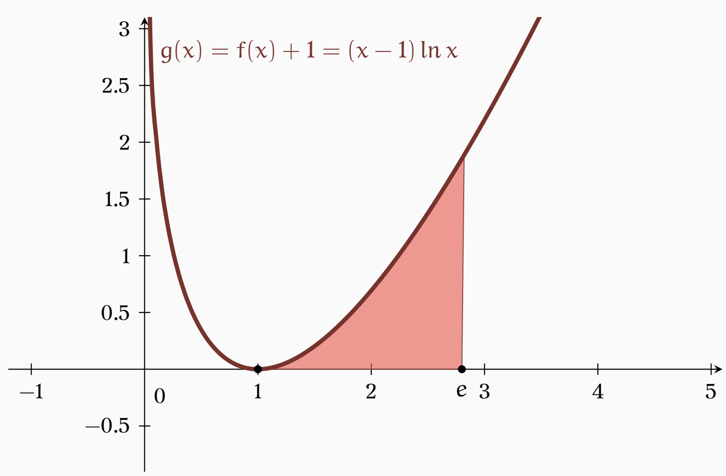
Γ4. Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, +\infty)$, έπεται ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0.$$

Επίσης η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = -1$, άρα και της $g(x) = 0$, είναι το $x = 1$.

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$\begin{aligned}
E &= \int_1^e g(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \int_1^e \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)' \ln x\,dx \\
&= \left[\frac{(x-1)^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x-1)^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2-2x+1}{x}\,dx \\
&= \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{(e-1)^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x\right]_1^e \\
&= \frac{e^2-2e+1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.} \quad \square
\end{aligned}$$



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το παραπάνω γράφημα δίνεται για την καλύτερη παρουσίαση της λύσης και δεν είναι απαραίτητο για την πληρότητα της λύσης στις εξετάσεις.

ΘΕΜΑ Δ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$, ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$,
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \geq \frac{x-x^2}{e}$,
- $\ln x - x = -\left(\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e\right)\left|f(x)\right|$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

μον. 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\,\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$.

μον. 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt, \quad x > 0,$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x > 0. \text{ (μονάδες 4)}$$

μον. 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$, τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi).$$

μον. 4

ΛΥΣΗ: Για την συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) \neq 0,$$

$$\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt \geq \frac{x-x^2}{e} \qquad (1),$$

$$\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e\right)\left|f(x)\right| \qquad (2).$$

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt - \frac{x-x^2}{e}$, $x \in (0, +\infty)$.

Από την (1) έχουμε ότι: $g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq g(1)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως η g παρουσιάζει ολικό, άρα και τοπικό, ελάχιστο στο $x = 1$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων), και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{D}_g = (0, +\infty)$.

Επομένως από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $g'(1) = 0$.

Όμως $g'(x) = f(x^2 - x + 1)(2x - 1) - \dfrac{1 - 2x}{e}$, $x \in (0, +\infty)$ και $g'(1) = f(1) + \dfrac{1}{e}$.

Επειδή $g'(1) = 0$, προκύπτει ότι: $f(1) + \dfrac{1}{e} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = -\dfrac{1}{e}$ (I).

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως διατηρεί πρόσημο και, λόγω της (I), έχουμε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Τότε από την (2) έχουμε:

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt + e \right) f(x) \quad \text{(II)}.$$

Αφού $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, από την (II) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt + e \quad \text{(III)}.$$

Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$,

[**Αιτιολόγηση:** Η συνάρτηση με τύπο $\ln t - t$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και αφού η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ με $f(t) \neq 0$, για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $\dfrac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Άρα ορίζεται η συνάρτηση $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt$ στο $(0, +\infty)$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη.]

Τότε $F'(x) = \dfrac{\ln x - x}{f(x)}$ και η (III) παίρνει τη μορφή:

$$F'(x) = F(x) + e \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} F'(x) - e^{-x} F(x) = e^{-x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\left(e^{-x} F(x)\right)' = e^{-x+1} \quad \Rightarrow \quad e^{-x} F(x) = -e^{-x+1} + c,\ c \in \mathbb{R} \quad \text{(IV)}.$$

Για $x = 1$, από την (IV) προκύπτει $e^{-1} F(1) = -e^{-1+1} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$.

