mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

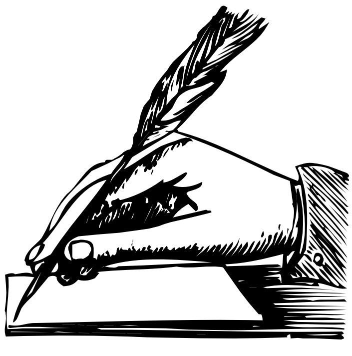
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 2η (16/05/2011, 21:05)

(Προσωρινό αρχείο)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=15541

Συνεργάστηκαν οι:
Ανδρέας Βαρβεράκης, Φωτεινή Καλδή,
Σπύρος Καρδαμίτσης, Τάσος Κοτρώνης,
Βασίλης Μαυροφρύδης, Ροδόλφος Μπόρης,
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Γιώργος Ρίζος,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο IR. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \to IR$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in IR_1 = IR - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του *Δ* και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta \quad \text{και} \quad f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 . \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

Α2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,όταν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0 .$$

Α3. **α)** **Σ**
β) **Σ**
γ) **Λ**
δ) **Λ**
ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Β1. **1ος τρόπος**

Είναι $|\bar{z}+3i| = |\overline{z-3i}| = |z-3i|$, οπότε: $|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-(0+3i)| = 1$.

Ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα 1.

2^{ος} τρόπος

Έστω $z=x+yi,\ x,y\in IR$

Τότε

$$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |x+(y-3)i|+|x-(y-3)i|=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$$

Ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα 1.

B2. Για $z\neq 3i$ είναι:

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

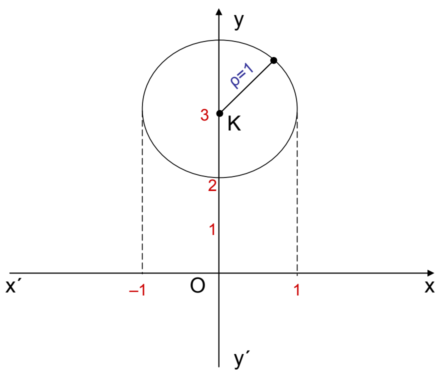
B3. **1^{ος} τρόπος**

Είναι $\quad w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}.$

Αν $z=x+yi,\ x,y\in IR$, τότε:

$$w=z+\overline{z}=x+yi+x-yi=2x\in IR$$

Εφόσον ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα 1, είναι:



$$-1\leq x\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq 2x\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq w\leq 2$$

2^{ος} τρόπος

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)\in IR.$$

$$|w|=\left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|\leq|z-3i|+\left|\frac{1}{z-3i}\right|=1+1=2$$

Όμως $w\in IR$ άρα $|w|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq w\leq 2$

3^{ος} τρόπος

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z-3i}=2\mathrm{Re}(z-3i)=2\mathrm{Re}\left(x+(y-3)i\right)=2x\in R$$

Εφόσον ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο K(0, 3) και ακτίνα 1, είναι:

$$-1\leq x\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq 2x\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq w\leq 2$$

B4. **1^{ος} τρόπος**

Είναι $\quad |z-w|=|z-z-\overline{z}|=|-\overline{z}|=|\overline{z}|=|z|$

2^{ος} τρόπος

Είναι $\quad |z-w|^2=(z-w)(\overline{z}-w)=|z|^2-(\overline{z}+z)w+w^2=|z|^2-w^2+w^2=|z|^2$

οπότε $\quad |z-w|=|z|$

3^{ος} τρόπος

Για z = x + yi, όπου $x,y\in IR$, έχουμε: $w=2x$ και

$$|z-w|=|x+yi-2x|=|-x+yi|=|-(x-yi)|=|x-yi|=|\overline{z}|=|z|.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(e^x-x\right), x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της *f* έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\text{συν}x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Είναι:

$$\begin{aligned}
&e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c,\ c\in\mathbb{R} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Για x = 0, έχουμε: $e^0f'(0)-e^0=0\cdot f'(0)+c \Leftrightarrow c=-1$, οπότε η (1) γράφεται:

$$e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1$$

Έστω $g(x)=e^x-x, x\in\mathbb{R}$

Η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο IR με $g'(x)=e^x-1$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g(x) φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	−		+
g(x)	↘		↗

και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $g(0)=1$, οπότε είναι $g(x)\geq 1 \Rightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_1,\ c_1\in IR \qquad (2)$$

