ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ *γ΄*, Τεύχος 9?, 2023

Μια εικόνα ίσον χίλιες … σκέψεις; Ο ρόλος της οπτικοποίησης στην επιστήμη των μαθηματικών

Κυριαζής Χρήστος
2ο Γενικό Λύκειο Αγίας Βαρβάρας
chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών
lprotopapas@math.ntua.gr

Σαμπάνη Μαρία
Γυμνάσιο και Λυκειακές τάξεις Αρμενίου
masampani@uth.gr

Περίληψη

Η ενασχόληση με τα Μαθηματικά πολλές φορές εμπεριέχει τη χρήση της φαντασίας και την κατασκευή μιας διαισθητικής εικόνας ενός μαθηματικού προβλήματος. Η οπτικοποίηση αφορά την κατανόηση του περιεχόμενου ενός προβλήματος με την αποτελεσματική χρήση των εικόνων για την επίτευξη της γνώσης, αλλά και της ανακάλυψης. Ωστόσο, αυτή η απεικόνιση μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση και μαθηματικές παρεξηγήσεις. Ο σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσουμε τη μαθηματική οπτικοποίηση μέσα από χρήσιμα και διδακτικά παραδείγματα εφαρμογών.

Λέξεις κλειδιά: Οπτικοποίηση, Διδακτική προσέγγιση, Μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τους Hilbert και Cohn-Vossen (1983) στα Μαθηματικά βρίσκουμε δύο τάσεις: την τάση προς αφαίρεση και την τάση προς τη διαισθητική κατανόηση. Η τάση προς αφαίρεση επιδιώκει να αποκρυσταλλώσει τις λογικές σχέσεις με συστηματικό και τακτικό τρόπο, ενώ η τάση προς τη διαισθητική κατανόηση ενθαρρύνει μια πιο άμεση κατανόηση του αντικειμένου που μελετά κανείς. Ένας τρόπος για να επιτευχθεί η διαισθητική κατανόηση είναι η οπτικοποίηση.

Χρησιμοποιούμε τον όρο οπτικοποίηση για την περιγραφή της διαδικασίας παραγωγής ή χρήσης γεωμετρικών ή γραφικών αναπαραστάσεων μαθηματικών ιδεών, αντικειμένων, θεωρημάτων ή προβλημάτων, είτε σχεδιασμένων με το χέρι, είτε με ειδικό πρόγραμμα στον υπολογιστή. Ένας από τους σύγχρονους ορισμούς της οπτικοποίησης είναι ο ακόλουθος:

Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και του αναστοχασμού πάνω σε σχέδια, εικόνες και διαγράμματα, στο μυαλό, στο χαρτί ή σε δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα, με σκοπό την απεικόνιση και την επικοινωνία πληροφοριών, την σκέψη πάνω σε νέες ιδέες, την ανάπτυξή τους και την πρόοδο της κατανόησης (Zimmerman & Cunningham, 1991).

Σύμφωνα με τον Arcavi (2003), η σημασία της οπτικοποίησης για τη διδασκαλία των μαθηματικών έχει τις ακόλουθες πτυχές:

- Οι οπτικές αναπαραστάσεις είναι σημαντικές για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και την ανάπτυξη των ικανοτήτων και των δεξιοτήτων των μαθητών στη μαθηματική επικοινωνία.
- Η οπτικοποίηση μπορεί να δώσει σαφέστερο νόημα και σημασία στις μαθηματικές έννοιες και τις συνδέσεις μεταξύ τους και συμβάλλει έτσι στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης.
- Η οπτικοποίηση μπορεί να είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την έρευνα και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Η οπτικοποίηση ωστόσο δεν είναι μια καινούργια έννοια. Σύμφωνα με τον Ivan Rival (Rival, 1987):

> Τα γραφήματα είναι τόσο παλιά όσο και τα ίδια τα Μαθηματικά.
> Η Γεωμετρία πάντα βασίζονταν κυρίως στα σχήματα και για κάποιο χρονικό διάστημα, το ίδιο και άλλοι κλάδοι των Μαθηματικών. (σελ. 3)

Οι Davis και Anderson (1979) παρατηρούν ότι τον τελευταίο ενάμιση αιώνα, υπάρχει μια σταθερή και προοδευτική υποβάθμιση των γεωμετρικών και κιναισθητικών στοιχείων στη μαθηματική διδασκαλία και έρευνα, με συνέπεια να έχει επικρατήσει ο φορμαλισμός. Η έρευνα πάνω στην οπτικοποίηση εντάθηκε τη δεκαετία του 1990 (Presmeg, 2006). Η έννοια της οπτικής σκέψης εισήχθη από τον Arnheim (1991), ορίζοντάς την σαν σκέψη μέσω οπτικών λειτουργιών. Ο ρόλος της οπτικοποίησης στην εκμάθηση των μαθηματικών έχει γίνει αντικείμενο πολλών ερευνών (Bishop, 1989· Eisenberg & Dreyfus, 1986· English, 1997· Presmeg, 1992· Stylianou & Silver, 2004).

Διαχρονικά, πολλοί επιφανείς επιστήμονες ασχολήθηκαν με την οπτικοποίηση των Μαθηματικών και τόνισαν την σπουδαιότητα της. Ο Pólya (Pólya, 1971) στις «εντολές» του προς τον/την εκπαιδευτικό προέτρεπε: «Άφηνέ τους να κάνουν νοερές εκτιμήσεις» (σελ. 20). Μέσα στις προτάσεις του, στη δεύτερη διδακτική του εντολή, έλεγε: «Ζωγράφισε ένα σχήμα» (σελ. 20).

Ο Tesla είχε πει ότι μπορεί να ευχαριστήσει την οπτικοποίηση για όλα όσα έχει δημιουργήσει, αφού τα γεγονότα της ζωής του μπροστά στα μάτια του είναι αληθινά, ορατά όπως κάθε φαινόμενο και αντικείμενο. Στα νιάτα του δεν ήξερε τι ήταν πραγματικά η οπτικοποίηση, αλλά αργότερα το κατάλαβε και τη χρησιμοποίησε αντλώντας δύναμη.

Ο σημαντικός ρόλος της οπτικοποίησης αναδεικνύεται και από το γεγονός ότι ο Euler έχοντας χάσει την όρασή του, εξακολούθησε να είναι δημιουργικός δημοσιεύοντας 355 εργασίες, χρησιμοποιώντας την οπτική του φαντασία, αλλά και την εξαιρετική μνήμη του (Draaisma, 2002). Αναφορές στον Einstein και στον Poincaré έκανε ο Hadamard (1995) για να τονίσει τη σημασία της οπτικοποίησης για την επίλυση προβλημάτων και παράλληλα τόνισε την αναγκαιότητα της αριθμητικοποίησης των προβλημάτων, δηλαδή της Μαθηματικής τους απόδειξης με χρήση θεωρημάτων, πορισμάτων, λημμάτων. Ενδεικτικό παράδειγμα που αναδεικνύει την σημασία της οπτικοποίησης είναι το ακόλουθο πραγματικό περιστατικό. Κάποτε ο Norbert Wiener, ξεχωριστός Μαθηματικός του προηγούμενου αιώνα, κλήθηκε να δώσει μια διάλεξη ενώπιον πολυπληθούς κοινού στο πολυτεχνείο της Μασαχουσέτης (M.I.T.). Εκεί θα αποδείκνυε ένα δύσκολο θεώρημα. Ενώ η διάλεξη είχε ξεκινήσει και ο πίνακας είχε γεμίσει με σημειώσεις και τύπους, ο Wiener φαίνεται να σταματά. Ένα λεπτό, δύο λεπτά, … Το κοινό αρχίζει να αναρωτιέται. Εκείνος έδειχνε σαστισμένος και κοιτούσε διαρκώς όλα όσα

είχαν γραφτεί μέχρι εκείνη τη στιγμή στον πίνακα. Ξαφνικά μεταφέρθηκε στην άκρη του πίνακα και άρχισε να κάνει διάφορα ακατανόητα σχήματα. Το πρόσωπο του μετά από λίγο έλαμψε και πηγαίνοντας στο σημείο που είχε σταματήσει, συνέχισε και έφερε σε πέρας την απόδειξη (Guzmán, 2010).