Άρα η (IV) γίνεται :

$$e^{-x} F(x) = -e^{-x+1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = -e^{-1} + e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\, dt = e^x - e^{-1} \quad \text{(V)}$$

Το πρώτο μέλος της (V) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η συνάρτηση $e^x - e^{-1}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x (εκθετική) και e^{-1} (σταθερή). Παραγωγίζοντας την (V) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^{-x}(\ln x - x).$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^{-x} [σύνθεση των παραγωγίσιμων e^x (εκθετική) και $-x$ (πολυωνυμική)] και $\ln x - x$ [διαφορά των παραγωγίσιμων $\ln x$ (λογαριθμική) και $-x$ (πολυωνυμική)]. □

Δ2. Για $x \in (0, 1)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$.

Τότε για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\,\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$, θέτουμε $u = \dfrac{1}{f(x)}$, οπότε $u \to 0^-$. Επομένως, για $x \in (0,1)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\,\tfrac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\,\eta\mu\, u - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu\, u - u}{u^2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{u\to 0^-}\frac{(\eta\mu\, u - u)'}{(u^2)'} = \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu\, u - 1}{2u} = 0\,,$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x} = 0$ και δεδομένου ότι για το όριο $\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\, u - u}{u^2}$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De L' Hospital, αφού $\lim\limits_{u\to 0^-}(\eta\mu\, u - u) = \lim\limits_{u\to 0^-} u^2 = 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{(\eta\mu\, u - u)'}{(u^2)'} = \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, u - 1}{2u} = 0$. □

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε ορίζεται η $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,dt$ και είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$.
Η F' είναι παραγωγίσιμη αφού η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1\right) \geq e^{-x}\,\frac{1}{x}\,,$$

αφού $x - 1 - \ln x \geq 0$, για $x \in (0,+\infty)$.
Επιπλέον, αφού ισχύει $e^{-x}\dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, έχουμε ότι $F''(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Η συνάρτηση F είναι συνεχής στα $[x,2x]$, $[2x,3x] \subset (0,+\infty)$ με $x > 0$ αφού είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x,2x)$, $(2x,3x) \subset (0,+\infty)$ με $x > 0$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, υπάρχουν $x_1 \in (x,2x)$, $x_2 \in (2x,3x)$, τέτοια ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \quad \text{(VI)}\,,$$

και

$$F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \quad \text{(VII)}\,.$$

Όμως $x_1 < x_2$ και η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε $F'(x_1) < F'(x_2)$.
Από τις (VI), (VII) προκύπτει:

$$\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Longrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x)$$

$$\Longrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x)\,. \qquad \square$$

Δ4. Για κάθε $x > 0$, ισχύουν: $\ln x \leq x - 1 \;\Leftrightarrow\; \ln x - x \leq -1$ και $e^{-x} > 0, x > 0$.
Άρα $f(x) = e^{-x}(\ln x - x) < 0$, οπότε $F'(x) = f(x) < 0$, για κάθε $x > 0$.
Επομένως η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2\,F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$, $x \in [\beta, 2\beta] \subset (0,+\infty)$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $2F$ και της σταθεράς $F(\beta) + F(3\beta)$, με

$$h(\beta) = 2\,F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0\,,$$

αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και $\beta < 3\beta$, και

$$h(2\beta) = 2\,F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0\,,$$

από το ερώτημα Δ3. Επομένως $h(\beta)\,h(2\beta) < 0$ και από το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση h στο διάστημα $[\beta, 2\beta]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$, τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)\,. \quad \square$$

Σχόλια:

Α4 Εξήγηση των προτάσεων σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο:

α.⟶ *Σωστό* σελ. 91 σχολικού βιβλίου: "Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα."

β.⟶ *Σωστό* σελ. 152 σχολικού βιβλίου: "Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x."

γ.⟶ *Λάθος* σελ. 178 σχολικού βιβλίου: "Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0"

δ.⟶ *Λάθος* σελ. 232 σχολικού βιβλίου: "$(\sigma\varphi\, x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$"

ε.⟶ *Λάθος* σελ. 336 σχολικού βιβλίου: "$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$" $\square$

Β1 1η Προσέγγιση: Έστω $z = x + yi$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε
$|z-1|^2 + |z+1|^2 = |x - 1 + yi|^2 + |x + 1 + yi|^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2 = 4$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$. Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

2η Προσέγγιση: Αν θεωρήσουμε τα σημεία $M(z), A(1,0), B(-1,0)$, όπου $M(z)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z, το A είναι η εικόνα του μιγαδικού 1, ενώ το B είναι η εικόνα του μιγαδικού -1. Παρατηρούμε ότι η σχέση γράφεται $(MA)^2 + (MB)^2 = (AB)^2$ οπότε στο τρίγωνο AMB ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα $MA \perp MB$ και, συνεπώς, το σημείο M κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$. $\square$

