Αναδεικνύοντας την αξία της τριγωνομετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Πρωτοπαπά Ιωάννα
Φοιτήτρια Μαθηματικού – Ε.Κ.Π.Α.
e-mail address: iprotopapa54@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - Ε.Μ.Π.
e-mail address: lprotopapas@math.ntua.gr

Περίληψη.
Η Τριγωνομετρία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στη καθημερινότητα. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές εγκλωβίζονται κυρίως σε προβλήματα υπολογισμού αποστάσεων ανάμεσα σε δυσπρόσιτα σημεία και δυσκολεύονται να τη συνδέσουν με άλλες εφαρμογές. Στην εργασία αυτή αναδεικνύουμε την αξία της Τριγωνομετρίας μέσω κατάλληλων εφαρμογών που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επίσης απαντάμε και στο ερώτημα: «Γιατί ακτίνια και όχι μοίρες;»

Λέξεις κλειδιά: Ταλαντώσεις, χαρτογραφία, γιατί ακτίνια, μοίρες.

Abstract.
Trigonometry is a branch of Mathematics with many applications in everyday life. In secondary education, students are mainly stuck in problems of calculating distances between hard-to-reach points and find it difficult to connect it with other applications. In this paper we highlight the value of Trigonometry through various applications that the teacher could use in teaching. We also answer the question: "Why radians and not degrees?"

Ιστορικά στοιχεία.
Τα πρώτα βήματα της Τριγωνομετρίας πραγματοποιήθηκαν στην Αίγυπτο και την Αρχαία Βαβυλώνα (2500 π.Χ.) όπου μετρούσαν τις γωνίες σε μοίρες, πρώτα και δεύτερα λεπτά. Ο Ίππαρχος (150 π.Χ.) χρησιμοποιούσε αρκετούς από τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους και ήταν ο πρώτος που έφτιαξε έναν πίνακα που έμοιαζε με τους σημερινούς τριγωνομετρικούς πίνακες, όπου σε κάθε γωνία αντιστοίχιζε ένα μήκος τόξου για δεδομένη ακτίνα κύκλου (Maor, 2002). Αργότερα, και ο Πτολεμαίος (150 μ.Χ.) συνέταξε έναν παρόμοιο πίνακα. Οι Ινδοί (500 μ.Χ.)

έφτιαξαν πίνακες που περιείχαν μια ποσότητα που έμοιαζε με το γνωστό σε εμάς ημίτονο. Οι Κινέζοι (700 μ.Χ.) εισήγαγαν την τριγωνομετρική εφαπτομένη.

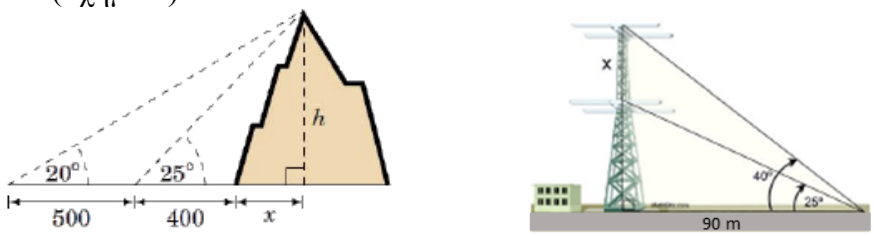
Τον 8ο αιώνα οι Άραβες μελέτησαν τη δουλειά των Ελλήνων και των Κινέζων εισάγοντας το συνημίτονο, την εφαπτομένη, τη συνεφαπτομένη και μελέτησαν την Τριγωνομετρία αποδεικνύοντας βασικά θεωρήματα. Τον 15ο αιώνα ο Γερμανός αστρονόμος Rheticus εισήγαγε τη σύγχρονη προσέγγιση των τριγωνομετρικών αριθμών με τη μορφή που την ξέρουμε σήμερα. Τον 16ο αιώνα συνδυάστηκε η Τριγωνομετρία με τη Γεωγραφία και τον προσδιορισμό της θέσης στη Γη. Στη συνέχεια η Τριγωνομετρία εξελίχθηκε ραγδαία. Αξίζει να αναφερθούμε στη συνδρομή των Napier (επίλυση σφαιρικών τριγώνων), Newton (ανάπτυξη τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε σειρά) και Euler (τύπος του Euler).

Εισαγωγή.