Οι επιστήμες απολαμβάνουν την αναγέννηση του ενδιαφέροντος για την οπτικοποίηση, η οποία οδηγείται από τις τεχνολογικές εξελίξεις. Η εισαγωγή διδακτικών εργαλείων, όπως οι υπολογιστές, οι αριθμομηχανές, τα tablet κ.ά. φέρνουν τα μαθηματικά πιο κοντά στους μαθητές και τις μαθήτριες, βελτιώνοντας την κατανόηση, την ανακάλυψη και την υιοθέτηση μαθηματικών εννοιών. Ειδικότερα, η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών βοήθησε στην αναγέννηση της μαθηματικής οπτικοποίησης, καθώς με δυναμικά προγράμματα παριστάνονται γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, γεωμετρικά σχήματα δύο ή τριών διαστάσεων και επιφάνειες, οπότε αναδεικνύονται και οι ιδιότητές τους. Οι σύγχρονοι υπολογιστές και τα διαθέσιμα μαθηματικά λογισμικά αυξάνουν την ικανότητα χρήσης και ανάλυσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (Yerushalmy & Shternberg, 2001) και μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές και τις μαθήτριες να οικοδομήσουν μια ενδελεχή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ιδεών (Kaput, 1992), κάτι που ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση και είναι πολύ σημαντικό για τη διδασκαλία των μαθηματικών (Lopez Jr., 2001).

Δυστυχώς, οι καθηγητές και οι καθηγήτριες μαθηματικών εστιάζουν παραδοσιακά τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων και στην αναλυτική επεξεργασία του περιεχομένου, ενώ οι γραφικές, οι γεωμετρικές και οι διαισθητικές αναπαραστάσεις υποβαθμίζονται (Hitt, 2002). Οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν αποκτούν πλήρη αλλά κατακερματισμένη γνώση, δεν είναι σε θέση να ερμηνεύουν διαφορετικές αναπαραστάσεις, ούτε έχουν την ικανότητα να μετατρέπουν μια παράσταση σε άλλη (Duval, 2006). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται η χρήση της διαίσθησης, των γραφικών αναπαραστάσεων και των οπτικών προσεγγίσεων για την επίλυση προβλημάτων, αφού οι αλγεβρικές προσεγγίσεις κυριαρχούν (Knuth, 2000). Οι Tiwari et al. (2021) διατυπώνουν ότι οι διδακτικές προσεγγίσεις που βασίζονται στην οπτικοποίηση και τις πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι πιο αποτελεσματικές από τις παραδοσιακές.

Ωστόσο, η οπτικοποίηση πρέπει να συνδέεται με την αριθμητική, αλλά και τη συμβολική οπτική των μαθηματικών για την επίτευξη καλύτερων αποτελεσμάτων (Zimmerman & Cunningham, 1991), αφού δεν σχετίζεται μόνο με το επεξηγηματικό μέρος, αλλά αναγνωρίζεται ως βασικό συστατικό

του συλλογισμού για την επίλυση προβλημάτων και την αποδεικτική διαδικασία (Arcavi, 2003). Στην οπτικοποίηση, οι εικόνες συνδυάζουν πτυχές φυσικής αναπαράστασης με πιο επίσημες μορφές και έτσι αυξάνεται η γνωστική κατανόηση. Η οπτικοποίηση βοηθά στη μείωση της πολυπλοκότητας, αλλά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, διότι σε ορισμένες περιπτώσεις, ο διαισθητικός τρόπος σκέψης είναι δυνατό να μας παραπλανήσει (Vinner, 1997). Η εικόνα που θα δημιουργηθεί από την οπτικοποίηση πρέπει να είναι κατανοητή και «αποκωδικοποιημένη» με τον σωστό τρόπο, αλλιώς η εικόνα δεν αξίζει τίποτα (Takachi & Radovanovic, 2009). Ο Tall (1991) επισημαίνει ότι η χρήση εικόνων στην επίλυση προβλημάτων χωρίς να τα υποδουλώνει δίνει στον μαθηματικό ένα πλεονέκτημα, αλλά μπορεί να προκαλέσει πολλές δυσκολίες στον μαθητή. Μία από τις δυνατότητες του πώς να εξασκηθεί και να ενθαρρυνθεί η χρήση της οπτικοποίησης από τους μαθητές και τις μαθήτριες είναι η μέθοδος απόδειξης χωρίς λόγια.

Η χρήση οπτικοποιημένων τακτικών διδασκαλίας στην μαθηματική εκπαίδευση ενέχει δυσκολίες που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus (1991) τρεις είναι οι κύριες κατηγορίες: πολιτιστικές, γνωστικές, και κοινωνιολογικές δυσκολίες. Οι πολιτιστικές δυσκολίες αναφέρονται στις πεποιθήσεις και τις αξίες που δεν αλλάζουν σχετικά με το τι θα κάνουν τα μαθηματικά, τι είναι αποδεκτό και τι όχι. Χαρακτηριστικές εκφράσεις όπως αυτό δεν είναι μαθηματικά (Sfard, 1998) είναι πιθανό να διεισδύσουν στην τάξη, με αποτέλεσμα την «υποτίμηση» της αξίας της οπτικοποίησης και κατά συνέπεια της μη χρήσης της εντός της σχολικής τάξης (Presmeg, 1997). Οι γνωστικές δυσκολίες αφορούν κυρίως την ανάγκη μετάφρασης από και προς τις οπτικές αναπαραστάσεις, κάτι το οποίο μπορεί να είναι δύσκολη και επίπονη διαδικασία για τους μαθητές και τις μαθήτριες (Schoenfeld et al., 1993). Οι κοινωνιολογικές δυσκολίες αγγίζουν διάφορα ζητήματα διδασκαλίας (Eisenberg & Dreyfus, 1991. Για παράδειγμα, η γνώση μετασχηματίζεται από τον επιστημονικό χαρακτήρα της σε μορφή κατάλληλη προς διδασκαλία, κάτι το οποίο οδηγεί στην απογύμνωση από τις πλούσιες διασυνδέσεις (Chevallard, 1985).

Η παρούσα εργασία έρχεται να τονίσει την αξία της οπτικοποίησης στα Μαθηματικά, με συγκεκριμένα παραδείγματα που θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία του κυρίως στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στόχος μας είναι η ενεργοποίηση των συναδέλφων προς αυτή τη κατεύθυνση. Για λόγους πληρότητας και δεδομένου ότι είμαστε σε φάση διαμόρφωσης των αναλυτικών προγραμμάτων, αναφέρουμε και παραδείγματα

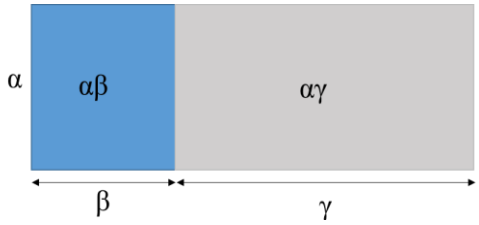
οπτικοποίησης που δεν είναι στη σημερινή διδακτέα ύλη των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η εντατική έρευνα που πραγματοποιείται στο πεδίο της οπτικοποίησης (αλλά και τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα που προκύπτουν) επιβάλλει την ενσωμάτωση της οπτικοποίησης αφενός μεν στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αφετέρου δε στα νέα αναλυτικά προγράμματα με ένα πιο επίσημο και αυστηρό τρόπο.

ΑΡΧΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Στα σχολικά βιβλία συναντούμε χρήσιμα παραδείγματα οπτικοποίησης όπως οι αποδείξεις των αξιοσημείωτων αλγεβρικών ταυτοτήτων (Αργυράκης κ.ά., 2008) ή η απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος (Αργυρόπουλος κ.ά., 2012). Εδώ θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την απόδειξη της απλής επιμεριστικής ιδιότητας για την πρόσθεση

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \qquad \textbf{(1)}$$

και για θετικούς αριθμούς α, β, γ (Σχήμα 1).

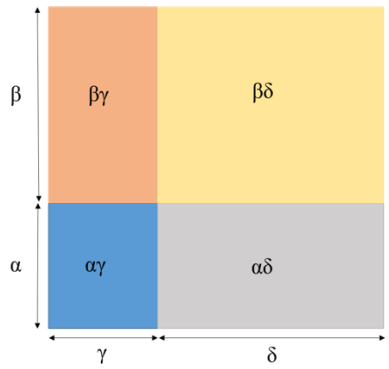


Σχήμα 1. Γεωμετρική απόδειξη της απλής επιμεριστικής ιδιότητας για θετικούς αριθμούς

Επίσης, μπορούμε να παραθέσουμε τη γεωμετρική απόδειξη της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta \qquad \textbf{(2)}$$

για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Σχήμα 2).



Σχήμα 2. Γεωμετρική απόδειξη της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας για θετικούς αριθμούς

ΜΙΑ ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΙΑ ΜΙΚΡΑ ΚΑΙ … ΜΕΓΑΛΑ ΠΑΙΔΙΑ

Δίνουμε ένα χρήσιμο παράδειγμα, το οποίο δεν είναι απλό και η μεταφορά του σε «γεωμετρικό» περιβάλλον σκέψης, με χαρτί και μολύβι, μπορεί να το κάνει πιο απλό και κατανοητό. Αναμφίβολα και οι αλγεβρικές ιδιότητες παίζουν ιδιαίτερο ρόλο, σκεπτόμενοι όμως γεωμετρικά μπορούμε να καταστρώσουμε μια όμορφη στρατηγική επίλυσης.

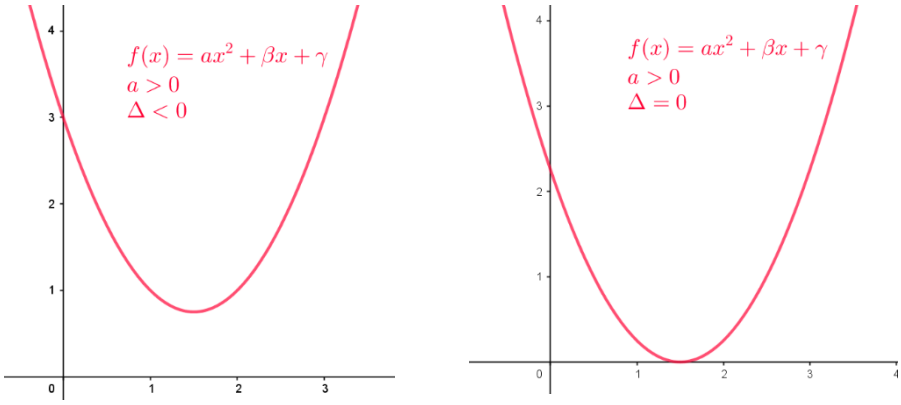
Ζητείται να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ανίσωση

$$x^2 + 3\lambda x + \lambda^2 + 1 < 0 \qquad \textbf{(3)}$$

να είναι αληθής για κάθε $x \in [1,2]$.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3\lambda x + \lambda^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Αφού επιθυμούμε οι τιμές της συνάρτησης f να είναι αρνητικές για κάθε $x \in [1,2]$, αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνον αν οι τιμές της στα 1, 2 αντίστοιχα, περιέχονται μεταξύ των ριζών της. Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε άλλη περίπτωση, λόγω του θετικού συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του τριωνύμου θα είχαμε θετικές ή και μηδενικές τιμές για το τριώνυμο (Σχήμα 3).



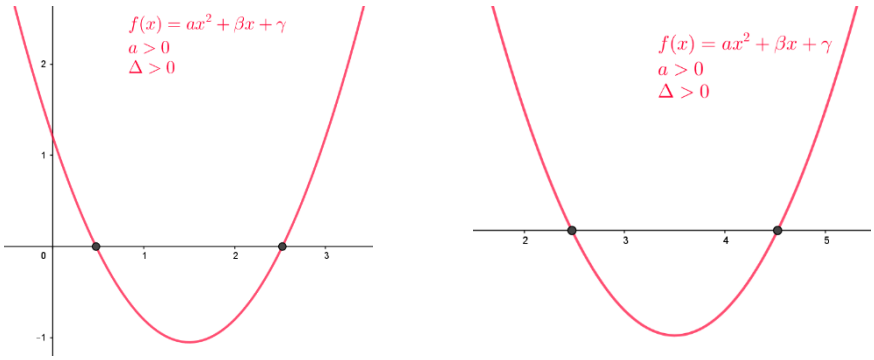
Σχήμα 3. Γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha > 0,\ \Delta \leq 0$

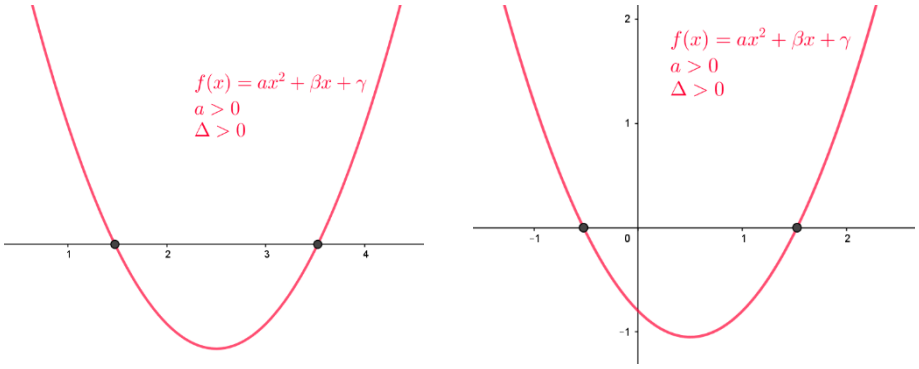
Επομένως, πρέπει να υπάρχουν δύο σημεία μηδενισμού και κατά συνέπεια

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4(\lambda^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \lambda > \frac{2\sqrt{5}}{5}. \qquad \textbf{(4)}$$

Σε αυτή την περίπτωση η γραφική παράσταση της f θα έχει μία από τις μορφές που αναπαρίστανται στο Σχήμα 4.





Σχήμα 4. Γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha > 0,\ \Delta > 0$

Από τη θεωρία του τριωνύμου, και δεδομένου ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι η μονάδα, πρέπει και αρκεί να ισχύουν:

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < \lambda < -1 \qquad \textbf{(5)}$$

και

$$f(2) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow -5 < \lambda < -1. \qquad \textbf{(6)}$$

Από τη συναλήθευση των (4), (5), (6) βρίσκουμε

$$-2 < \lambda < -1. \qquad \textbf{(7)}$$

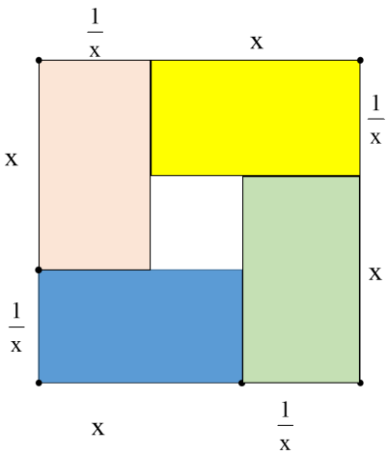
ΆΘΡΟΙΣΜΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΤΟΥ

Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε τώρα στο ερώτημα (Nelsen, 1996, σελ. 72):

«Να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} > 2$ για $x > 1$»

