mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

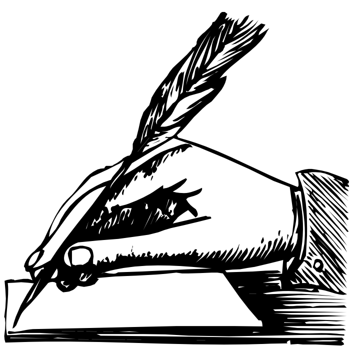
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τρίτη 6 Ιουνίου 2023

Λύσεις

των

θεμάτων



Έκδοση 1^{η}

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=74012

Συνεργάστηκαν οι:
Βαρβεράκης Αντρέας, Κακκαβάς Βασίλης,
Καλαθάκης Γιώργης, Κατσίπης Νίκος, Κούτρας Στάθης
Κωστάκος Γρηγόρης, Μουρούκος Βαγγέλης,
Μπεληγιάννης Αθανάσιος, Πρωτοπαπάς Λευτέρης,
Ρίζος Γιώργος, Στόγιας Σωτήρης, Στεργίου Μπάμπης
Συγκελάκης Αλέξανδρος, Τσιφάκης Χρήστος

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy' .

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 111

A2. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 104

A3. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 128

A4. **α. Λ** **β. Λ** **γ. Λ** **δ. Σ** **ε. Σ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$

B2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2} > \dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4)

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $D_h=(0,+\infty)$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $D_g=\mathbb{R}$. Οπότε, το πεδίο ορισμού της $f = goh$, είναι:

$$D_f=\{x\in D_h \,|\, h(x)\in D_g\}=\{x\in(0,+\infty) \,|\, \ln(x)\in \mathbb{R}\}=(0,+\infty).$$

Ο τύπος της συνάρτησης f, είναι:

$$f(x)=\left(goh\right)(x)=g\left(h(x)\right)=\frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}}=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x},\quad x>0.$$

Β2. **i)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$f'(x)=\left(\frac{4}{x}-\frac{x^2}{x}\right)'=\left(\frac{4}{x}-x\right)'=-\frac{4}{x^2}-1<0\,.$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Επειδή $e>2\Rightarrow 4-e^2<0$ η αποδεικτέα σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{4-e^2}\left(4-e^2\right)<\frac{\pi}{e}\left(4-e^2\right)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow f(\pi)<f(e)\quad(1)$$

Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, επομένως η $(1)\Leftrightarrow\pi>e$, το οποίο ισχύει.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες σ΄ αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(4-x^2\right)\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\left(4-x^2\right)=4>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty\,,$$

επομένως η ευθεία με εξίσωση $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Ακόμα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(-1\right)=-1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0\,,$$

άρα η ευθεία με εξίσωση $y=-1x+0\Leftrightarrow y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο $+\infty$.

Επειδή έχει πλάγια ασύμπτωτη (μη οριζόντια) στο $+\infty$, δεν έχει οριζόντια στο $+\infty$.

B4.

Είναι

$$\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\le 1 \quad \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|.$$

Για $x>2$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0.$$

Επομένως , από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right)=0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+x, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\ge 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)\,dx=1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x'x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» («1-1») (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα x'x και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Διαδοχικά έχουμε:

$$\int_2^3 xf(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx=1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{\alpha\cdot 3^2}{2}-\left(2+\frac{\alpha\cdot 2^2}{2}\right)=1 \Leftrightarrow 3+\frac{9\alpha}{2}-2-\frac{4\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow 1+\frac{5\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow a=0.$$

Γ2. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x}=-1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

Η εξίσωση της είναι

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-(x-1) \Leftrightarrow y-1=-x+1 \Leftrightarrow y=-x+2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσο με $\lambda_\varepsilon = -1$ και γνωρίζουμε πως

$\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4} = -1$. Άρα η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x'x είναι ίση με

$\omega = \dfrac{3\pi}{4}$.

