Αναζητώντας το «θεώρημα Maclaurin» στην Ελληνική βιβλιογραφία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Γιάννης Θωμαΐδης – Γιώργος Ρίζος

Εισαγωγή

Στις αρχές Αυγούστου ο Σωτήρης Λουρίδας άνοιξε στον ιστότοπο mathematica.gr (https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=180&t=74265) ένα ενδιαφέρον νήμα με τον τίτλο «ΘΕΩΡΗΜΑ του MacLaurin», ζητώντας να δοθούν αποδείξεις ενός γεωμετρικού θεωρήματος το οποίο στο παρελθόν περιέχονταν ως άσκηση ακόμη και σε σχολικά βιβλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο αίτημα αυτό υπήρξε σημαντική ανταπόκριση των μελών του ιστότοπου, αλλά μερικές μέρες αργότερα έγινε μια παρέμβαση του Σιλουανού Μπραζιτίκου που έθεσε το ακόλουθο ερώτημα (https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=180&t=74294):

> *Έχω ψάξει λίγο στο παρελθόν για να βρω αυτό το θεώρημα με αυτό το όνομα σε ξένη βιβλιογραφία, αλλά δεν βρήκα κάτι. Έχει κάποιος τέτοιου είδους αναφορά;*

Το ερώτημα αυτό προκάλεσε εκτεταμένη συζήτηση, γεγονός που οδήγησε τους διαχειριστές του ιστότοπου να ανοίξουν νέο νήμα με τίτλο «*Περί ονομασίας του Θεωρήματος του MacLaurin*». Η συζήτηση στο νήμα αυτό συνεχίστηκε με πολλές αξιόλογες παρεμβάσεις αλλά στη συνέχεια ατόνησε, αφήνοντας μια διάχυτη αίσθηση ότι δεν δόθηκε κάποια ικανοποιητική απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Σχετικό είναι επίσης και το νήμα με τίτλο «*Περί χορδών ο λόγος*» που άνοιξε την ίδια περίοδο ο Γιώργος Βισβίκης, παρακινούμενος προφανώς από τη συζήτηση που είχε προηγηθεί (https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=178&t=74314).

Στην εργασία που ακολουθεί καταγράφουμε τα κύρια ευρήματα μιας βιβλιογραφικής ανασκόπησης και επιχειρούμε, στηριζόμενοι σε αυτά, να απαντήσουμε στο ερώτημα περί της ονομασίας.

Τα βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας που εξετάσαμε καταγράφονται στις επόμενες ενότητες αλλά επισημαίνουμε την ύπαρξη πολλών ακόμη βιβλίων, η μελέτη των οποίων ενδέχεται να συμπληρώσει, να επεκτείνει ή και να τροποποιήσει τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας.

1. Η εμφάνιση δύο ασκήσεων με την επωνυμία «θεώρημα Maclaurin» στην Ελληνική βιβλιογραφία.

Το παλαιότερο, γνωστό σε εμάς, Ελληνικό βιβλίο όπου εμφανίζονται δύο γεωμετρικές προτάσεις με την επωνυμία «Θεώρημα Maclaurin» είναι η *Θεωρητική Γεωμετρία* του Π. Τόγκα (2η έκδοση, 1950). Η πρώτη εμφανίζεται ως άσκηση στην ενότητα «Συμπλήρωμα του πρώτου και δευτέρου βιβλίου»: [1]

> **807.** *Θεώρημα του Maclaurin*. Δίδεται μία γωνία xAy, και ένα σημείον Β, το οποίον κείται επί της διχοτόμου της. Γράφομεν τυχούσαν περιφέρειαν διερχομένην από τα σημεία Α και Β· η περιφέρεια αυτή τέμνει την Αx στο Γ και την Αy στο Δ. Να αποδειχθεί, ότι ΑΓ + ΑΔ = σταθερόν.

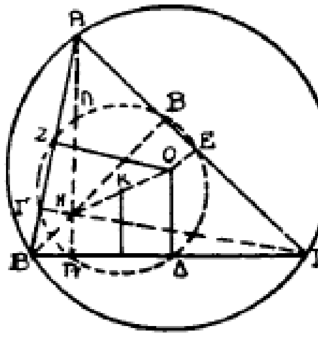
[1] Διατηρούμε την αρχική διατύπωση με μικρές παρεμβάσεις στην ορθογραφία.

Η δεύτερη πρόταση εμφανίζεται επίσης ως άσκηση στην ενότητα «Ασκήσεις επί του Γ΄ βιβλίου προς γενικήν επανάληψιν»: [2]

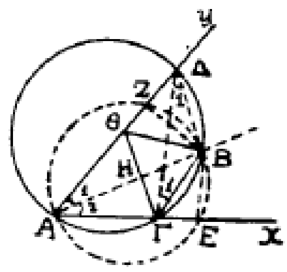
1486. *Θεώρημα του Maclaurin*. Από τυχόν σημείον Α μιας περιφερείας Ο φέρομεν μίαν χορδήν ΑΒ και εκατέρωθεν αυτής τας χορδάς ΑΓ, ΑΔ ούτως, ώστε γων.ΓΑΒ = γων.ΒΑΔ. Από ένα δεύτερον σημείον $Α_1$ της αυτής περιφερείας φέρομεν τας χορδάς $Α_1Β_1$, $Α_1Γ_1$, $Α_1Δ_1$ παραλλήλους προς τας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{ΑΓ+ΑΔ}{Α_1Γ_1+Α_1Δ_1}=\frac{ΑΒ}{Α_1Β_1}$$

Οι ασκήσεις αυτές εμφανίζονται με την ίδια ακριβώς μορφή στις αλλεπάλληλες, επανεκδόσεις του συγκεκριμένου βιβλίου. Π.χ. στην αχρονολόγητη $23^η$ έκδοση (που έγινε μάλλον στις αρχές της δεκαετίας του 1970), βρίσκονται στις σελίδες 279 και 446. [3]



Σχ. ἀσκ. 769.



Σχ. ἀσκ. 772.