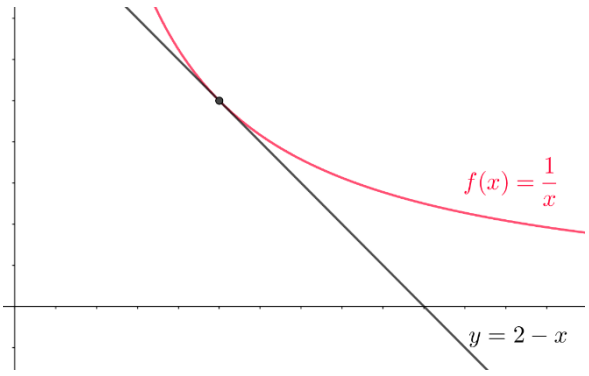
Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς $x + \frac{1}{x}$, όπου $x > 1$ και εσωτερικά του κατασκευάζουμε 4 ίσα ορθογώνια πλευρών $x, \frac{1}{x}$ και κατά συνέπεια εμβαδού ίσου με 1 (Σχήμα 5). Επομένως, το εμβαδό του τετραγώνου είναι μεγαλύτερο, δηλαδή

$$x + \frac{1}{x} > 2. \qquad \textbf{(8)}$$



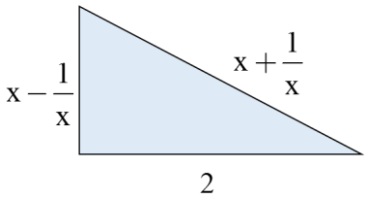
Σχήμα 5. Τετράγωνο πλευράς $x+\frac{1}{x},\ x>1$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$ και την εφαπτομένη της στο $(1,f(1))$ που έχει εξίσωση $y=2-x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, από το οποίο προκύπτει ότι η (8) ισχύει. Εδώ κρύβεται η έννοια της κυρτότητας της συνάρτησης *f*.



Σχήμα 6. Γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ και της ευθείας $y=2-x$

Αλλάζοντας προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $x+\frac{1}{x},\ x>1$ και κάθετες πλευρές $x-\frac{1}{x}$ και 2 (Σχήμα 7). Δεδομένου ότι η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ισχύει και πάλι η (8).

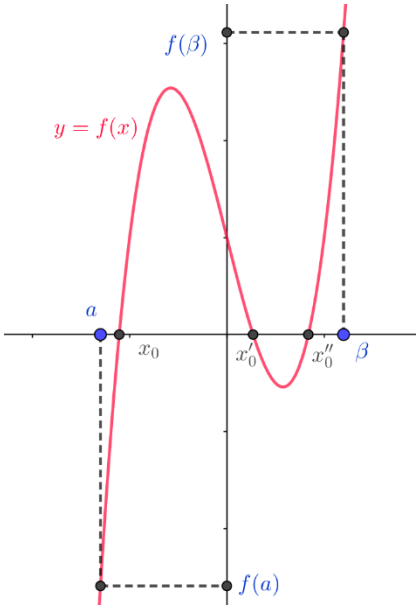


Σχήμα 7. Ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $x-\frac{1}{x},\ x>1$ και 2

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

Στο σχολικό βιβλίο μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) αναφέρεται (χωρίς απόδειξη) το θεώρημα Bolzano και δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το θεώρημα Bolzano για τα πολυώνυμα υπάρχει και στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2020), αλλά είναι εκτός διδακτέας ύλης.

Έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ (Σχήμα 8). Τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Σχήμα 8. Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano

Η ισχύς της γεωμετρικής ερμηνείας του θεωρήματος Bolzano είναι τεράστια, αφού με τον τρόπο αυτό η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών καταλαβαίνει το πραγματικό νόημα του θεωρήματος. Βέβαια, όσο εύκολη είναι η γεωμετρική κατανόηση του, τόσο δύσκολη είναι η μαθηματική του απόδειξη. Οι δύο καταστάσεις είναι διακριτές: μια πρόταση ισχύει κατόπιν της αποδείξεώς της με εργαλεία και προτάσεις των Μαθηματικών, ενώ η γεωμετρική ερμηνεία ή η αναπαράσταση αυτής με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, απλά προάγει την κατανόηση της από μαθητές/μαθήτριες ή φοιτητές/φοιτήτριες.

Βέβαια όλα τα παραπάνω ισχύουν ξεκάθαρα στα σχολικά πλαίσια εκεί που τα βαθύτερα μονοπάτια της Ανάλυσης και γενικότερα των Μαθηματικών δεν είναι γνωστά. Εκεί η οπτικοποίηση της κατάστασης που περιγράφει το θεώρημα Bolzano είναι μέσα στα πλαίσια της ανακάλυψης που πάντα είναι ζητούμενο στα Μαθηματικά και στην επίλυση προβλημάτων (Pólya, 2001).

Όμως υπάρχει και η περίπτωση, η εμβάθυνση στο θεώρημα Bolzano να μη μπορεί να οπτικοποιηθεί από τον ανθρώπινο νου. Για παράδειγμα η συνάρτηση Weierstrass (η οποία είναι παντού συνεχής πουθενά παραγωγίσιμη) δεν έχει προσιτή γραφική παράσταση για το ανθρώπινο μυαλό και δεδομένου ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση (Giaquinto, 2007).

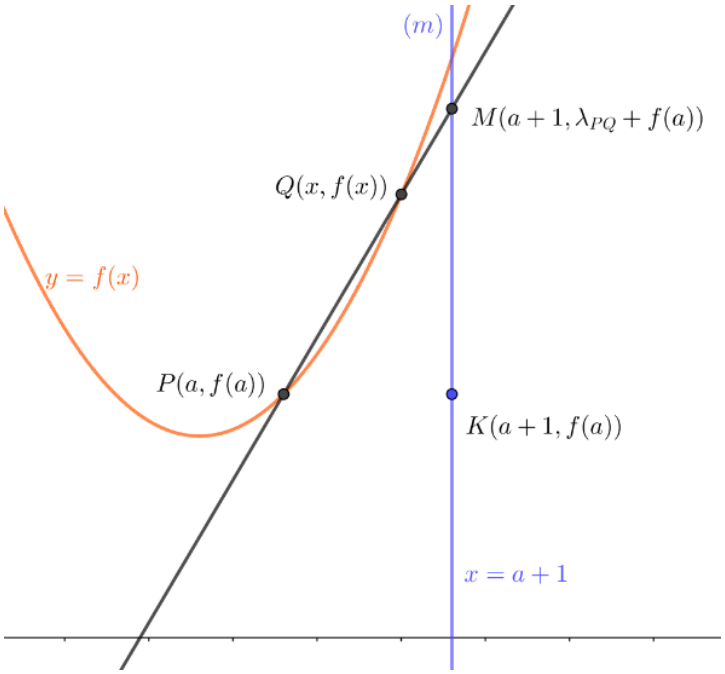
Το καλύτερο που μπορούμε να ισχυριστούμε είναι πως η οπτικοποίηση σε αυτό το θεώρημα είναι ένα καλό ερέθισμα για να χρησιμοποιήσουμε την αυστηρή μαθηματική οδό για να το τεκμηριώσουμε (Brown, 1997).

ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Η πιο κοινή οπτικοποίηση της έννοιας της παραγώγου μιας συνάρτησης περιέχεται και στο βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Θα παραθέσουμε και μια άλλη εικόνα της παραγώγου, εξίσου εύχρηστη και διδακτική. Έστω η συνάρτηση f και δύο σημεία της γραφικής της παράστασης: ένα σταθερό σημείο $P(\alpha, f(\alpha)), \alpha \in D_f$ και ένα μεταβλητό σημείο $Q(x, f(x)), \mathrm{x} \in D_f$. Επιπλέον, θεωρούμε ως κατακόρυφο άξονα, την ευθεία με εξίσωση $x = \alpha + 1$, με αρχή του το σημείο $K(\alpha + 1, f(\alpha))$ ο οποίος έχει την ίδια διαβάθμιση με τους άξονες $x'x$, $y'y$. Ο άξονας αυτός ονομάζεται άξονας m των συντελεστών διεύθυνσης (Σχήμα 9).