Με τα τρέχοντα προγράμματα σπουδών η Τριγωνομετρία μπαίνει στη ζωή των μαθητών στη Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.ά., 2022), συνεχίζεται στη Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης κ.ά., 2022) και η επαφή αποκλειστικά με αυτήν ολοκληρώνεται στη Β΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2022β). Στα Μαθηματικά του προσανατολισμού θετικών σπουδών της Γ΄ Λυκείου, υπάρχουν προβλήματα που εμπλέκεται ή μπορεί να εμπλακεί η Τριγωνομετρία (κάποια από αυτά λύνονται και με όμοια τρίγωνα).

Η ενασχόληση με τη Τριγωνομετρία ξεκινά με τρόπο που αναδεικνύει την αξία, τη χρησιμότητα και κάποιες εφαρμογές της στην καθημερινότητα (αναλόγως των γνώσεων που έχουν οι μαθητές στη Β΄ Γυμνασίου), όμως στη συνέχεια αυτή φθίνει ραγδαία.

Στα σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι κύριες εφαρμογές αφορούν τον υπολογισμό αποστάσεων ανάμεσα σε δυσπρόσιτα σημεία (σχήμα 1).



Σχήμα 1: Υπολογισμός αποστάσεων δυσπρόσιτων σημείων.

Τέτοια παραδείγματα είναι ο υπολογισμός του ύψους ενός βουνού, ενός κτιρίου, του πλάτους ενός ποταμού (για την κατασκευή γέφυρας), του

μήκους ράμπας (υπόγειας ή υπέργειας), του μήκους καλωδίου για την κατασκευή ενός τελεφερίκ, του «μήκους της βάσης» ενός βουνού για την κατασκευή μιας σήραγγας κ.ά. Αναφορές γίνονται στη κλίση της ευθείας, σε θέματα ακροτάτων μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων, στο νόμο των ημιτόνων, των συνημιτόνων και στο εμβαδό τριγώνου.

Ταλαντώσεις.

Απλή αρμονική ταλάντωση είναι η κίνηση κατά την οποία η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης, δεν υπάρχουν τριβές ούτε αντίσταση του αέρα. Αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του σώματος και t ο χρόνος, ισχύει

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \qquad (1)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα.

Υποθέτοντας ότι αρχικά το σώμα είναι ακίνητο ισχύει $x(0) = 0$ και κατά συνέπεια βρίσκουμε ότι

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t),\ t \geq 0. \qquad (2)$$

Η «σχολική» λύση της εξίσωσης (1) προκύπτει αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση f με

$$f(t) = \left[x(t) - A\eta\mu(\omega t)\right]^2 + \left[x'(t) - A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)\right]^2,\ t \geq 0. \qquad (3)$$

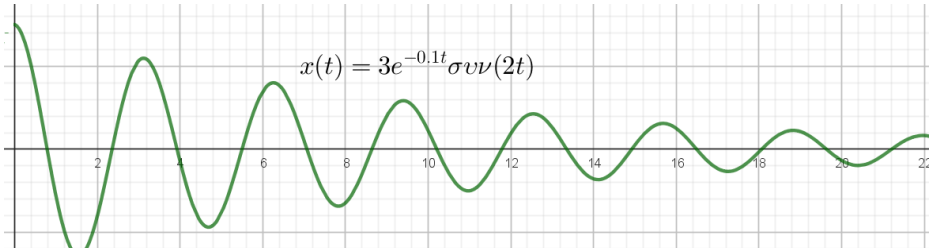
είναι σταθερή.

Τέτοιο παράδειγμα είναι η κίνηση ενός σώματος που βρίσκεται στη μία άκρη ενός ελατηρίου, όπου το άλλο του άκρο είναι στερεωμένο στο ταβάνι. Ενδιαφέρον έχει η κίνηση του σώματος όταν ληφθούν υπόψη η τριβή και η αντίσταση του αέρα. Για ένα σώμα μάζας m όπου ασκείται δύναμη ανάλογη της ταχύτητας, έστω $-bx'(t)$, η εξίσωση που ικανοποιείται είναι η

$$x''(t) + \frac{b}{m}x'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (4)$$