Γ3. Για κάθε $x < 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x - 3$.

Για κάθε $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Τότε είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x<1 \\ -1, & x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x>1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3, & x\le 1 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x>1 \end{cases}$.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR είναι και συνεχής στο IR.

Για κάθε $x \le 1$ έχουμε

$$x \le 1 \Leftrightarrow 2x \le 2 \Leftrightarrow 2x - 3 \le 2 - 3 \Leftrightarrow f(x) \le -1.$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε $-\dfrac{1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR (ως συνεχής στο IR).

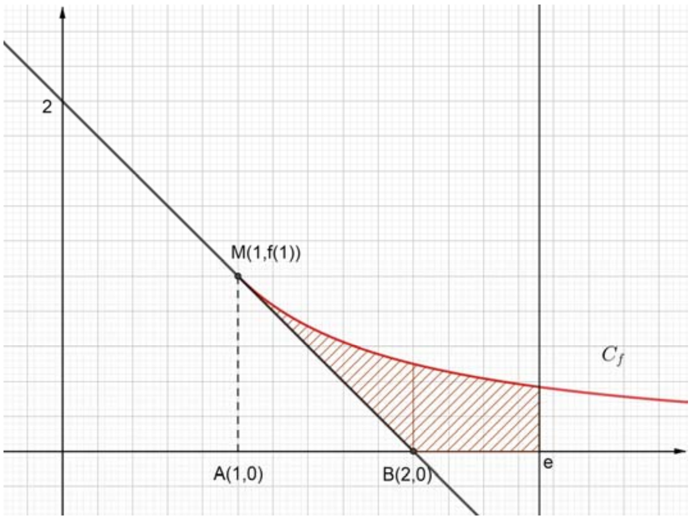
Τότε το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty),$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 3x + 3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = +\infty.$$

Γ4. Η $(\varepsilon): y = -x + 2$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο Μ από Γ2. Επίσης τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, 2) και τον άξονα x'x στο σημείο (2, 0).



Οπότε θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου, έστω Ω.

$$E(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx-(MAB)\,.$$

Όμως:

$$\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^e=\left[\ln x\right]_1^e=\ln e-\ln 1=1\,,$$

$$(MAB)=\frac{1}{2}\cdot(MA)\cdot(AB)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\,.$$

Άρα είναι $E(\Omega)=\int_1^e |f(x)|dx-(MAB)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, άρα $E(\Omega)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ τ.μ. #

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa\,,\ \text{όπου}\ \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0,2) με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1F(x) + x_2G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

Δ1. Έστω η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}, x \in (0,1) \cup (1,2)$, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1} h(x) = \ell$.

Τότε για $x \in (0,1) \cup (1,2)$, έχουμε ότι

$$h(x)(x-1) = f(x) - 2x \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x-1) + 2x$$

και αφού

$$\lim_{x\to 1}\left[h(x)(x-1) + 2x\right] = \ell \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa\right] = 2 \Leftrightarrow -1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3,$$

δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 1}\ln(2-x)=\ln 1=0,$$

και

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$$

Δ2. Για $\kappa=3$, έχουμε

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3,\, x\in(0,2).$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\ln(2-x)$ [σύνθεση των παραγωγίσιμων $\ln x, 2-x$] και $-\frac{1}{x}$ [ρητή] και 3 [σταθερή], με

$$f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2},\ x\in(0,2).$$

και

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^3}<0,\ x\in(0,2),$$

οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$.

Συνεπώς

- για $x\in(0,1)$, ισχύει $x<1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$,
- για $x\in(1,2)$, ισχύει $x>1\Rightarrow f'(x)<f'(1)=0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$.