Έτσι κάθε φορά που προεκτείνουμε την τέμνουσα PQ, τότε αυτή τέμνει τον άξονα m στο σημείο $M(\alpha + 1, \lambda_{PQ} + f(\alpha))$, όπου λ_{PQ} είναι οι συντελεστής

διεύθυνσης της ευθείας PQ. Σύμφωνα λοιπόν με την κατασκευή μας έχουμε ότι $\lambda_{PQ} = MK$ (Σχήμα 9).



Σχήμα 9. Άξονας m των συντελεστών διεύθυνσης

Όσο μετακινούμε το Q προς το P οι τέμνουσες φαίνεται να συγκλίνουν προς την εφαπτομένη και οι αντίστοιχοι συντελεστές διεύθυνσης συγκλίνουν σε εκείνον της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο P (Nelsen, 2015). Κάπου εδώ είναι κρυμμένο και το θεώρημα Darboux, αφού είναι ξεκάθαρο ότι η παράγωγος λαμβάνει όλες τις τιμές σε ένα διάστημα κι ας μην είναι συνεχής συνάρτηση.

Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ NAPIER

Στη σελίδα 131 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) ζητείται να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln \alpha}{b - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \text{ όταν } 0 < \alpha < b, \qquad \textbf{(9)}$$

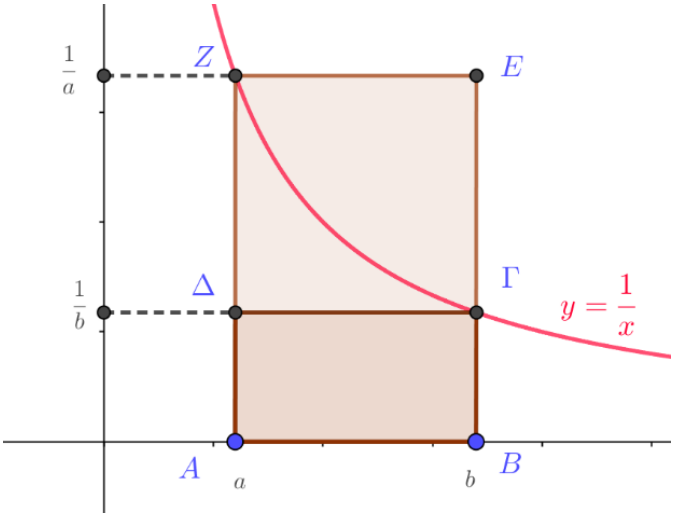
με χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής. Αυτή είναι η γνωστή ανισότητα Napier (Nelsen, 2015), της οποίας η απόδειξη μπορεί να γίνει με όμορφο και διδακτικό τρόπο με τη χρήση εμβαδών.

Η (9) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1}{b}(b-\alpha) < lnb - ln\alpha < \frac{1}{\alpha}(b-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b}(b-\alpha) < \int_{\alpha}^{b} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{\alpha}(b-\alpha). \qquad \textbf{(10)}$$

Αν κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ (Σχήμα 10) έχουμε άμεση την οπτικοποίηση αυτού που θέλουμε να αποδείξουμε.



Σχήμα 10. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$

Τα εμπλεκόμενα εμβαδά είναι του ορθογωνίου ABEZ με βάση b – α και ύψος $\frac{1}{\alpha}$, του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με βάση b – α και ύψος $\frac{1}{b}$, καθώς και του εμβαδού του μέρους του επιπέδου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = \alpha$, $x = b$, δηλαδή ισχύει

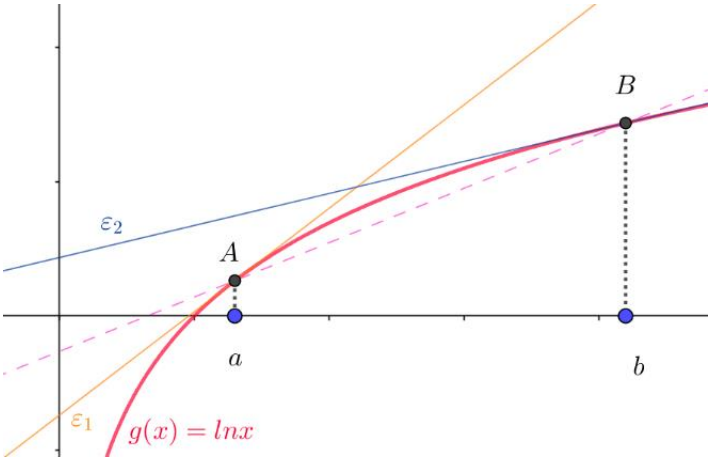
$$(ABΓΔ) < \int_{\alpha}^{b} \frac{1}{x}dx < (ABEZ) \qquad \textbf{(11)}$$

κάτι που αποδεικνύει τη σχέση (10).

Αλλιώς, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με $g(x) = ln\,x\,,\ x \in (0, +\infty)$, η σχέση (9) γίνεται

$$g'(b) < \lambda_{AB} < g'(\alpha), \qquad \textbf{(12)}$$

η οποία ισχύει (Σχήμα 11), αφού η κλίση της εφαπτομένης ε_2 στο $B(b, g(b))$ είναι μικρότερη από την κλίση της ευθείας ΑΒ και μικρότερη από την κλίση της εφαπτομένης ε_1 στο $A(\alpha, g(\alpha))$. Η ιδέα αυτή κρύβει την ιδιότητα που έχει η g να είναι κοίλη συνάρτηση (Nelsen, 1996).



Σχήμα 11. Η ανισότητα Napier

ΈΝΑΣ ΧΡΗΣΙΜΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Στις γενικές ασκήσεις του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) συναντούμε την πρώτη άσκηση, όπου με χρήση της αντικατάστασης $u = \pi - x$ ζητείται να αποδειχθεί για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0, \pi]$ ότι

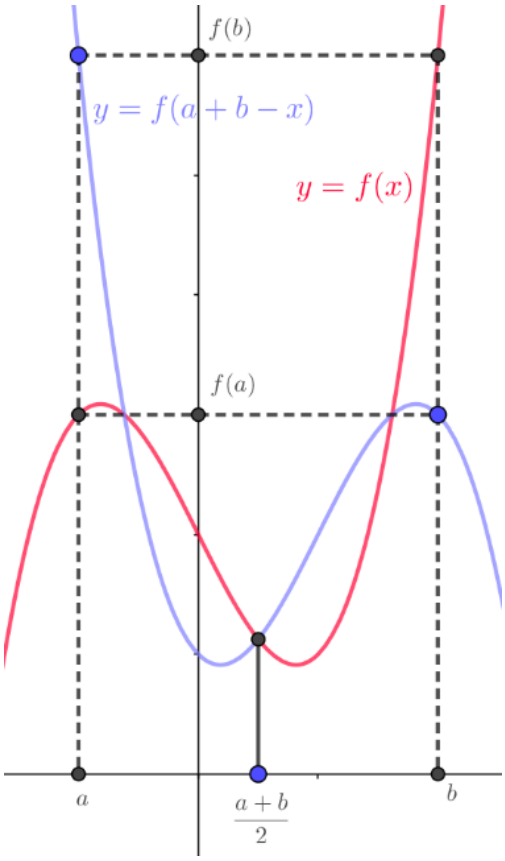
$$\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx. \qquad \textbf{(13)}$$

Η άσκηση αυτή είναι μια όμορφη εφαρμογή της συμμετρίας, η οποία τα τελευταία χρόνια δεν είναι στη διδακτέα ύλη της Γεωμετρίας του Λυκείου.