Β2 1η Προσέγγιση: Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $|z_1| = |z_2| = 1$ οπότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$ (Άσκηση 9 σχολικό βιβλίο σελίδα 101. Η σχέση αυτή δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί εάν προηγουμένως δεν αποδειχθεί), έχουμε

$$|z_1+z_2|^2+(\sqrt{2})^2=2+2 \quad \Leftrightarrow \quad |z_1+z_2|=\sqrt{2}\,.$$

2η Προσέγγιση: Αφού τα σημεία $A(z_1),\ B(z_2)$ είναι σημεία του προηγούμενου κύκλου και $(AB)=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, έπεται ότι η AB είναι πλευρά κανονικού τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Είναι γνωστό ότι το απόστημα α_4 είναι το μισό της πλευράς AB και αν M το μέσον της AB τότε $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Άρα $2|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ ή $2\alpha_4=|z_1+z_2|$. Δηλαδή $|z_1+z_2|=(AB)=\sqrt{2}$. □

B3 **Εναλλακτική προσέγγιση:** Αν P,Q είναι οι εστίες της έλλειψης, το $|w|$ είναι το μήκος της διαμέσου m του τριγώνου SPQ, όπου S τυχαίο σημείο της έλλειψης, και ισχύουν:

- $2\le |w|\le 3$ με $|w|=2$, όταν το S βρεθεί στο άκρο του μικρού άξονα, και
- $|w|=3$, όταν το S βρεθεί στο άκρο του μεγάλου άξονα. □

Γ1 **Εναλλακτική προσέγγιση για την μονοτονία της f**

1η Προσέγγιση: $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}$. Είναι $f'(1)=0$ και για $x>1$, ισχύει $f'(x)>0$ και για $x<1$, ισχύει $f'(x)<0$.

2η Προσέγγιση: $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}\,,\quad x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f' είναι και αυτή παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο εν λόγω διάστημα με $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\,,\quad x>0$.

Επομένως πρόκειται για κυρτή συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρώ ότι $f'(1)=\ln 1+1-1=0$ και για $0<x<1$ είναι: $f'(x)<f'(1) \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0$ απ΄ όπου (λόγω της συνέχειας της συνάρτησης) προκύπτει πως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Παρόμοια αν $x>1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)>f'(1) \quad \Rightarrow \quad f'(x)>0$, επομένως λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. □

Γ3 **Εναλλακτική προσέγγιση:** Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο:

$$h(x)=f'(x)+f(x)-2012\,,\ x\in[x_1,x_2] \quad \Leftrightarrow \quad h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+(x-1)\ln x-2013\,,\ x\in[x_1,x_2]\,.$$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, και ισχύουν:

$$h(x_1)=\ln x_1+1-\frac{1}{x_1}+(x_1-1)\ln x_1-2013 \overset{(x_1-1)\ln x_1=2013}{=\!=\!=\!=} \ln x_1+1-\frac{1}{x_1}<0 \quad (1)\,,$$

σαν άθροισμα αρνητικών, επειδή ισχύουν:

$0<x_1<1 \quad \Rightarrow \quad \ln x_1<0$ και

$0<x_1<1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x_1}>1 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{x_1}<-1 \quad \Rightarrow \quad 1-\dfrac{1}{x_1}<0\,.$

$$h(x_2)=\ln x_2+1-\frac{1}{x_2}+(x_2-1)\ln x_2-2013 \overset{(x_2-1)\ln x_2=2013}{=\!=\!=\!=} \ln x_2+1-\frac{1}{x_2}>0 \quad (2)\,,$$

σαν άθροισμα θετικών, επειδή ισχύουν:

$x_2>1 \quad \Rightarrow \quad \ln x_2>0$ και $x_2>1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x_2}<1 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{x_2}>-1 \quad \Rightarrow \quad 1-\dfrac{1}{x_2}>0\,.$

Λόγω της συνέχεια της f και των (1), (2), πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και, συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε

$$h(x_0)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)+f(x_0)=2012\,. \quad \square$$

Δ1 Εναλλακτικά για το πρόσημο της f

Για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε $\displaystyle\int_1^{\frac34} f(t)\,dt \geq \frac{\frac14}{e} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\int_{\frac34}^{1} f(t)\,dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\frac34}^{1} f(t)\,dt < 0\,.$

Όμως η f ως συνεχής και μη μηδενική διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν ήταν $f(x)>0$, τότε θα είχαμε $\int_{\frac34}^{1} f(t)dt > 0$. Άτοπο. Άρα το πρόσημο της f είναι αρνητικό. $\square$

Εναλλακτικά για την απόδειξη της παραγωγισιμότητας της f πριν την εύρεση του τύπου της.