772. (807). *Θεώρημα τοῦ Maclaurin.* **Δίδεται μία γωνία xAy καὶ ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου της. Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Αy εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ+ΑΔ=σταθερόν.**

1451. (1486). *Θεώρημα τοῦ Maclaurin.* **Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς χορδὰς ΑΓ, ΑΔ οὕτως, ὥστε γων.ΓΑΒ=γων.ΒΑΔ. Ἀπὸ ἕνα δεύτερον σημεῖον $Α_1$ τῆς αὐτῆς περιφερείας φέρομεν τὰς χορδὰς $Α_1Β_1$, $Α_1Γ_1$, $Α_1Δ_1$ παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι** $\frac{ΑΓ+ΑΔ}{Α_1Γ_1+Α_1Δ_1}=\frac{ΑΒ}{Α_1Β_1}$.

[2] Προς χάρη των νεώτερων αναγνωστών υπενθυμίζουμε ότι η παραδοσιακή ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (διδακτέα και εξεταστέα ταυτόχρονα!) διδάσκονταν επί τέσσερα συναπτά έτη, κατανεμημένη σε επτά μεγάλες ενότητες (βιβλία) με τους εξής τίτλους: Α: Η ευθεία γραμμή, Β: Η περιφέρεια, Γ: Όμοια σχήματα, Δ: Εμβαδά, Ε: Ευθείες και επίπεδα, ΣΤ: Πολύεδρα, Ζ: Κύλινδρος – Κώνος – Σφαίρα.

[3] Η μόνη διαφορά είναι ότι στις νεώτερες εκδόσεις γίνεται διπλή αρίθμηση των ασκήσεων και οι συγκεκριμένες εμφανίζονται ως 772. (807) και 1451. (1486). Το γεγονός αυτό, σύμφωνα με το συγγραφέα (σ.12) οφείλεται στην παράλληλη κυκλοφορία τευχών με τις λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου, που έφεραν τον τίτλο *Ασκήσεις και προβλήματα Γεωμετρίας*. Επίσης η εκφώνηση της άσκησης 1486 δεν συνοδεύεται από το αντίστοιχο σχήμα, όπως στην έκδοση του 1950.

Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι οι συγκεκριμένες ασκήσεις της *Θεωρητικής Γεωμετρίας* του Τόγκα προέρχονται είτε άμεσα είτε έμμεσα από τις *Ασκήσεις Γεωμετρίας* των Ιησουϊτών, πριν από την κυκλοφορία της εξαίρετης Ελληνικής μετάφρασης του Δημήτριου Γκιόκα (Εκδόσεις Καραβία, 1952).
Η πρώτη ένδειξη είναι ότι τα σχήματα που συνοδεύουν τις εκφωνήσεις των ασκήσεων στο βιβλίο του Τόγκα σχεδόν ταυτίζονται με εκείνα που συνοδεύουν τις αποδείξεις των αντίστοιχων προτάσεων στο βιβλίο των Ιησουϊτών.
Η δεύτερη ένδειξη είναι η επίλυση των δύο ασκήσεων στο *Ασκήσεις και προβλήματα Γεωμετρίας* (η 807 στο τεύχος Β2, 12η έκδοση και η 1486 στο τεύχος Γ2, 11η έκδοση, αμφότερες αχρονολόγητες). Η μέθοδος είναι ίδια ακριβώς με αυτή των αποδείξεων που δίνονται στις *Ασκήσεις Γεωμετρίας* των Ιησουϊτών (βλ. σ.304 και σ.615 της Ελληνικής μετάφρασης).
Η τρίτη ένδειξη είναι ότι αμέσως μετά την επίλυση της άσκησης 807 (τεύχος λύσεων Β2, σ.11), ο Τόγκας παραθέτει την ίδια παρατήρηση που συνοδεύει την απόδειξη της αντίστοιχης πρότασης στο βιβλίο των Ιησουϊτών:

> *Παρατήρησις*. Η άσκησις αυτή δύναται να εκφρασθεί και ως εξής:
> Όταν ένα τρίγωνον ΑΓΔ έχει μίαν γωνίαν Α σταθεράν κατά το μέγεθος και κατά την θέσιν και το άθροισμα ΑΓ + ΑΔ των δύο πλευρών του, που περιέχουν την γωνίαν αυτήν είναι σταθερόν, η περιφέρεια η περιγεγραμμένη περί το τρίγωνον αυτό διέρχεται δι’ ενός σημείου Β ορισμένου, το οποίον κείται επί της διχοτόμου της γωνίας Α. [4]

Τα προηγούμενα επιβεβαιώνουν κατά την άποψη μας την υπόθεση ότι οι δύο ασκήσεις της *Θεωρητικής Γεωμετρίας* του Τόγκα, που φέρουν αμφότερες την επωνυμία «θεώρημα του Maclaurin», προέρχονται από τις *Ασκήσεις Γεωμετρίας* των Ιησουϊτών. Υπάρχει όμως μια λεπτομέρεια που συνδέεται άμεσα με το θέμα μας και προκαλεί σκεπτικισμό. Στην Ελληνική μετάφραση του βιβλίου δεν υπάρχει καμιά τέτοια επωνυμία για την πρόταση Μ1 ενώ αντίθετα, αμέσως μετά την εκφώνηση της Μ2, ακολουθεί η παραπομπή (Maclaurin, 1743).

Για επιβεβαίωση ελέγξαμε και τη Γαλλική 5η έκδοση του 1912 από την οποία έγινε η Ελληνική μετάφραση. Οι δύο προτάσεις αναφέρονται εκεί αντίστοιχα ως θεώρημα 132 (σ.290) και θεώρημα 397 (σ.586). Η μόνη διαφορά είναι ότι στο θεώρημα 397 η παραπομπή είναι ακόμη πιο συγκεκριμένη, με αναφορά και στο βιβλίο του Maclaurin *Traité des fluxions*.

---

[4] Όπως θα διαπιστώσουμε στη δεύτερη ενότητα της εργασίας, η άσκηση 807 της *Θεωρητικής Γεωμετρίας* του Τόγκα καθιερώθηκε τις επόμενες δεκαετίες στην Ελληνική βιβλιογραφία με τη μορφή που εμφανίζεται σε αυτή την παρατήρηση και συνέβαλε καθοριστικά στην ανάπτυξη μιας εκτεταμένης «μεθοδολογίας» για την επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών. Στη συνέχεια της εργασίας θα αναφερόμαστε στη συγκεκριμένη άσκηση χρησιμοποιώντας το σύμβολο Μ1, ενώ για την άσκηση 1486 το σύμβολο Μ2.

