ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ+ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Άσκηση 1

Έστω $P(x)=x^3+x^2+x+1$ και $Q(x)=x^{4\kappa+3}+x^{4\lambda+2}+x^{4\mu+1}+x^{4\nu}$ με $\kappa,\lambda,\mu,\nu \varepsilon N^*$

Να δείξετε ότι το P είναι παράγοντας του Q

Λύση

Αρκεί η τυχαία ρίζα του P να είναι και ρίζα του Q

$\rho^3+\rho^2+\rho+1=0$ τότε $\rho^4=1$ αλλά

$Q(\rho)=\rho^3(\rho^4)^\kappa+\rho^2(\rho^4)^\lambda+\rho(\rho^4)^\mu+(\rho^4)^\nu=\rho^3+\rho^2+\rho+1=0$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι το x^2+x+1 είναι παράγοντας του $(x+1)^{6\kappa+2}+x^{3\lambda+2}+1$

Λύση

$\rho^2+\rho+1=0$ τότε $\rho^3=1$, $\rho+1=-\rho^2$ άρα

$(\rho+1)^{6\kappa+2}+\rho^{3\lambda+2}+1=((\rho)^{3\kappa+1}+\rho^{3\lambda+2}+1=\rho^2+\rho+1=0$

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι το x^2-x+1 είναι παράγοντας του $(x-1)^{\nu+2}+x^{2\nu+1}$,$\nu \varepsilon N^*$

Λύση

$\rho^2-\rho+1=0$ τότε $\rho^3=-1$,$\rho-1=\rho^2$ άρα

$(\rho-1)^{\nu+2}+\rho^{2\nu+1}=\rho^{2\nu+4}+\rho^{2\nu+1}=\rho^3+1=0$

Άσκηση 4

Να βρείτε τα α,β ώστε το x^2+x+1 να είναι παράγοντας του $x^{2\nu}+\alpha x^\nu+\beta$

Λύση

$\rho^2+\rho+1=0$ τότε $\rho^3=1$ και έστω $\nu=3\kappa+\upsilon$

τότε$Q=\rho^{2(3\kappa+\upsilon)}+\alpha\rho^{3\kappa+\upsilon}+\beta=\rho^{2\upsilon}+\alpha\rho^\upsilon+\beta$

για $\upsilon=0$ $Q=1+a+b$, για $\upsilon=1$ $Q=-\rho-1+\alpha\rho+\beta=(-1+\alpha)\rho-1+\beta$ οπότε $\alpha=1,\beta=1$

για $\upsilon=2$ ομοίως $\alpha=1,=$

Άσκηση 5

Βρείτε τα α,β ώστε το x^2-1 να είναι παράγοντας του $x^\nu+\alpha x+\beta$ ($\nu \varepsilon N^*,\nu>2$)

Λύση

$\nu=2\kappa+\upsilon$. Το μερικό υπόλοιπο της διαίρεσης $\chi^2:\chi^2-1$ είναι το 1

$\chi^{2\nu+\upsilon}+\alpha\chi+\beta:\chi^2-1$

$\chi^\upsilon+\alpha\chi+\beta:\chi^2-1$

$1+\alpha\chi+\beta:\chi^2-1$που έχει μερικό υπόλοιπο $\alpha\chi+\beta+1=0$ $a=0$ $\beta=-1$

ή

$(\alpha+1)\chi+\beta=0$ άρα $\alpha=-1,\beta=0$

Άσκηση 6

Να βρείτε τα α,β ώστε η διαίρεση : $(x-1)^{\nu+2}+x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta : x^2-x+1$ να αφήνει υπόλοιπο $2x-1$

Λύση

Το μερικό υπόλοιπο της $\chi^2:\chi^2-\chi+1$

Είναι το $\chi-1$

$(x-1)^{\nu+2}+x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta : x^2-x+1$

$(x-1)^\nu(x^2-2x+1)+(x^2)^\nu+\alpha x+\beta :$

x^2-x+1

$-(x-1)^\nu$'$+(x-1)^\nu\chi\alpha x+\beta: x^2-x+1$ άρα τοι υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το $\alpha\chi+\beta$ που πρέπει να είναι το $2\chi-1$ άρα $\alpha=2,\beta=-1$

Άσκηση 7

Αν $x^\nu-1$ είναι παράγοντας του $x^\mu-1$ τότε ν είναι παράγοντας του μ ($\nu,\mu \varepsilon N^*$) (*)

Λύση

$\mu=\kappa\nu+\upsilon$

η διαίρεση $\chi^\mu-1:\chi^\nu-1$ η $(\chi^\nu)^\kappa\chi^\upsilon-1:\chi^\nu-1$ η $\chi^\upsilon-1:\chi^\nu-1$ αφήνουν ίδιο υπόλοιπο $\chi^\upsilon-1$ όμως η διαίρεση είναι τέλεια άρα $\chi^\upsilon-1=0$ η $\upsilon=0$ η ν/μ

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^\nu+1$ Να βρεθεί και το πηλίκο (*)

Λύση

$n(x^{n+1}-x^n)-(x^n-1)=$

$nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+...+1)=$

$(x-1)[(x^n-x^{n-1})+(x^n-x^{n-2})+..+(x^n-1)]=$

$(x-1)^2[x^{n-1}+(x+1)x^{n-2}+...+(x^{n-1}+...+1)]$

Άσκηση 9

Αν το x^2+x+1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x^3)+xQ(x^3)$ τότε να δείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του P και του Q .Θεωρείστε ότι τα P και, Q έχουν πραγματικούς συντελεστές

Λύση

$r^2+r+1=0$ τότε $r^3=1,0=(r^2+r+1)S(r)=$
$=P(1)+rQ(1)$

Αν $Q(1)\neq 0$ $r\in R$ άτοπο άρα $P(1)=0$ και
$R(1)=0$

Άσκηση 10

Εστω p πολυώνυμο και ας είναι

$q(x)=x^2+xp(x^3)$. Να αποδείξετε ότι το

q δε διαιρείται από το x^2-x+1

Λύση

Έστω $\rho^2-\rho+1=0$, $\rho^3=-1$,$q(r)=0$
$\rho^2+\rho p(-1)=0$ η $\rho=0$ η $-\rho=p(-1)$
άτοπο

Άσκηση 11

Αν P,Q,R,S πολυώνυμα με
πραγματικούς συντελεστές ώστε να
ισχύει $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=$
$=(1+x+x^2+x^3+x^4)S(x)$ να δείξετε ότι το
x-1 είναι παράγοντας του P(x)

Λύση

$1+r+...+r^4=0$,$r^5=1$ τότε
$P+rQ+r^2R=0$,$r\neq 0$
$(1/r)P+Q+Rr=0$ $Q\in C-R$ άτοπο άρα
$Q=0$
$P+r^2R=0$ αν $R\neq 0$, $P/R=-r^2$, $r^2\in R$ άτοπο