Ένα όμορφο παράδειγμα οπτικοποίησης ενός τέτοιου μετασχηματισμού (Nelsen, 2016) για μια θετική συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, b]$ δίνεται από τη

$$\int_\alpha^b f(x)dx = \int_\alpha^b f(\alpha + b - x)dx, \qquad \textbf{(14)}$$

η οποία αλγεβρικά αποδεικνύεται με την αντικατάσταση $u = \alpha + b - x$ και οι γεωμετρικές ενδείξεις φαίνονται από το Σχήμα 12.



Σχήμα 12. Οι γραφικές παραστάσεις των $y = f(x)$, $y = f(\alpha + b - x)$

Αναμφίβολα, η άσκηση του σχολικού βιβλίου, λόγω των ιδιοτήτων της τριγωνομετρικής συνάρτησης είναι απλούστερο να κατανοηθεί. Όμως πίσω από αυτήν κρύβεται η συμμετρία και οι απλές της ιδιότητες όπως ξεκάθαρα φαίνεται στο Σχήμα 12 και προτείνουμε στον αναγνώστη να «ανακαλύψει» την ισότητα (14) για την $f(x) = ln(1 + \varepsilon\varphi x)$, x ∈ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

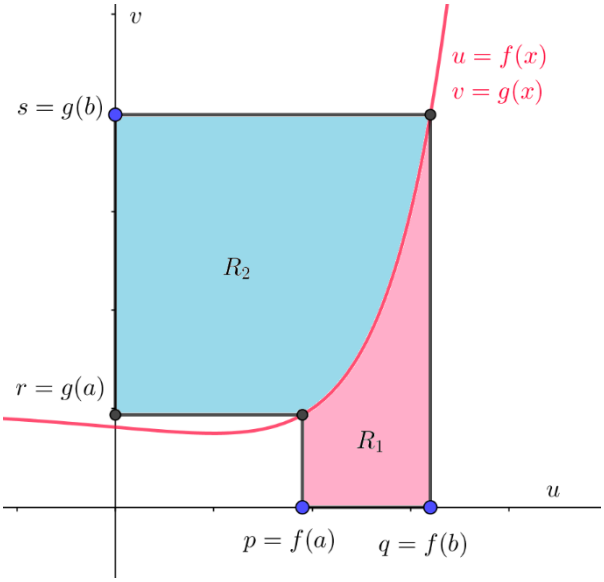
Η ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Γνωρίζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για δύο συνεχείς συναρτήσεις *f, g* με συνεχείς παραγώγους σε διάστημα $[\alpha, b]$. Αυτός είναι:

$$\int_\alpha^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^b - \int_\alpha^b g(x)f'(x)dx. \qquad (15)$$

Στην ιδέα που θα παρουσιάσουμε θα θεωρήσουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις *f, g* είναι μη αρνητικές και ότι ισχύει $0 < \alpha < b$. Έστω $u = f(x)$, $v = g(x)$

και θεωρούμε ότι έχουμε φτιάξει τη γραφική παράσταση της καμπύλης που αποτελείται από τα σημεία (u, v) σε ένα επίπεδο uv όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 13. Τα σημεία $(u, v) = (f(x), g(x))$ σε επίπεδο uv

Αν οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολευτούν σε αυτόν το μετασχηματισμό μπορούμε να τους παραλληλίσουμε το x με τον χρόνο κι έτσι οι συντεταγμένες u και v αλλάζουν όταν ο χρόνος x λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[\alpha, b]$.

Δουλεύοντας με εμβαδά τώρα (Nelsen, 2015) έχουμε ότι η περιοχή R_1 έχει εμβαδό ίσο με $\int_p^q vdu$, όπου $p = f(\alpha), q = f(b)$ (στα αθροίσματα Riemann τα ύψη των ορθογωνίων είναι v και το πλάτος du). Αφού $u = f(x)$ έχουμε:

$$\int_p^q vdu = \int_\alpha^b g(x)f'(x)dx. \qquad \textbf{(16)}$$

Σκεπτόμενοι με ακριβώς τον ίδιο τρόπο έχουμε για το εμβαδό της περιοχής R_2 ότι ισχύει:

$$\int_r^s udv = \int_\alpha^b f(x)g'(x)dx, \qquad \textbf{(17)}$$

όπου $r = g(\alpha), s = g(b)$.

Το άθροισμα τώρα των εμβαδών των δύο περιοχών του επιπέδου R_1, R_2 ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων που φαίνονται στο Σχήμα 16, δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)g'(x)dx + \int_{\alpha}^{b} g(x)f'(x)dx = f(b)g(b) - f(\alpha)g(\alpha) = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{b}, \quad \textbf{(18)}$$

ο οποίος είναι ο επιθυμητός μας τύπος (Nelsen, 2015).

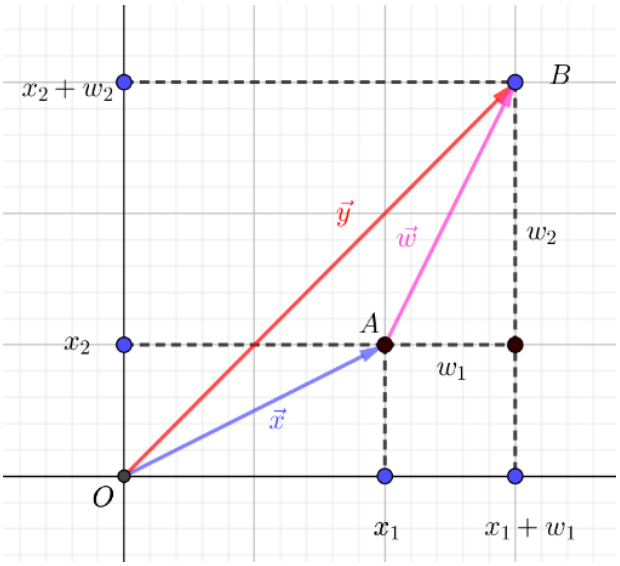
ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΚΑΠΟΙΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας στήλη $\nu \times 1$ (ή πίνακας γραμμή $1 \times \nu$) με $\nu \in \mathbb{N}^*$, γεωμετρικά εκφράζει ένα διάνυσμα ή τις συντεταγμένες ενός σημείου στον ν-διάστατο χώρο. Για ευκολία στις απεικονίσεις θα αναφερθούμε στην περίπτωση $\nu = 2$.

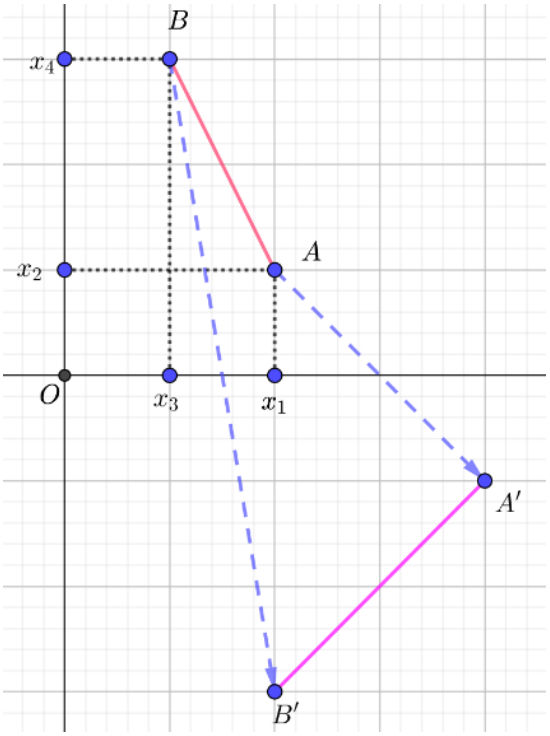
Έστω ο τυχαίος πίνακας $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, το σημείο $A(x_1, x_2)$, το διάνυσμα $\vec{OA} = (x_1, x_2)$ και οι σταθεροί πίνακες $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ και $S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$.