Théorème 132. — II.

677. *Par le sommet* A *d'un angle donné* FAG *et par un point fixe* B, *pris sur la bissectrice de cet angle, on fait passer une circonférence quelconque; elle coupe les côtés de l'angle en* C *et* D; *prouver que la somme des segments* AC, AD *est constante.*

En prenant AB pour diamètre, on a $AF = AG$; donc la constante doit égaler $2AF$.

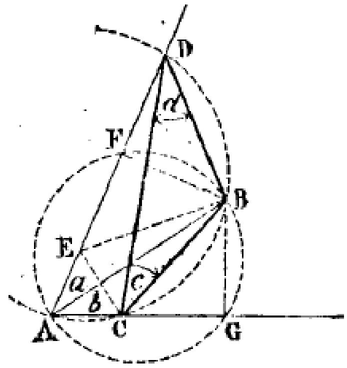


Fig. 402.

Il suffit donc de prouver qu'on a :

$$AC + AD = 2AF.$$

La droite BF est perpendiculaire sur AD; projetons le point C sur la bissectrice AB, afin d'obtenir $AE = AC$. Il suffit de prouver que $FE = FD$.

Or l'angle $a = c, \quad b = d,$

donc $c = d,$

par suite, $BD = BC = BE,$

le triangle DBE est isocèle, et la perpendiculaire BF donne $FD = FE$.

678. *Remarque.* Le théorème peut être énoncé comme il suit :

Lorsqu'un triangle CAD *a un angle* A, *donné de grandeur et de position, et que la somme* $AC + AD$ *des côtés qui comprennent cet angle est constante, la circonférence circonscrite au triangle passe par un point fixe* B, *situé sur la bissectrice de l'angle* A.

Théorème 397.

1291. *Par l'extrémité d'une corde, on mène deux autres cordes également inclinées sur la première. Par un second point de la circonférence, on mène des parallèles aux trois lignes déjà considérées; prouver que la somme des côtés du premier angle est à celle des côtés du second dans le même rapport que les cordes qui servent de bissectrices à ces angles.* (Maclaurin, en 1743; *Traité des fluxions.*)

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ένα εύλογο και ενδιαφέρον – αν και δύσκολο να απαντηθεί – ερώτημα:

Γιατί ο Τόγκας χρησιμοποίησε την επωνυμία «θεώρημα του Maclaurin» στην άσκηση 807 του βιβλίου του;

Το επιχείρημα ότι πιθανώς η άσκηση να προέρχεται από μια διαφορετική πηγή δεν φαίνεται να ευσταθεί για δύο τουλάχιστον λόγους:

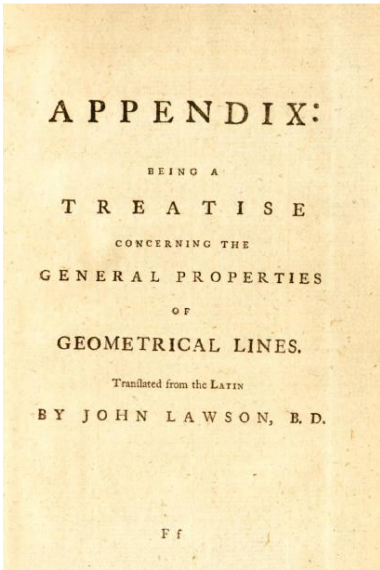
α) Μια έρευνα που κάναμε σε αρκετά ξενόγλωσσα βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκείνης της εποχής ήταν αρνητική.

Συγκεκριμένα, αναζητήσαμε την άσκηση, καθώς και τυχόν αναφορές που να τη συνδέουν με το έργο του Maclaurin σε δημοφιλή ξενόγλωσσα βιβλία με συλλογές ασκήσεων γεωμετρίας, (κυρίως Γαλλικών) του τέλους του 19ου και των αρχών του 20ου αιώνα, δίχως όμως να εντοπίσουμε σχετικές συνδέσεις. Η επιλογή των συγκεκριμένων βιβλίων έγινε με οδηγό τη βιβλιογραφία που παρατίθεται σε μερικά βιβλία Γεωμετρίας της εποχής. Δυστυχώς η πλειοψηφία των μαθηματικών βιβλίων προετοιμασίας των υποψηφίων για τις ακαδημαϊκές εξετάσεις δεν είχαν βιβλιογραφικές αναφορές.

Ελέγξαμε τα εξής βιβλία, δίχως να εντοπίσουμε βιβλιογραφική αναφορά που να τη συνδέει με τον Maclaurin.

- J. Hadamard. *Lecons de Geometrie elementaire I, Geometrie plane*. Paris, 1892.
- E. Rouche & Ch. De Comperousse. *Traité_de_géométrie_élémentaire*. Paris, 1900.
- Th. Caronnet. *Exercices de Geometrie* (τόμοι 1-9). Paris, 1920-1962.
- A. Baker. *Elementary Plane Geometry*. Boston, 1903.
- J. Petersen. *Methodes et theories pour la resolution des problemes de constructions geometriques*. Paris, 1901.
- L. Cremona. *Elements of Projective Geometry*. Oxford, 1893.

Επίσης σε μια μικρή έρευνα στα δύο διαθέσιμα ηλεκτρονικά συγγράμματα του Colin Mac Laurin, το *Geometria Organica* (Londini, 1719) και το *A Treatise of Algebra in three Parts* (London, 1779) δεν εντοπίσαμε να έχει ασχοληθεί ο Maclaurin με αυτό το πρόβλημα.



β) όπως θα διαπιστώσουμε στην επόμενη ενότητα, ο δεύτερος λόγος που αδυνατίζει το επιχείρημα για χρήση διαφορετικής πηγής από τον Τόγκα είναι, ότι η ίδια άσκηση επανεμφανίστηκε σε πολλά Ελληνικά βιβλία τα αμέσως επόμενα χρόνια, χωρίς καμία σύνδεση με το όνομα του Maclaurin.