Για παράδειγμα αν $m = 100$, $b = 20$, $\omega^2 = \frac{401}{400}$ έχουμε φθίνουσα ταλάντωση και αν επιπλέον $x(0) = 3$, $x'(0) = -\frac{3}{10}$, η λύση της (4) είναι

$$x(t) = 3e^{-0.1t}\sigma\upsilon\nu(2t),\ t \geq 0. \qquad (5)$$



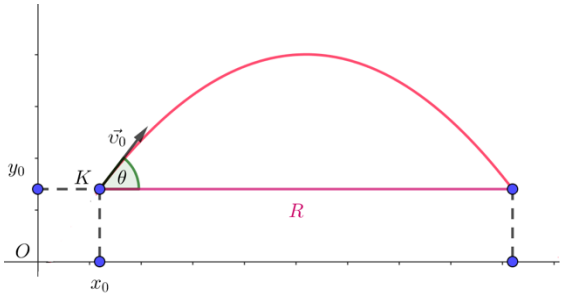
Μέγιστο βεληνεκές.

Ένα κανόνι που σχηματίζει γωνία θ με το έδαφος ρίχνει ένα βλήμα με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = (\upsilon_{0x}, \upsilon_{0y})$, μέτρου υ_0 και με σταθερή επιτάχυνση. Αν η κίνηση γίνεται πάνω στο επίπεδο Oxy και η αρχική θέση του κανονιού είναι (x_0, y_0), η θέση του βλήματος σε κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$(x, y) = \left(x_0 + \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta\, t, y_0 + \upsilon_0 \eta\mu\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \right), \tag{6}$$

αφού το βλήμα δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση και

$$\begin{cases} x'(t) = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\theta, \ \text{με} \ x(0) = x_0 \\ y''(t) = -g, \ \text{με} \ y(0) = y_0, y'(0) = \upsilon_0 \eta\mu\theta \end{cases}. \tag{7}$$



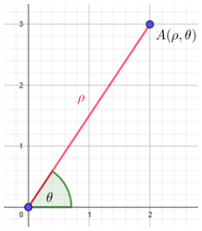
Σχήμα 2: Βεληνεκές πλάγιας βολής.

Η οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) που διανύει το βλήμα προκύπτει όταν $y = y_0$, οπότε $t = \dfrac{2\upsilon_0 \eta\mu\theta}{g}$ και αντικαθιστώντας στο x, προκύπτει ότι το βεληνεκές R, δίνεται από τη σχέση

$$R = x - x_0 = \frac{\upsilon_0^2 \eta\mu(2\theta)}{g}, \tag{8}$$

το οποίο μεγιστοποιείται όταν η γωνία θ είναι $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

Συστήματα συντεταγμένων.



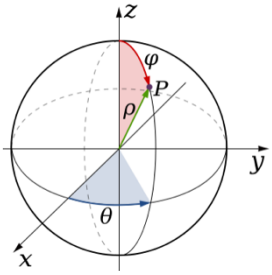
Στα Μαθηματικά υπάρχουν πολλά συστήματα συντεταγμένων. Σχεδόν σε όλα υπάρχει εξάρτηση από την τριγωνομετρία. Στις πολικές συντεταγμένες κάθε σημείο εκφράζεται με δύο συνιστώσες: την ακτινική $\rho > 0$ και την αζιμουθιακή $\theta \in [0, 2\pi)$. Το ρ δείχνει την απόσταση από το $O(0,0)$ και το θ τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον θετικό ημιάξονα Ox με αντιωρολογική φορά.

Είναι γνωστό ότι οι πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές (x, y) με τις σχέσεις

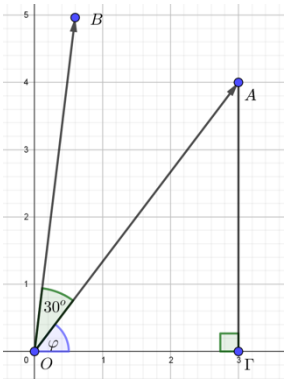
$$\begin{cases} x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = \rho\eta\mu\theta \end{cases}. \qquad (9)$$

Στην ουσία οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές στους μαθητές από τον τριγωνομετρικό κύκλο (για $\rho = 1$), αλλά και από την επέκταση των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών για μη οξείες γωνίες. Χρήσιμο θα ήταν να δοθεί και να αποδειχθεί η πολύ απλή μορφή της εξίσωσης του κύκλου $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$ στις πολικές συντεταγμένες που είναι $\rho = r$.