Τότε ο πίνακας $y = x + w$ εκφράζει τον μετασχηματισμό μεταφοράς του σημείου Α (Μουστάκας κ.ά., 2015) σύμφωνα με το διάνυσμα μεταφοράς $\vec{AB} = (w_1, w_2)$ για να προκύψει το Β με $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ (Σχήμα 14).

Επίσης, ο πίνακας $y = Sx$ εκφράζει τον μετασχηματισμό αλλαγής κλίμακας (μεταβάλλει το μέγεθος των αντικειμένων) από τον οποίο προκύπτει ένα νέο σημείο Β με τετμημένη πολλαπλασιασμένη με s_1 και τεταγμένη πολλαπλασιασμένη με s_2. Το διάνυσμα $\vec{s} = (s_1, s_2)$ ονομάζεται διάνυσμα κλιμάκωσης (Μουστάκας κ.ά., 2015). Αν $s_1 = s_2$ έχουμε ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας. Στο Σχήμα 15 φαίνεται ο μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας του τμήματος ΑΒ με $A(x_1, x_2)$, $B(x_3, x_4)$ με $\vec{s} = (2, -1)$.

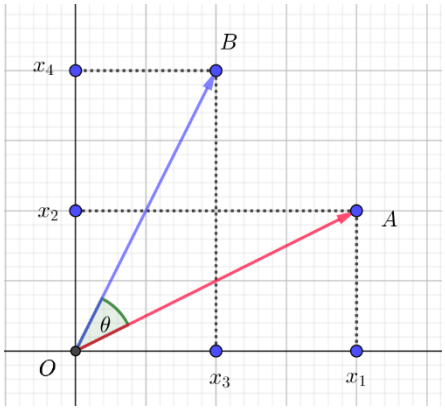


Σχήμα 14. Μετασχηματισμός μεταφοράς



Σχήμα 15. Μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας

Αν θεωρήσουμε τον πίνακα $r(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$, τότε ο πίνακας $y = r(\theta)x$ εκφράζει τη στροφή του διανύσματος $\vec{OA} = (x_1, x_2)$ κατά γωνία θ (με τη θετική φορά) για να προκύψει το $\vec{OB}$ (Σχήμα 16).



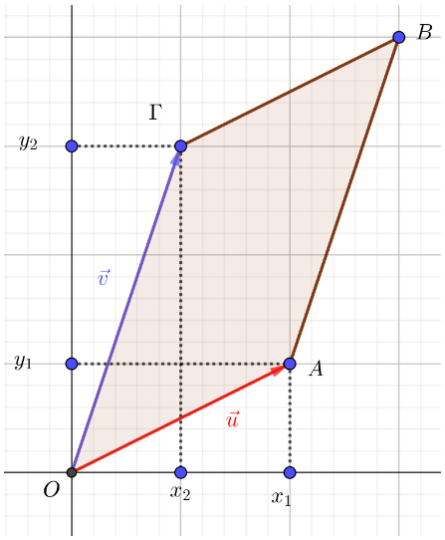
Σχήμα 16. Μετασχηματισμός στροφής

Αν θεωρήσουμε τους πίνακες $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta & 0 \\ sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, τότε ο πίνακας $Y = R(\theta)X$ εκφράζει τη στροφή του διανύσματος $\vec{OK} = (x_1, y_1, z_1)$ κατά γωνία θ (με τη θετική φορά) γύρω από τον $z'z$.

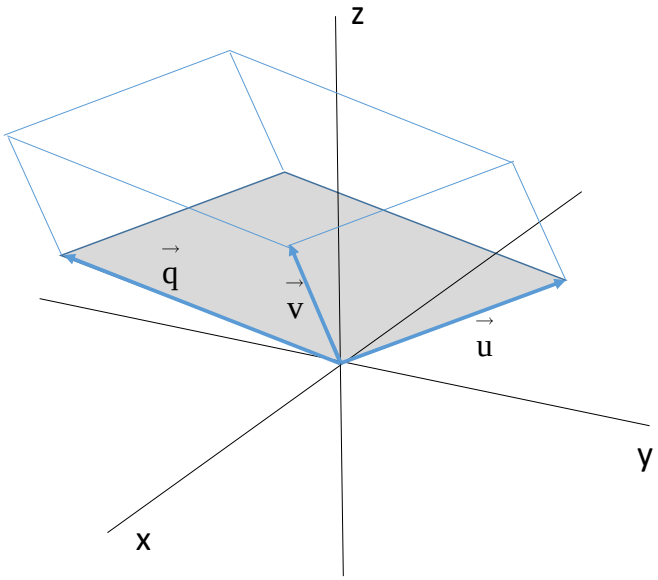
ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$. Τότε η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ (ο οποίος έχει στοιχεία τις συντεταγμένες των $\vec{u}, \vec{v}$) εκφράζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ (Σχήμα 17) με $\vec{OA} = (x_1, y_1)$, $\vec{O\Gamma} = (x_2, y_2)$ (Μποζαπαλίδης, 1997).

Αντίστοιχα, για τα διανύσματα $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{q} = (x_3, y_3, z_3)$ ισχύει ότι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ (με στοιχεία τις συντεταγμένες των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{q}$) εκφράζει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που δημιουργούν τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{q}$ (Σχήμα 18).



Σχήμα 17. Εμβαδό παραλληλογράμμου



Σχήμα 18. Όγκος παραλληλεπιπέδου

Η ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΟΠΤΙΚΑ ΚΑΙ … ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ

Έστω $x, y, z \in [\alpha, b]$ για τα οποία ισχύει $x < y < z$. Αν είναι $A(x, f(x)), B(y, f(y)), \Gamma(z, f(z))$ τρία διαφορετικά σημεία της γραφικής

παράστασης μιας γνησίως κυρτής (ή γνησίως κοίλης) συνάρτησης f, τότε το προσημασμένο εμβαδόν E του τριγώνου που ορίζεται από αυτά ισούται με

$$E = \frac{1}{2} det\, K, \text{ όπου } K = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix}.$$

Το εμβαδόν μπορεί να είναι είτε θετικό, είτε αρνητικό κάτι το οποίο εξαρτάται από τον τρόπο που είναι προσανατολισμένο το τρίγωνο (Manfrino et al., 2015). Συγκεκριμένα ισχύει ότι αν το τρίγωνο είναι προσανατολισμένο ανάποδα από τον τρόπο περιστροφής των δεικτών ενός ρολογιού και το προσημασμένο εμβαδόν είναι θετικό, η f είναι γνησίως κυρτή συνάρτηση (Σχήμα 19). Πράγματι

$$E > 0 \Leftrightarrow detK > 0 \Leftrightarrow (z-y)f(x) + (x-z)f(y) + (y-x)f(z) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(y) < \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

Λαμβάνοντας τώρα

$$t = \frac{y-x}{z-x},$$

προκύπτουν οι

$$0 < t < 1, 1 - t = \frac{z-y}{z-x}.$$

Τότε έχουμε

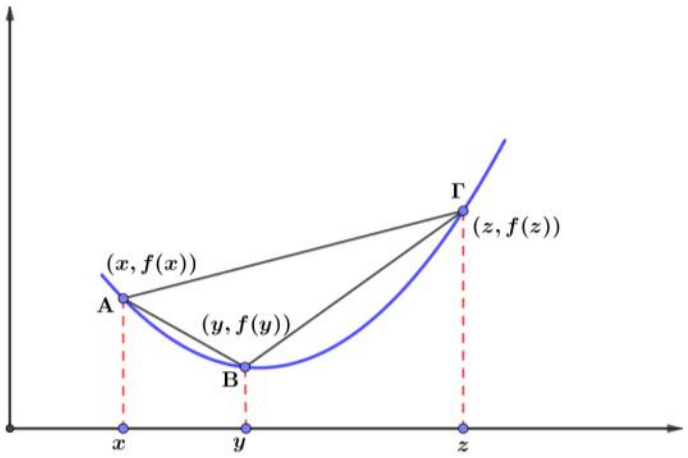
$$y = tz + (1-t)x$$

και

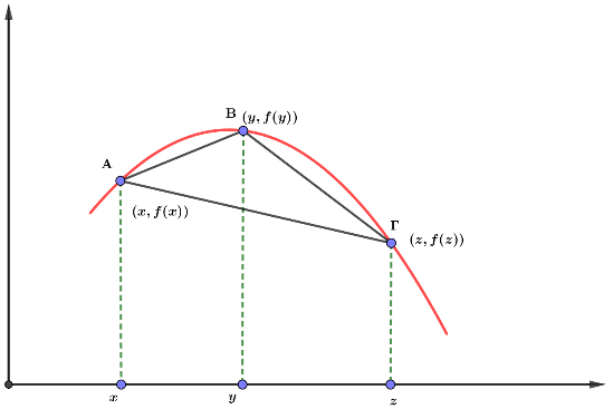
$$f(tz + (1-t)x) < tf(z) + (1-t)f(x),$$

δηλαδή η f είναι γνησίως κυρτή συνάρτηση.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι αν το τρίγωνο είναι προσανατολισμένο σύμφωνα με τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού και το προσημασμένο εμβαδόν είναι αρνητικό, η f είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση (Σχήμα 20).