2. Η επανεμφάνιση των δύο ασκήσεων και η ανάπτυξη μιας «μεθοδολογίας Maclaurin»

Οι δύο ασκήσεις που πρωτοεμφανίστηκαν στη *Θεωρητική Γεωμετρία* του Τόγκα με την επωνυμία «Θεώρημα του Maclaurin», καθιερώθηκαν τις επόμενες δεκαετίες στην Ελληνική βιβλιογραφία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αλλά σε μια σειρά σημαντικών βιβλίων η πρώτη εμφανίζεται χωρίς την παραμικρή συσχέτιση με το όνομα του Σκωτσέζου μαθηματικού. [5]

Στη σειρά αυτή ανήκουν τα επόμενα βιβλία:

[1] Α. Πάλλας. *Μεγάλη Γεωμετρία*. Τόμος Α΄ Επιπεδομετρία. Τεύχη Α΄ & Β΄. Έκδοσις Τρίτη. Βιβλιοπωλείον Αναγέννησις, Αθήναι, 1962 και 1963.

[2] Π. Βασιλειάδης. *Γεωμετρία*. Α΄ Τόμος. *Επιπεδομετρία*. Θεσσαλονίκη, 1966.

[3] Δ. Λιβέρης. *Η θεωρία της γεωμετρικής ασκήσεως*. Τόμος Α΄. Αθήναι, 1967.

[4] Ι. Ιωαννίδης. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Τόμος Δεύτερος. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι, 1968.

[5] Ν. Κισκύρας (υπογράφει ως Χ. Τσαρούχης). *Θεωρήματα και προβλήματα Γεωμετρίας*. Τόμος ΙΙ. Αθήνα, 1970.

[6] Δ. Λιβέρης. *Θεωρητική Γεωμετρία. Με μεθοδικήν σπουδήν θεωρητικήν και πρακτικήν της γεωμετρικής ασκήσεως*. Τόμος Β΄. Αθήναι, 1974 (1η έκδοση 1963).

[7] Μ. Μαραγκάκης. *Γεωμετρικά Θέματα*. Αθήνα, 1978.

[8] Γ. Ντάνης. *Γεωμετρία 1*. Gutenberg, Αθήνα (αχρονολόγητο).

Η άσκηση Μ1 εμφανίζεται χωρίς την επωνυμία «θεώρημα «Maclaurin» στα βιβλία [1] (τεύχος Α΄ σ.128), [2] (σ.135 & 136), [3] (σ.43), [4] (σ.169), [5] (σ. 123), [6] (σ. 452), [7] (σ.348) και [8] (σ.108).

Η άσκηση Μ2 εμφανίζεται με την επωνυμία «θεώρημα Maclaurin» στα βιβλία [1] (τεύχος Β΄, σ.43) και [6] (σ.84).

Στο σχολικό βιβλίο [4], με στόχο προφανώς τη διευκόλυνση των μαθητών, η Μ1 εμφανίζεται σε πιο «σχολική» διατύπωση ως εξής (σ.169):

> 15. Δίνεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ). Θεωρούμεν επί των πλευρών ΑΥ και ΑΖ αυτής δύο σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ + ΑΓ = 2λ και το μέσον Α′ του τόξου του κύκλου ΑΒΓ, του αντίστοιχου της γωνίας (ΑΥ, ΑΖ). Να αποδειχθεί ότι:
>
> (1) Αν Β′ και Γ′ είναι δύο τυχόντα σημεία των ΑΥ και ΑΖ αντιστοίχως ώστε ΑΒ′ + ΑΓ′ = 2λ, τότε ο κύκλος ΑΒ′Γ′ διέρχεται δια του Α′ και
>
> (2) Αν είναι Ο το κοινόν σημείον των ΒΓ και Β′Γ′, η ΟΑ′ είναι κάθετος επί την Β′Γ′, ήτοι ότι αι μεσοκάθετοι των ευ. τμημάτων Β′Γ′ διέρχονται δια του Α′.

Σε ορισμένα άλλα όμως βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας η άσκηση Μ1 εξελίχθηκε σε δομικό στοιχείο μιας «μεθοδολογίας» για την επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών, στην οποία εκτός από την επωνυμία «θεώρημα Maclaurin» εισάγονται καινοφανείς όροι όπως «σημείο Maclaurin», «σχέση Maclaurin» και «γενίκευση Maclaurin». Τα βιβλία αυτά είναι τα εξής:

[9] Ε. Γεωργιακάκης & Π. Γεωργιακάκης. *Μεθοδική Γεωμετρία 1*, 1971.

[10] Μ. Γεωργιακάκης & Π. Γεωργιακάκης. *Γεωμετρία – Μεθοδολογία*, 1975.

[11] Α. Δημητρίου. *Μέθοδοι Επιλύσεως Γεωμετρικών Προβλημάτων*. 5η Έκδοση. Gutenberg, Αθήνα, 1976. (Περιέχει πρόλογο με χρονολογία 1971).

---

[5] Η διατύπωση που καθιερώθηκε ήταν εκείνη της παρατήρησης στις *Ασκήσεις Γεωμετρίας* των Ιησουϊτών που συμβολίσαμε με Μ1: Δηλαδή ζητείται να αποδειχθεί ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι όλων των τριγώνων ΑΒΓ που έχουν κοινή γωνία Α και σταθερό άθροισμα πλευρών ΑΒ + ΑΓ, διέρχονται από σταθερό σημείο της διχοτόμου της Α.

[12] Χ. Ταβανλής. *Επίπεδος Γεωμετρία 1.* Β΄ Έκδοση. Εκδόσεις Χιωτέλλη, Αθήναι (αχρονολόγητο).