Για x = 0 η (2) γίνεται: $f(0)=\ln\left(e^0-0\right)+c_1 \ \Leftrightarrow\ 0=\ln1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, οπότε:

$$f(x)=\ln\left(e^x-x\right),x\in IR$$

2^{ος} τρόπος

Είναι:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\ \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x-1\right)f'(x)+\left(e^x-x\right)f''(x)=e^x\Leftrightarrow$$
$$\left(e^x-x\right)'f'(x)+\left(e^x-x\right)\left[f'(x)\right]'=e^x\Leftrightarrow$$
$$\left[\left(e^x-x\right)f'(x)\right]'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow$$
$$\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x+c,\ c\in IR \qquad (1)$$

Για x = 0, έχουμε: $f'(0)=1+c\ \Leftrightarrow c=-1$, οπότε η (1) γράφεται:

$$e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1\Leftrightarrow\ f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1$$

Από γνωστή εφαρμογή ισχύει $\ln t\le t-1$ για κάθε t θετικό με την ισότητα μόνο όταν t = 1.
Θέτουμε $t=e^x$, $x\in IR$ και λαμβάνουμε:

$$\ln e^x\le e^x-1\ \Leftrightarrow e^x-x\ge1$$

Είναι:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}\Leftrightarrow f'(x)=\left[\ln\left(e^x-x\right)\right]'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_1,\ c_1\in IR \qquad (2)$$

Για x = 0 η (2) γίνεται: $f(0)=\ln\left(e^0-0\right)+c_1\ \Leftrightarrow\ 0=\ln1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, οπότε:

$f(x)=\ln\left(e^x-x\right),x\in IR$

Γ2. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},x\in IR$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της $f(x)$ δίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
e^x-1	0	+
e^x-x	+	+
$f'(x)$	−	+
$f(x)$	↘	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Γ3. Είναι $f''(x)=\dfrac{-xe^x+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}, x\in IR$

Έστω $g(x)=-x\cdot e^x+2e^x-1$.

Η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο IR με $g'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x-xe^x=e^x(1-x)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της g(x) δίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	−
e^x	+		+
$g'(x)$	+		−
g(x)	↗		↘

Άρα $g(x)\le g(1) \Leftrightarrow g(x)\le e-1$

Η g(x) έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $g(1) = e - 1 > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(2-x-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x-\dfrac{1}{e^x}\right)=-\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(e^x(2-x)\right)-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2-x}{e^{-x}}-1\right]$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα De L' Hospital για τις συναρτήσεις $y = 2 - x$ και $y = e^{-x}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1}{-e^{-x}}-1\right)=-1$

Οπότε για τη g(x) στο $(-\infty,1]$ ισχύει:

$$g(-\infty,1]=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(1)\right]=(-1,e-1],$$

διάστημα στο οποίο ανήκει το 0, οπότε υπάρχει $x_1\in(-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$ και είναι μοναδικό, λόγω της μονοτονίας της g(x).

Ομοίως στο $[1,+\infty)$ είναι:

$$g[1,+\infty)=\left(\lim_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right]=(-\infty,e-1],$$

διάστημα στο οποίο ανήκει το 0, οπότε υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$ και είναι μοναδικό, λόγω της μονοτονίας της g(x).

Επειδή $\left(e^x - x\right)^2 > 0$ για κάθε x∈IR, λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της g(x) το πρόσημο της $f''(x)$ δίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$ x_1		1 x_2	$+\infty$
g(x)	−	+	+	−
$f''(x)$	−	+	+	−
		Σ.Κ.		Σ.Κ.

Άρα η *f* έχει δύο μοναδικά σημεία καμπής.

Γ4. Έστω $g(x) = \ell n\left(e^x - x\right) - \sigma\upsilon\nu x$

Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι g(0) = 0 – συν0 = –1 < 0

και $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell n\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, αφού η *f* είναι συνεχής και έχει ολικό ελάχιστο στο 0 το f(0)= 0.

Οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$

Επειδή:

$$g'(x) = \left(\ell n\left(e^x - x\right) - \sigma\upsilon\nu x\right)' = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x = f'(x) + \eta\mu x$$

Είναι:

$$f'(x) > 0 \text{ για } x > 0 \text{ και } \eta\mu x > 0 \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε είναι 1 – 1 και η ρίζα είναι μοναδική.

Σχόλιο:

Μία διαφορετική αντιμετώπιση για το πρόσημο του $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

είναι από τον δεύτερο τρόπο στο Γ1.