Η αναφορά στις σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ) με $\rho > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ και $\varphi \in [0, 2\pi]$ είναι φυσικό επακόλουθο, μαζί με αναφορά στην εξίσωση της σφαίρας σε καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες.



Το βιντεοπαιχνίδι.

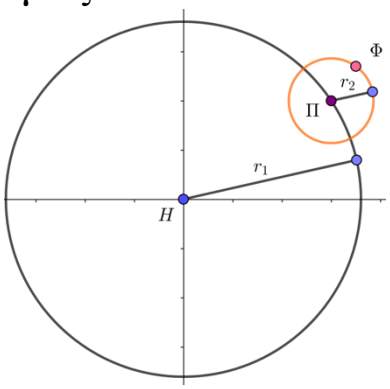


Σε ένα βιντεοπαιχνίδι ένα αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο $A(3,4)$ και πρέπει να στρίψει κατά 30° αντίθετα της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Β που θα βρεθεί;

Με το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε ότι $OA = 5$, ενώ από βασική Τριγωνομετρία στο τρίγωνο ΟΑΓ προκύπτει $O\Gamma = 5\sigma\upsilon\nu\varphi$, $A\Gamma = 5\eta\mu\varphi$, άρα και $\eta\mu\varphi = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{5}$, αφού $O\Gamma = 3$, $A\Gamma = 4$.

Ομοίως έχουμε ότι η τετμημένη του Β είναι $5\sigma\upsilon\nu(\varphi + 30^{o}) = \frac{3\sqrt{3}-4}{2}$, η τεταγμένη του είναι $5\eta\mu(\varphi + 30^{o}) = \frac{3+4\sqrt{3}}{2}$, άρα $B\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ένα απλοποιημένο μοντέλο Αστρονομίας.



Ένα φεγγάρι κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_2 γύρω από έναν πλανήτη ολοκληρώνοντας την κίνησή του σε χρόνο ω_2. Ο πλανήτης κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_1 γύρω από τον ήλιο ολοκληρώνοντας την κίνησή του σε χρόνο ω_1. Ποια είναι η θέση του φεγγαριού μετά από χρόνο t;

Οι συντεταγμένες του φεγγαριού Φ με αρχή του συστήματος συντεταγμένων το $\Pi(x_{\Pi}, y_{\Pi})$ είναι

$$\left(r_2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi t}{\omega_2}, r_2\eta\mu\frac{2\pi t}{\omega_2}\right). \qquad (10)$$

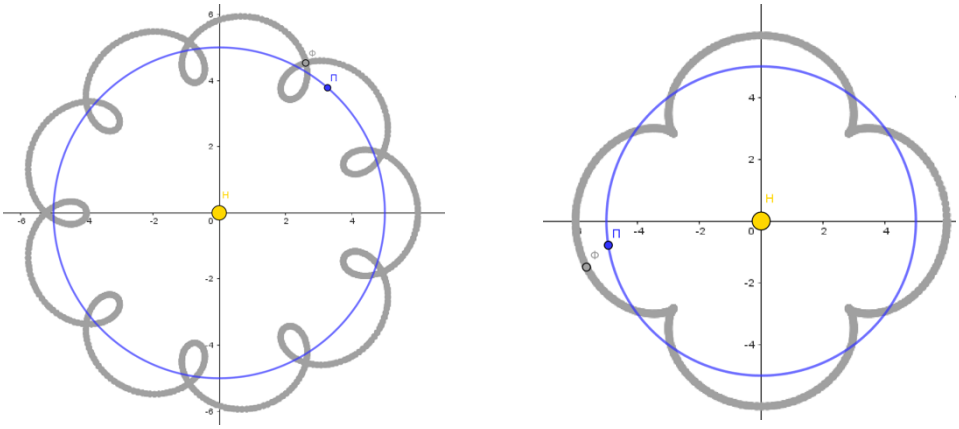
Οι συντεταγμένες του πλανήτη $\Pi(x_{\Pi}, y_{\Pi})$ είναι με αρχή του συστήματος συντεταγμένων τον ήλιο $H(0,0)$ είναι

$$(x_{\Pi}, y_{\Pi}) = \left(r_1 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{\omega_1}, r_1 \eta\mu \frac{2\pi t}{\omega_1} \right). \qquad (11)$$