Τα επόμενα αποσπάσματα από το [9] (σσ.281-288) είναι χαρακτηριστικά για το είδος της επιχειρούμενης «διδακτικής αξιοποίησης» της άσκησης Μ1:

> **§479. Θεώρημα Mac – Laurin**
> Θεωρούμεν γωνίαν xOy και επί των πλευρών αυτής τα μεταβλητά σημεία Α και Β ώστε: ΟΑ + ΟΒ = λ ή |ΟΑ – ΟΒ| = λ. Τότε:
> α. Ο κύκλος (ΟΑΒ) διέρχεται δια σταθερού σημείου
> β. Το μέσον της ΑΒ γράφει γνωστήν ευθείαν
> γ. Η μεσοκάθετος της ΑΒ διέρχεται από σταθερού σημείου.
> **§481. Σχόλιον**
> Εις τας κατασκευάς της μορφής Α, β + γ , x ή Α, β – γ, x ο υποψήφιος θα πρέπει να έχη υπ' όψιν του, ότι εις τας περισσοτέρας των περιπτώσεων εφαρμόζεται το θ. Mac-Laurin. Δηλαδή το γεγονός ότι «ο περιγεγραμμένος κύκλος διέρχεται δια σταθερού σημείου» ή «το μέσον της ΒΓ γράφει γνωστήν ευθείαν».
> **§489. 1η γενίκευσις Mac – Laurin**
> Θεωρούμεν γωνίαν xOy και επί των πλευρών αυτής τα μεταβλητά σημεία Α και Β, ώστε: λ·ΟΑ + μ·ΟΒ = k όπου λ, μ > 0 και k δοθέν ευθύγραμμον τμήμα, τότε οι κύκλοι (ΟΑΒ) διέρχεται δια σταθερού σημείου S*.
> **§490. 2η γενίκευσις Mac – Laurin**
> Θεωρούμεν γωνίαν xOy και επί των πλευρών αυτής τα μεταβλητά σημεία Α και Β ώστε: λ·ΟΑ – μ·ΟΒ = k όπου λ και μ θετικοί και k δοθέν ευθύγραμμον τμήμα. Τότε οι κύκλοι (ΟΑΒ) διέρχεται δια σταθερού σημείου S*.

Παρόμοιο είναι το περιεχόμενο στα υπόλοιπα βιβλία (στο [11] η «μεθοδολογία Maclaurin» και οι εφαρμογές της καταλαμβάνουν 24 σελίδες!), ενώ δεν λείπουν και οι απαραίτητες σε αυτές τις περιπτώσεις συστάσεις προς τους υποψηφίους: *Τα σχετικά με το «θεώρημα Maclaurin» δεν ανήκουν στη διδακτέα-εξεταστέα ύλη και επομένως οι υποψήφιοι πρέπει να τα αποδείξουν σαν βοηθητικά θεωρήματα πριν τα χρησιμοποιήσουν στις εξετάσεις* ([11], σ.106).

Ενδεικτικό του κλίματος εκείνης της εποχής είναι ότι η παραπάνω «1η γενίκευση Maclaurin» θεωρήθηκε σκόπιμο να ενταχθεί το 1975 ως άσκηση στο σχολικό βιβλίο του Χ. Παπανικολάου *Ευκλείδειος Γεωμετρία*, το οποίο διδάσκονταν στην Γ΄ Γυμνασίου και τις Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξεις Γυμνασίου Θεωρητικής (!) Κατεύθυνσης (σ.229, άσκηση 579). Η άσκηση αυτή περιλαμβάνονταν και στις επόμενες εκδόσεις, μέχρι τις αρχές του 1980. Για τη λύση της δινόταν υπόδειξη να χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη άσκηση (578), που αποτελούσε εφαρμογή του 1ου θεωρήματος του Πτολεμαίου.

Β΄.

578. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Κύκλος διερχόμενος διά τῆς κορυφῆς Α τέμνει τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΔ εἰς τά σημεῖα Ε καί Η ἀντιστοίχως καί τήν διαγώνιον ΑΓ εἰς τό σημεῖον Ζ. Δείξατε ὅτι εἶναι :

$$AB \cdot AE + A\Delta \cdot AH = A\Gamma \cdot AZ$$

579. Ἐπί τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας $x\widehat{A}y$ λαμβάνομεν δύο τμήματα ΑΜ καί ΑΝ συνδεόμενα διά τῆς σχέσεως $\alpha \,.\, AM + \beta \,.\, AN = \lambda^2$, ὅπου α, β καί λ δοθέντα τμήματα. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος, ὁ περιγεγραμμένος περί τό τρίγωνον ΑΜΝ, διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου (Ἴδε ἀσκ. 578).

Η ίδια άσκηση υπάρχει και στο βιβλίο *Θεωρήματα και προβλήματα Γεωμετρίας*. Τόμοι IV-V. Αθήνα, 1974 του Νίκου Κισκύρα, στη σελίδα 452 (ασκ. 1893), με υπόδειξη που παραπέμπει επίσης σε χρήση του 1^{ου} Θεωρήματος του Πτολεμαίου. Κι εδώ ο συγγραφέας δεν κάνει αναφορά στον Maclaurin.

1.893. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΨ καὶ ΑΧ γωνίας ΧΑΨ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Β καὶ Γ, ἀντιστοίχως, ὥστε $\mu(AB)+\nu(A\Gamma)=\lambda^2$, ὅπου μ, ν καὶ λ δοθέντες ἀριθμοί, ἢ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε θέσιν τῶν Β καὶ Γ κατὰ τὴν ὁποίαν πληροῦται ἡ δοθεῖσα σχέσις ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια τοῦ τριγώνου ΒΑΓ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. (Ἀποδεικνύεται ἀπ'εὐθείας δι'ἐφαρμογῆς τῆς Προτάσεως ἀριθ. 745—Βιβλίον Τρίτον, ἢ δι'ἀναγωγῆς εἰς τὴν Πρότασιν ἀριθ. 1.890).