Έστω $\alpha(x)=\ln x - x\,,\quad x>0.$

Τότε $\alpha'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

Είναι $\alpha(x)\leq \alpha(1)=-1 \quad \overset{f(x)<0}{\Longrightarrow}$
$\dfrac{\alpha(x)}{f(x)} \geq \dfrac{-1}{f(x)} > 0$.

Άρα $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}=\dfrac{\ln x - x}{f(x)} > 0.$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha'(x)$	$+$	0	$-$
$\alpha(x)$	↗	-1 Ο.Μ.	↘

Επομένως:

- Για $x>1$, ισχύει $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e > e \neq 0\,,$
- για $0<x<1$, ισχύει $\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e < e \neq 0$ και
- για $x=1$ ισχύει $\displaystyle\int_1^1 \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e = e \neq 0\,.$

Άρα, για κάθε $x>0$, ισχύει $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e \neq 0\,.$

<u>Σημείωση</u> : Το ολοκλήρωμα γίνεται μηδέν μόνο για $x=1$ αφού $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} > 0$.

Άρα $f(x)=\dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e}$ και η f είναι παραγωγίσιμη.

<u>Παρατήρηση:</u> Η εκφώνηση της άσκησης προϋποθέτει την ύπαρξη συνάρτησης f που ικανοποιεί τα δεδομένα (σε αντίθεση με την εκφώνηση ¨Να βρεθεί η συνάρτηση f ώστε..).

Χωρίς λοιπόν να είναι απαραίτητη η επαλήθευση στη συγκεκριμένη περίπτωση, αν επαληθεύσουμε, διαπιστώνουμε ότι πράγματι υπάρχει τέτοια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος, και είναι η συνάρτηση που βρήκαμε.

$$\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e\right) f(x) = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{e^{-t}(\ln t - t)}\,dt + e\right) e^{-x}(\ln x - x) =$$

$$\left(\int_1^x e^t\,dt + e\right) e^{-x}(\ln x - x) = (e^x - e + e)\, e^{-x}(\ln x - x) = \ln x - x\,. \quad \square$$

Εναλλακτικά για την εύρεση της συνάρτησης f από τη σχέση (III)

Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e\,,\quad x>0.$ Τότε η σχέση

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\,dt + e \quad \text{(III)},$$

που έχει προκύψει στην προτεινόμενη λύση του θέματος Δ1, γίνεται $H'(x) = H(x)$, και από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 252) προκύπτει

$$H(x) = c\,e^x\,, \quad x > 0.$$

Για $x = 1$, προκύπτει $e = H(1) = c\,e \quad \Rightarrow \quad c = 1$.

Άρα τελικά $H(x) = e^x\,, \quad x > 0$.

Αντικαθιστώντας στην (III), προκύπτει $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{-x}(\ln x - x)\,, \quad x > 0$. □

Δ3 **Εναλλακτικά για το 2ο μέρος του ερωτήματος**

Αφού η F είναι κυρτή, η εφαπτομένη στην C_F σε οποιοδήποτε σημείο, βρίσκεται κάτω από την C_F, εκτός από το σημείο επαφής τους.

Η εφαπτομένη στην C_F στο $2x_0 > 0$, έχει εξίσωση $y(x) = F(2x_0) + F'(2x_0)\,(x - 2x_0)$.
Ισχύουν:

$$F(3x_0) > y(3x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)\,(3x_0 - 2x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)\,x_0\,, \quad 3x_0 \neq 2x_0\,,$$
$$F(x_0) > y(x_0) = F(2x_0) + F'(2x_0)\,(x_0 - 2x_0) = F(2x_0) - F'(2x_0)\,x_0\,, \quad x_0 \neq 2x_0\,.$$

Προσθέτοντας, κατά μέλη, τις δυο προηγούμενες ανισότητες, προκύπτει

$$F(3x_0) + F(x_0) > 2\,F(2x_0)\,, \quad \text{για κάθε} \quad x_0 > 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$F(3x) + F(x) > 2\,F(2x)\,, \quad \text{για κάθε} \quad x > 0\,. \quad \square$$