Επίσης

- για $x\in A_1=(0,1)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to 1^-}f(x)\right)=(-\infty,2),$$

- για $x\in A_2=[1,2)$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to 2^-}f(x),f(1)\right)=(-\infty,2].$$

Συνεπώς $0\in f(A_1)$ και $0\in f(A_2)$, οπότε η $f(x)=0$ έχει από μία τουλάχιστον ρίζα στα A_1,A_2, αντίστοιχα και αφού είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς από μία λύση στα A_1,A_2.

Έστω x_1, x_2 οι δύο ρίζες με $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in [1,2)$, οπότε $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

Έστω ότι $x_1 \geq \frac{1}{3}$.

Αφού $x_1, \frac{1}{3} \in (0,1)$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ ισχύει

$$f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 0 \geq \ln\frac{5}{3} > \ln 1 = 0,$$

που είναι άτοπο, άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

και συγκεντρωτικά $0 < x_1 < \frac{1}{3} < 1 < x_2 < 2$.

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

Όμως:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3}, x \in (0,2),$$

οπότε $f''(x) < 0, x \in (0,2)$ και κατά συνέπεια η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$.

Το ξ είναι μοναδικό, γιατί η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2)$.

Επομένως, υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η κλίση $f'(\xi)$ της C_f στο M να είναι ίση με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

Δ4. i) Επειδή οι συναρτήσεις F και G είναι αρχικές της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$, θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $F(x)=G(x)+c$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Για $x=x_1$, η παραπάνω σχέση δίνει ότι

$$F(x_1)=G(x_1)+c\Rightarrow 0=G(x_1)+c\Rightarrow c=-G(x_1),$$

ενώ για $x=x_2$ παίρνουμε ότι

$$F(x_2)=G(x_2)+c\Rightarrow F(x_2)=c\Rightarrow F(x_2)=-G(x_1)\Rightarrow F(x_2)+G(x_1)=0.$$

Δ4. ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, με $x\in(0,2)$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,2)$, με παράγωγο

$$h'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2,$$

για κάθε $x\in(0,2)$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1,x_2), και αφού $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$. Επομένως, είναι $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, κι επειδή η h είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$, η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$ και η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα (x_1,x_2).

Εξάλλου, είναι $h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2$

και $h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1$.

Αλλά είναι $F'(x)=G'(x)=f(x)>0$, για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, οπότε οι συναρτήσεις F και G είναι γνησίως αύξουσες στο $[x_1,x_2]$ και συνεπώς

$$x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow F(x_2)>0 \quad \text{και} \quad x_1<x_2\Rightarrow G(x_1)<G(x_2)\Rightarrow G(x_1)<0.$$

Άρα, είναι

$$h(x_1)=x_2G(x_1)+x_1-x_2<0 \text{ και } h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2-x_1>0,$$

οπότε $h(x_1)h(x_2)<0$ και από το Θεώρημα του Bolzano έπεται ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα (x_1,x_2). Ώστε, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (x_1,x_2).

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β2. ii) Μία λύση χωρίς τη χρήση της f στο Β2ii

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} e(4-\pi^2)<\pi(4-e^2)$$
$$\Leftrightarrow 4e-e\pi^2<4\pi-\pi e^2$$
$$\Leftrightarrow -4(\pi-e)<e\pi(\pi-e)\quad \overset{\pi-e>0}{\Leftrightarrow} -4<e\pi$$

που ισχύει.

Β3. $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}=\dfrac{4}{x}-x\Leftrightarrow f(x)-(-x)=\dfrac{4}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=0$$

άρα η ευθεία με εξίσωση $y=-1x+0\Leftrightarrow y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο $+\infty$.

Δ2. Η μονοτονία της f, δίχως 2η παράγωγο:

(...)

$$f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)},\ x\in(0,2).$$

Τότε για $x\in(0,2)$, έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0\Leftrightarrow x=1,$$

αφού $-2\notin(0,2)$.

Τότε:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x -1			–	0	+		
x + 2			+		+		
x^2			+		+		
x - 2			–		–		
f′(x)			+	0	–		
f(x)			↗		↘		

(...)