Όπως γίνεται φανερό, τα προηγούμενα αποτελούν ένα κλασικό παράδειγμα για τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική δραστηριότητα που έχει αποκλειστικό αντικείμενο τη θεματολογία των εισαγωγικών εξετάσεων, εκτρέφει και πολλαπλασιάζει την «ασκησεολογία». [6] Ορισμένες βασικές ασκήσεις ανάγονται σε δομικά στοιχεία ενός συστήματος «μεθοδολογικών κανόνων», το οποίο εμπλουτιζόμενο με κατάλληλη ορολογία και πολλά παραδείγματα εφαρμογής, διεκδικεί στη συνέχεια μια υπόσταση ανάλογη με εκείνη της μαθηματικής θεωρίας. Είναι ενδεικτικός ο τρόπος με τον οποίο (βλ. π.χ. το [9] σ.282 ή το [11] σ.106) ένα κλασικό πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής τριγώνου από τρία χαρακτηριστικά στοιχεία του (π.χ. τη γωνία Α, το

---

[6] Από όσο γνωρίζουμε, ο όρος «ασκησεολογία» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Δ. Κάππο, ο οποίος σε μια διάλεξη του στην Ε.Μ.Ε. το 1966 ανέφερε μεταξύ άλλων και τα εξής:

> Αποφοιτών [ο μαθητής] του σχολείου μένει με την εντύπωσιν ότι τα μαθηματικά συνίστανται από την Γεωμετρίαν των αρχαίων Ελλήνων και αυτήν ως την ηρμήνευσαν οι μαθηματικοί της εποχής του Legendre, δηλαδή χωρίς την ακριβολογίαν του Ευκλείδου και του Αρχιμήδους, από την Αριθμητικήν, την Άλγεβραν και την Τριγωνομετρίαν και μία κατά κόρον “ασκησεολογίαν”, την οποίαν επέβαλον εις την Γαλλίαν αι αυστηραί εξετάσεις του baccalaureat, εις δε την χώραν μας αι αυστηραί εισιτήριοι εξετάσεις των ανωτάτων εκπαιδευτικών ιδρυμάτων και κυρίως του Πολυτεχνείου. Αν βραδύτερον ούτος εισέλθει εις το Πανεπιστήμιον ή άλλην ανωτάτην σχολήν και πρόκειται να σπουδάσει επιστήμην, σχέσιν έχουσαν με τα μαθηματικά, διαπιστώνει ότι η μακροχρόνιος απασχόλησίς του με την ασκησεολογίαν εις τίποτε δεν τον ωφέλησεν.
> Τουναντίον διαπιστώνει ότι στερείται βασικών γνώσεων, αι οποίαι θα τον εβοήθουν να κατανοήσει τον τρόπον της μαθηματικής σκέψεως των συγχρόνων μαθηματικών. (*Διαλέξεις οργανωθείσαι υπό της Ε.Μ.Ε. και γενόμεναι κατά τα έτη 1965-1966*. Αθήναι, 1967, σ.4).

άθροισμα πλευρών β + γ και το ύψος $υ_α$) «παραμετρικοποιείται» και εκφράζεται στη μορφή τριάδων της μορφής (Α, β + γ, x) ή (Α, β – γ, x).
Ο εύθραυστος χαρακτήρας της «μεθοδολογικής γνώσης» στην περίπτωση που εξετάζουμε («μεθοδολογία Maclaurin») αποδεικνύεται από το γεγονός ότι αγνοήθηκε από τους περισσότερους συγγραφείς βιβλίων Ευκλείδειας Γεωμετρίας που εκδόθηκαν (ή επανεκδόθηκαν) στην Ελλάδα τα επόμενα χρόνια.[7] Για να εκτιμήσουμε όμως αντικειμενικά τη σημασία της, θα πρέπει να απαντήσουμε το ακόλουθο ερώτημα:

> Πόσο αποτελεσματική ήταν η συγκεκριμένη «μεθοδολογία» για την αντιμετώπιση των προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών;

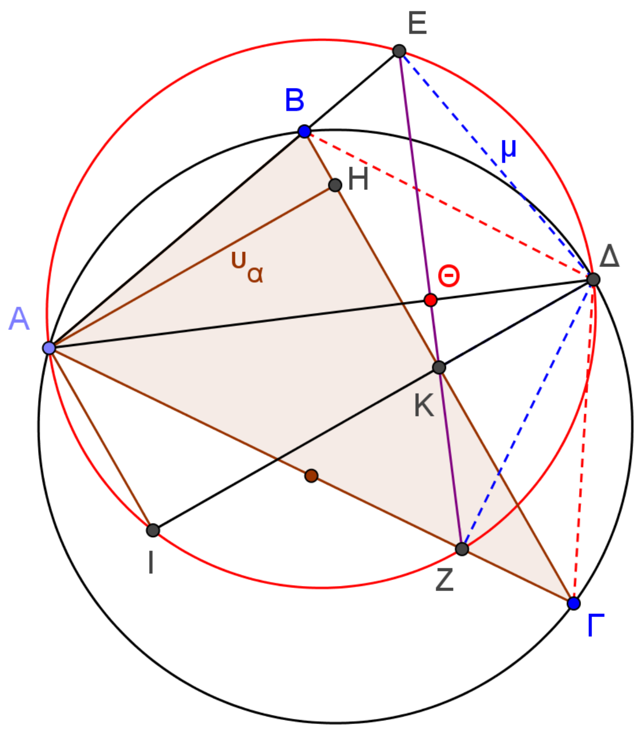
3. Η εφαρμογή της «μεθοδολογίας Maclaurin» σε ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής

Για να αξιολογήσουμε την αποτελεσματικότητα της «μεθοδολογίας Maclaurin» επιλέξαμε ένα από προβλήματα εφαρμογής που χρησιμοποίησαν οι δημιουργοί της, και συγκρίναμε την επίλυσή του σε διάφορα βιβλία πριν και μετά την εμφάνιση της συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Το πρόβλημα αυτό είναι μια αρκετά δύσκολη (ακόμη και για τα δεδομένα εκείνης της εποχής) κατασκευή ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν δίνονται η γωνία Α = ω, το άθροισμα β + γ = λ και το ύψος $υ_α$.
Το συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχει σε αρκετά βιβλία, αλλά θεωρούμε ότι η πληρέστερη διαπραγμάτευση – με πλήρη ανάλυση, σύνθεση και διερεύνηση – είναι εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο του Ι. Πανάκη *Γεωμετρία του Τριγώνου – Γεωμετρικαί Κατασκευαί*. Τόμος Γ΄ (Εκδόσεις Gutenberg, 1970, σ.162).