Συνεπώς αν $\Phi(x_{\Phi}, y_{\Phi})$ και αφού $\vec{H\Phi} = \vec{H\Pi} + \vec{\Pi\Phi}$, ισχύει

$$(x_{\Phi}, y_{\Phi}) = \left(r_1 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{\omega_1} + r_2 \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{\omega_2}, r_1 \eta\mu \frac{2\pi t}{\omega_1} + r_2 \eta\mu \frac{2\pi t}{\omega_2} \right). \qquad (12)$$

Ενδιαφέρον για τους μαθητές έχει η απεικόνιση της τροχιάς με αλλαγές των παραμέτρων (σχήμα 4). Η συγκεκριμένη προσέγγιση του συστήματος ήλιος, πλανήτης, φεγγάρι έγινε από τον Απολλώνιο.



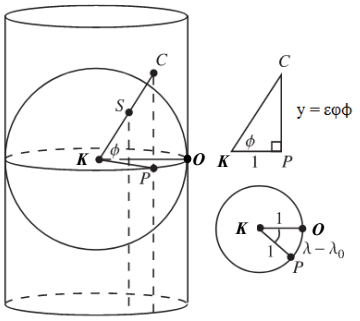
Σχήμα 4: Η τροχιά του φεγγαριού για:

$r_1 = 5,\ r_2 = 1,\ \omega_1 = 100,\ \omega_2 = 10$ $\qquad$ $r_1 = 5,\ r_2 = 1,\ \omega_1 = 50,\ \omega_2 = 10$

Εφαρμογή στη χαρτογραφία.

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα εφαρμογή της Τριγωνομετρίας είναι η δημιουργία χαρτών. Υπάρχουν πολλοί και ενδιαφέροντες τρόποι για την κατασκευή ενός χάρτη, όπως η κυλινδρική προβολή, η κωνική προβολή, η στερεογραφική προβολή, η πολική προβολή, η αζιμουθιακή προβολή κ.τ.λ.

Στην κυλινδρική προβολή για να δημιουργήσουμε τον παγκόσμιο χάρτη θεωρούμε τη Γη σαν μια μοναδιαία σφαίρα η οποία εφάπτεται εσωτερικά σε ένα κύλινδρο. Αν K είναι το κέντρο της σφαίρας, τότε κάθε σημείο S της σφαίρας αντιστοιχεί σε ένα σημείο C του κυλίνδρου ώστε τα σημεία K, S, C να είναι συνευθειακά. Έστω P η προβολή του C πάνω στον μέγιστο κύκλο της σφαίρας που είναι κοινός με τον κύλινδρο, O τυχαίο σημείο του και ϕ η γωνία SKP. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου δημιουργεί ένα επίπεδο συντεταγμένων, όπου O το κέντρο του και η περιφέρεια του μέγιστου κύκλου είναι ο άξονας $x'x$.



Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο KCP ισχύει

$$CP = \varepsilon\varphi\varphi \tag{13}$$

και το μήκος του τόξου OP είναι

$$OP = \lambda - \lambda_0 \tag{14}$$

αν το σημείο P έχει γεωγραφικό μήκος λ_0 και το O γεωγραφικό μήκος λ.

Τότε κάθε σημείο του συστήματος συντεταγμένων προσδιορίζεται ως

$$(x, y) = \left(\lambda - \lambda_0, \varepsilon\varphi\varphi\right). \tag{15}$$

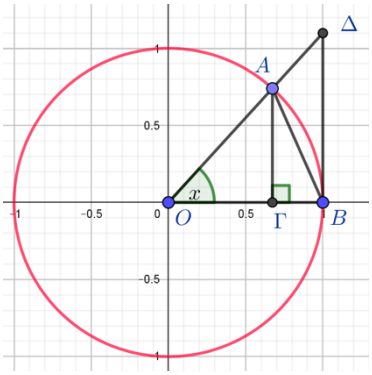
Γιατί ακτίνια και όχι μοίρες;

Ο προβληματισμός αυτός ξεκινά στους μαθητές της Β΄ Λυκείου, στους οποίους όμως δεν μπορούμε να απαντήσουμε με ακρίβεια. Μπορούμε να πούμε ότι το π είναι σπουδαίος αριθμός και ότι τα παραγόμενα αποτελέσματα είναι πιο απλά. Σε μαθητές Γ΄ Λυκείου όμως μπορούμε να δώσουμε ακριβή εξήγηση (Maor, 2002), η οποία εμπλέκει την απόδειξη του ορίου

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \tag{16}$$

που προκύπτει από την ανισοϊσότητα $|\eta\mu x| \le |x|, x \in \Gamma$.