Συγκεκριμένα έχουμε δείξει ότι:

$$e^x - x \geq 1 \Rightarrow \ln\left(e^x - x\right) \geq 0$$

με την ισότητα στο μόνο στο 0 άρα στο $\frac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell n\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t^2)dt$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Δ1. Είναι:

$$1-f(x)=e^{2x}\cdot\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \Leftrightarrow f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$$

Θέτω $u=x+t \Leftrightarrow t=u-x$, οπότε $du=dt$

Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = -x$ είναι $u = 0$

Οπότε:

$$f(x)=1-e^{2x}\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=1-e^{2x}\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=1-\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Η $h(u)=\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών , άρα η $\displaystyle\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}dt$ παραγωγίσιμη.

Τότε η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$.

Όμοια βρίσκουμε και ότι $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$,

1ος τρόπος

άρα: $\begin{cases} f'(x)\cdot g(x)=e^{2x} \\ f(x)\cdot g'(x)=e^{2x} \end{cases} \Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot c, c\in IR$

Για x = 0 είναι $\dfrac{1-f(0)}{e^0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$ και ομοίως g(0) = 1 άρα $f(0) = g(0)\cdot c \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $f(x) = g(x)$.

2ος τρόπος

άρα: $\begin{cases} f'(x)\cdot g(x)=e^{2x} \\ f(x)\cdot g'(x)=e^{2x} \end{cases} \Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\ln(f(x)))'=(\ln(g(x)))' \Leftrightarrow \ln(f(x))=\ln(g(x))+c,\ c\in IR$

Για x = 0 είναι $\dfrac{1-f(0)}{e^0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$ και ομοίως g(0) = 1 άρα $\ln(f(0))=\ln(g(0))+c,\ c\in IR \Leftrightarrow c = 0$,

οπότε $f(x) = g(x)$.

Δ2.

Αφού $f(x) = g(x)$, είναι:

$$f(x)'\cdot f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1,\ c_1\in IR$$

Για x = 0 είναι $f^2(0)=e^0+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ άρα $f^2(x)=e^{2x}$ και αφού $f(x) > 0$ θα είναι $f(x) = e^x$.

Δ3. **1ος τρόπος**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Θέτουμε $y=\dfrac{1}{x}$, οπότε είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Τότε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{ye^y}=\lim_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y}$$

Είναι $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{-y}=+\infty$, $\lim\limits_{y\to-\infty} y=-\infty$.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα de L' Hospital, και έχουμε:

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{\left(e^{-y}\right)'}{y'}=\lim_{y\to-\infty}\frac{-e^{-y}}{1}=-\infty$$

2ος τρόπος

Είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

με $\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=-\infty$

άρα από κανόνα de L' Hospital έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty$

Δ.4 Το εμβαδό είναι $E=\int_0^1|F(t)|dt$

1ος τρόπος

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο IR με παράγωγο $F'(x)=\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)'=f(x^2)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in IR$.

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε με $x<1$ είναι $F(x)<F(1)=0$.

Επειδή $F(x)\le0$ στο διάστημα $[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν E είναι :

$$E=\int_0^1[-F(t)dt]=-\int_0^1x'F(x)dx=[-xF(x)]_0^1+\int_0^1xF'(x)dx=$$

$$=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1xe^{x^2}dx=$$

$$=-1\cdot F(1)+0\cdot F(0)+\int_0^1\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'dx=0+\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

2ος τρόπος

Είναι $0\le x\le1$. Έχουμε $f(t^2)>0$ συνεπώς $\int_x^1 f(t^2)dt>0$ άρα $F(x)<0$.

Επειδή $F(x)\le0$ στο διάστημα $[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν E είναι :

$$E=\int_0^1[-F(t)dt]=-\int_0^1 x'F(x)dx=[-xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$
$$=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xe^{x^2}dx=$$
$$=-1\cdot F(1)+0\cdot F(0)+\int_0^1\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'dx=0+\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$

3ος τρόπος

Ισχύει ότι $e^{x^2}>0$ και για $0\le x\le 1$ έχουμε ότι $\int_x^1 e^{t^2}dt\ge 0$ οπότε $\int_1^x e^{t^2}dt\le 0$ έτσι θα έχουμε ότι:

$$E=\int_0^1\left|\int_1^x e^{t^2}dt\right|dx=-\int_0^1\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)dx=-\int_0^1\left(x'\int_1^x e^{t^2}dt\right)dx=$$
$$=-\left[x\int_1^x e^{t^2}dt\right]_0^1+\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\left(x^2\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$