Τα διαδοχικά βήματα της ανάλυσης είναι τα εξής:
Αν Δ το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας Α με τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ, τότε είναι ΔΒ = ΔΓ   (1)
Αν ΔΕ ⊥ ΑΒ, ΔΖ ⊥ ΑΓ και ΔΚ ⊥ ΒΓ, τότε:
Τα ίχνη Ε, Ζ, Κ των καθέτων είναι συνευθειακά (ευθεία Simson)
ΔΕ = ΔΖ   (2)
Λόγω των (1) και (2) τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ είναι ίσα και άρα ισχύει ΒΕ = ΓΖ   (3)
Η ΑΒ + ΑΓ = λ γράφεται ΑΕ – ΒΕ + ΑΖ + ΓΖ = λ και λόγω της (3) προκύπτει ότι είναι ΑΕ + ΑΖ = λ   (4)
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα και άρα ΑΕ = ΑΖ   (5)
Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΕ = ΑΖ = λ/2. Άρα κατασκευάζεται από τη δεδομένη γωνία Α και το δεδομένο μήκος λ και το σημείο Δ προσδιορίζεται ως τομή των καθέτων που άγονται στις πλευρές της γωνίας Α στα σημεία της Ε και Ζ. [8]

[7] Θα πρέπει βέβαια να έχουμε υπόψη ότι από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 άρχισε η ραγδαία υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, γεγονός που συνέβαλε να περιέλθουν σε αφάνεια ορισμένες πολύ σημαντικές εργασίες Ελλήνων εκπαιδευτικών (π.χ. *Το βιβλίο της μεθοδολογίας των γεωμετρικών τόπων* του Γ. Ντάνη, Εκδόσεις Gutenberg, 1977).
[8] Ο Πανάκης αναφέρει στο σημείο αυτό ότι τα παραπάνω εξασφαλίζουν τη σταθερότητα του σημείου Δ, χωρίς όμως να κάνει οποιαδήποτε νύξη περί «θεωρήματος Maclaurin» ή «μεθοδολογίας Maclaurin» κ.λπ.

Αν ΑΗ ⊥ ΒΓ και ΑΙ ⊥ ΔΚ, τότε ΚΙ = ΑΗ = $υ_α$ (6)
Αν Θ είναι το σημείο τομής της ΑΔ με την ΕΖ, τότε το τετράπλευρο ΑΙΚΘ είναι εγγράψιμο και ισχύει ΔΚ·ΔΙ = ΔΘ·ΔΑ (7)



Λόγω της (6) και του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ η (7) γράφεται
$ΔΚ·(ΔΚ + ΚΙ) = ΔΕ^2 \Leftrightarrow ΔΚ^2 + υ_α·ΔΚ - μ^2 = 0$ (8) (ΔΕ = σταθερό = μ).

Από την (8) προσδιορίζεται το μήκος $ΔΚ = \dfrac{-υ_α + \sqrt{{υ_α}^2 + 4μ^2}}{2}$.

Η σύνθεση που ακολουθεί περιλαμβάνει τα εξής βήματα:
Στις πλευρές της δοθείσας γωνίας Α προσδιορίζονται τα σημεία Ε, Ζ με ΑΕ = ΑΖ = λ/2, κατασκευάζεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΖ και προσδιορίζεται το σημείο Δ.
Κατασκευάζεται ο κύκλος με κέντρο Δ και ακτίνα ΔΚ, που τέμνει την ΕΖ στο σημείο Κ και προσδιορίζεται το σημείο τομής της ΔΚ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΕΖ.
Κατασκευάζεται η παράλληλη από το Κ προς την ΑΙ που τέμνει τις πλευρές της γωνίας Α στα σημεία Β και Γ.
Το πρόβλημα έχει λύση όταν ο κύκλος (Δ, ΔΚ) τέμνει την ΕΖ, δηλαδή όταν η απόσταση ΔΘ του Δ από την ΕΖ είναι μικρότερη ή ίση της ακτίνας ΔΚ. Από τη σχέση ΔΘ ≤ ΔΚ προκύπτει ότι τα δεδομένα του προβλήματος πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $2υ_α \le λ·συν(Α/2)$.
Η επίλυση του προβλήματος σε άλλα βιβλία εκείνης της εποχής στηρίζεται στην ίδια κεντρική ιδέα αλλά η διαπραγμάτευση είναι πολύ πιο συνοπτική, ουσιαστικά γίνεται μόνο η σύνθεση και απουσιάζει η διερεύνηση.

Είναι χαρακτηριστικό ότι το ίδιο πρόβλημα προτείνεται προς λύση στο βιβλίο του Ταβανλή ([12], σ.507) στο πλαίσιο της ενότητας «Κατασκευαί τριγώνων δια την λύσιν των οποίων είναι απαραίτητος η θεώρησις του σημείου του Mac Laurin»[9], ενώ στο βιβλίο του Δημητρίου ([11], σ.113) επιλύεται (μαζί με άλλα) ως παράδειγμα εφαρμογής της «μεθοδολογίας» στο πλαίσιο της ενότητας «Σημεία Maclaurin». Η επίλυση συνοψίζεται σε μια υπόδειξη που αρχίζει ως εξής:

> Τοποθετείτε στο επίπεδο γωνία xAy = ω και βρίσκετε μετά το σταθερό σημείο Maclaurin, που αντιστοιχεί στο δοσμένο άθροισμα λ.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνονται συνοπτικά τα βήματα της μεθόδου του Πανάκη (ευθεία Simson, δημιουργία εγγράψιμου τετραπλεύρου και αξιοποίηση της αντίστοιχης μετρικής σχέσης που αναγάγει το πρόβλημα στην επίλυση μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού). Είναι όμως προφανές ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα η «μεθοδολογία Maclaurin» δεν συνεισφέρει τίποτε περισσότερο από μία μικρή συντόμευση της ανάλυσης (αμφισβητούμενης μάλιστα χρησιμότητας, αν λάβουμε υπόψη ότι στις εξετάσεις θα έπρεπε να αποδειχθεί και το αντίστοιχο θεώρημα!). Οπότε ταιριάζει εδώ η αρχαία παροιμία «Ὤδινεν ὄρος καὶ ἔτεκεν μῦν».