Στον τριγωνομετρικό κύκλο θεωρούμε το σημείο $B(1,0)$, τυχαίο σημείο του Α, την προβολή Γ του Α στον άξονα των συνημιτόνων και έστω ότι η γωνία ΒΟΑ έχει μέτρο x ακτίνια, με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε και το τόξο έχει μήκος x ακτίνια.



Έχουμε ότι $\text{ΑΓ} = \eta\mu x$, $\text{ΟΓ} = \sigma\upsilon\nu x$, $\text{ΒΔ} = \varepsilon\varphi x$, οπότε αφού

$$(\text{ΟΑΒ}) < \left(\text{Ο.}\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}\right) < (\text{ΟΒΔ}) \tag{17}$$

ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ΟΒ} \cdot \text{ΑΓ} < \frac{1}{2} \cdot x \cdot \text{ΟΒ}^2 < \frac{1}{2} \cdot \text{ΟΒ} \cdot \text{ΒΔ}. \tag{18}$$

Συνεπώς προκύπτει

$$\frac{\eta\mu x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\varepsilon\varphi x}{2} \tag{19}$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1, \tag{20}$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1. \tag{21}$$

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Leftrightarrow -x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ από την (19) θέτοντας όπου x το $-x$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \tag{22}$$

οπότε σε συνδυασμό με την (21) προκύπτει η (16).

Αντιθέτως, για τον υπολογισμό του

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^{o}}{x} \tag{23}$$

και ακολουθώντας την προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία (Δαμβακάκις κ.ά, 2008), η σχέση (20) (το x μετριέται σε μοίρες) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\eta\mu x^{o}}{2} < \frac{\pi x^{o}}{360^{o}} < \frac{\varepsilon\varphi x^{o}}{2}. \tag{24}$$

Τότε

$$\frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu x^{o} < \frac{\eta\mu x^{o}}{x} < \frac{\pi}{180}, \tag{25}$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\eta\mu x^{o}}{x} = \frac{\pi}{180} \tag{26}$$

και όχι η βολική μονάδα της σχέσης (16).

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε άμεσα τον τύπο μετατροπής μοιρών σε ακτίνια, δηλαδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^{o}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\frac{\pi x}{180}}{x} = \frac{\pi}{180}. \tag{27}$$

Αυτό το βασικό όριο επηρεάζει τις παραγώγους του ημιτόνου και του συνημιτόνου, οι οποίοι αποδεικνύονται ότι είναι

$$(\eta\mu x^{o})' = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu x^{o}, \tag{28}$$

και

$$(\sigma\upsilon\nu x^{o})' = -\frac{\pi}{180}\eta\mu x^{o}. \tag{29}$$

Συμπεράσματα.

Τα Μαθηματικά είναι απαραίτητα σε πολλούς επιστημονικούς τομείς και η Τριγωνομετρία είναι ένας κλάδος με πολλές εφαρμογές. Στα σχολικά βιβλία οι εφαρμογές της Τριγωνομετρίας εξαντλούνται στον υπολογισμό αποστάσεων ανάμεσα σε δυσπρόσιτα σημεία. Οι μαθητές δεν βλέπουν το πραγματικά μεγάλο εύρος των εφαρμογών της. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να αναδείξουν την αξία της Τριγωνομετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε μεγαλύτερο βαθμό. Στην παρούσα εργασία καταγράψαμε μερικές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας κατάλληλες για τη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση. Επίσης διευκρινίσαμε τους λόγους για τους οποίους χρησιμοποιούμε ακτίνια και όχι μοίρες.

Ενδεικτική βιβλιογραφία.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. και Σβέρκος Α. (2022). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντή Κ., Τσικοπούλου Σ. και Χρυσοβέργης Μ. (2022). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ. (2022). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Δαμβακάκις Γ., Κτιστάκης Ν., Λάμπρου Μ. και Σπανουδάκης Κ. Ν. (2008). *Επαναληπτικά θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.* Εκδόσεις Καγκουρό Ελλάς.

Maor E. (2002). *Τριγωνομετρικά Λουκούμια*. Εκδόσεις Κάτοπτρο.