Μερικά συμπεράσματα

Τα στοιχεία που έχουμε παραθέσει οδηγούν αρχικά στο συμπέρασμα ότι η επωνυμία «θεώρημα του Maclaurin» για την άσκηση 807 της *Θεωρητικής Γεωμετρίας* του Τόγκα (1950) αποτελούσε μια μεμονωμένη περίπτωση, καθώς δεν υιοθετήθηκε από όσους έγραψαν ή μετέφρασαν βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας τα αμέσως επόμενα χρόνια.

Η μαζική σύνδεση της άσκησης με το όνομα του Colin Maclaurin έγινε μάλλον απροσδόκητα στις αρχές της δεκαετίας του 1970, σε ορισμένα βιβλία που προωθούσαν συστηματικά την ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στα βιβλία αυτά οι όροι «θεώρημα Maclaurin», «σημείο Maclaurin» και «σχέσεις Maclaurin» χρησιμοποιούνται ως δομικά στοιχεία μιας εκτεταμένης «μεθοδολογίας» για την αντιμετώπιση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.

Κανένας από τους συγγραφείς των βιβλίων που εισάγουν και χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη ορολογία/μεθοδολογία δεν αιτιολογεί βιβλιογραφικά τη σχέση του Maclaurin με τις αντίστοιχες προτάσεις. Θα μπορούσαν π.χ. να κάνουν παραπομπή σε κάποιο από τα έργα της ξενόγλωσσης βιβλιογραφίας που παραθέτουν (βλ. π.χ. στο [19], σ. 4 και στο [11], σ.314) ή έστω στη *Θεωρητική Γεωμετρία* του Τόγκα που χρησιμοποιούσε την επωνυμία «Θεώρημα του Maclaurin» από τις αρχές της δεκαετίας του 1950. Θεωρούμε ότι αυτή η «σιγή» των συγγραφέων αποτελεί έμμεση ομολογία ότι δεν υπήρχε αντίστοιχη ορολογία και μεθοδολογία στη ξενόγλωσση βιβλιογραφία που χρησιμοποιούσαν.

Η «μεθοδολογία Maclaurin» υπήρξε, σύμφωνα με όλες τις ενδείξεις, μια Ελληνική επινόηση που αναπτύχθηκε μέσα στο πλαίσιο των εισαγωγικών εξετάσεων για τα Α.Ε.Ι., την περίοδο που η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελούσε εξεταζόμενο μάθημα σε περιζήτητες σχολές. Έτσι μοιραία τέθηκε στο περιθώριο μετά τον εξοστρακισμό του

[9] Η υπογράμμιση δική μας.

μαθήματος από τις εξετάσεις και την πλήρη υποβάθμιση της διδασκαλίας του. Αν είχε αναπτυχθεί σε ένα διαφορετικό πλαίσιο μαθηματικής δραστηριότητας, πιθανόν να οδηγούσε σε κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα που δεν περιορίζονται στα στενά πλαίσια της ασκησιολογίας. [10]

Βασικό χαρακτηριστικό αυτής της «μεθοδολογίας» ήταν ότι διεύρυνε σημαντικά το απόθεμα της κλασικής ασκησιολογίας των γεωμετρικών τόπων και κατασκευών, καθώς δημιουργούσε νέες κατηγορίες και ομαδοποιήσεις. Οι όποιοι συνειρμοί με τις πρόσφατες ομαδοποιήσεις ασκήσεων για τα υπαρξιακά θεωρήματα και τη συνάρτηση-ολοκλήρωμα της σχολικής Ανάλυσης ή για του μιγαδικούς αριθμούς (που οδήγησαν τελικά στον εξοστρακισμό τους από την εξεταστέα ύλη), επαφίενται στην κρίση του αναγνώστη …

Αύγουστος 2023

Σημείωση: Οι συγγραφείς αυτής της εργασίας αναγνωρίζουν με ιδιαίτερη χαρά τη σημαντική βοήθεια που προσέφερε στην ολοκλήρωσή της το πλούσιο υλικό της ιστοσελίδας του Τάκη Χρονόπουλου «Για τους ρομαντικούς της γεωμετρίας» (https://parmenides52.blogspot.com/). Το υλικό αυτό συνιστά πολύτιμο εργαλείο για όσους ασχολούνται με την ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

[10] Η Ευκλείδεια Γεωμετρία καλλιεργείται σήμερα σε υψηλό επίπεδο στα λεγόμενα «Διαγωνιστικά Μαθηματικά», και από αυτή την άποψη είναι σημαντική η πρωτοβουλία του Σ. Λουρίδα να επαναφέρει στο προσκήνιο τη «μεθοδολογία Maclaurin» μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο. Εκτός από το σύνδεσμο που αναφέραμε στην εισαγωγή, βλ. και την εργασία του «Μια Γεωμετρική αναφορά (Γενίκευση του Θεωρήματος του Mac Laurin», που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Απολλώνιος* του Παραρτήματος Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. (τεύχος 5, 2007). Επίσης, η εργασία του Κώστα Δόρτσιου «Ο κανόνας, ο διαβήτης, και το εικονικό περιβάλλον των σύγχρονων λογισμικών», *Πρακτικά 27ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.528-539. Ε.Μ.Ε., Χαλκίδα, 2010, είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα αξιοποίησης λογισμικού δυναμικής γεωμετρία ώστε να διαπιστωθεί ευρετικά ότι οι περιγραμμένοι κύκλοι όλων των τριγώνων με δεδομένη γωνία και σταθερό άθροισμα των πλευρών που την περιέχουν, διέρχονται από ένα σταθερό σημείο της διχοτόμου της γωνίας. Τέλος, ο Χρήστος Μπαλόγλου, στο βιβλίο του «Σκόρπιες Σταγόνες Γεωμετρίας», Θεσσαλονίκη, 2001, (σελ. 117) δίνει ένα εξαιρετικό παράδειγμα διερευνητικής προέκτασης του θέματος, απαντώντας (αρνητικά) στο ερώτημα αν η πρόταση Μ1 ισχύει και στον τρισδιάστατο χώρο.