Σχήμα 19. Γνησίως κυρτή συνάρτηση *f* και το ΑΒΓ δεν είναι σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογίου.



Σχήμα 20. Γνησίως κοίλη συνάρτηση *f* και το ΑΒΓ είναι σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ, ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Θεωρούμε δύο πολυδιάστατους χώρους V, W. Ένας μετασχηματισμός Τ είναι ένας νόμος που αντιστοιχίζει κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του V σε ακριβώς ένα διάνυσμα $\vec{y}$ του W (Lang, 2000). Το μοναδικό διάνυσμα $\vec{y}$ (εικόνα του $\vec{x}$ μέσω του Τ) συμβολίζεται με $T(\vec{x})$.

Ένας μετασχηματισμός Τ ο οποίος διατηρεί τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν ισχύουν οι

$$T(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = T(\overrightarrow{x_1})+\mathrm{T}(\overrightarrow{x_2}),\ T(\lambda\overrightarrow{x_1}) = \lambda T(\overrightarrow{x_1}), \qquad \textbf{(19)}$$

για όλα τα διανύσματα $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός.

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V πάνω στο $K \subseteq \mathbb{C}$ και $T: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του. Ένα στοιχείο λ ονομάζεται ιδιοτιμή του Τ, αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}$ του Ε, τέτοιο ώστε

$$T(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \qquad \textbf{(20)}$$

και το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του Τ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ (Μποζαπαλίδης, 1997).

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον ενδομορφισμό

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ με } T(x, y) = (4x - y, 2x + y),$$

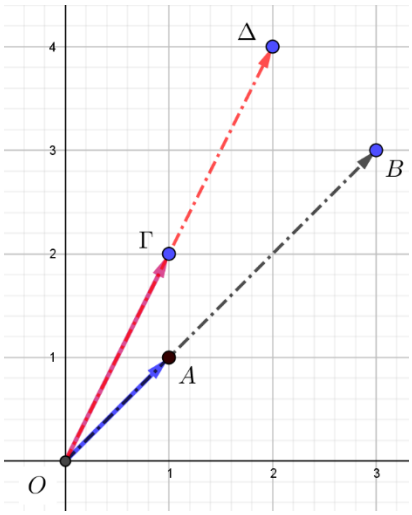
για τον οποίο ισχύει

$$T(1,1) = 3(1,1), T(1,2) = 2(1,2),$$

δηλαδή οι αριθμοί 2 και 3 είναι ιδιοτιμές του Τ και τα διανύσματα $(1,2)$, $(1,1)$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Γραφικά αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Τ αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (1,1)$ σε ένα διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση και τριπλάσιο μέτρο (Σχήμα 21), δηλαδή στο $\overrightarrow{OB} = (3,3)$. Ομοίως, ο Τ αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma} = (1,2)$ σε ένα διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση και διπλάσιο μέτρο (Σχήμα 21), δηλαδή στο $\overrightarrow{O\Delta} = (2,4)$.

Επομένως, ιδιοδιανύσματα είναι τα διανύσματα όπου η κατεύθυνσή τους παραμένει αμετάβλητη από τον μετασχηματισμό Τ (Sierpinska et al., 1999).



Σχήμα 21. Η επίδραση του μετασχηματισμού Τ

Επιπλέον, αν ο Α είναι $n \times n$ πίνακας, η μορφή $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ εκφράζει ότι το γινόμενο του Α με ένα διάνυσμα $\vec{x}$ έχει ίδιο αποτέλεσμα με το γινόμενο ενός μιγαδικού λ με το διάνυσμα αυτό, δηλαδή βρίσκοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ πίνακα Α καταλήγουμε να βρούμε τις τιμές των $\vec{x}$ και λ που κάνουν αληθή αυτή τη σχέση. Αλλιώς μπορούμε να γράψουμε

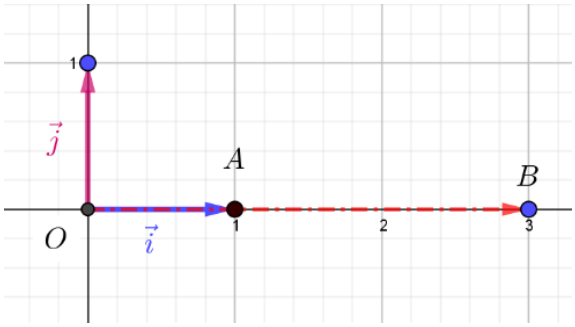
$$A\vec{x} = \lambda\mathbb{I}_n\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} - \lambda\mathbb{I}_n\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{I}_n)\vec{x} = \vec{0}, \qquad \textbf{(21)}$$

όπου $\mathbb{I}_n$ ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας, δηλαδή αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα Α, τότε το γινόμενο του πίνακα $A - \lambda\mathbb{I}_n$ με το ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα κάτι που σημαίνει ότι η ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda\mathbb{I}_n$ είναι μηδενική.

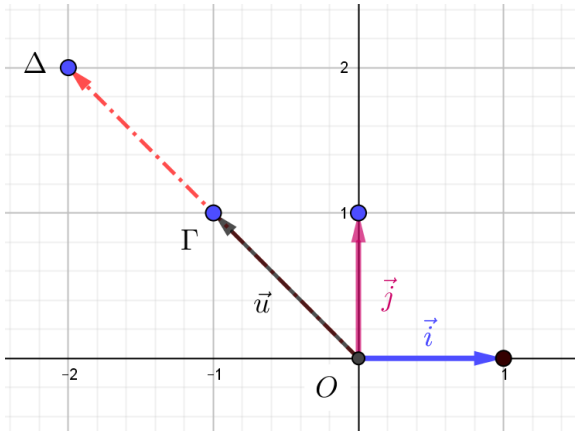
Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό Τ στις δύο διαστάσεις, όπου μετακινεί το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\imath}$ του άξονα $x'x$ στις συντεταγμένες $(3,0)$ και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\jmath}$ του άξονα $y'y$ στις συντεταγμένες $(1,2)$. Έτσι έχουμε έναν πίνακα Α με στήλες τα διανύσματα αυτά, δηλαδή $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Αν σκεφτούμε πως επιδρά ο πίνακας Α σε ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{x}$ και θεωρήσουμε τον φορέα του διανύσματος $\vec{x}$, τα περισσότερα διανύσματα θα μετακινηθούν από τον φορέα τους με εφαρμογή του μετασχηματισμού. Ωστόσο, κάποια διανύσματα παραμένουν στον φορέα τους, κι απλώς αλλάζει το μέτρο τους, δηλαδή σαν να πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό (Schonefeld, 2018). Πρακτικά ο πίνακας μετασχηματισμού απλώς «τεντώνει» ή «συμπιέζει» ένα διάνυσμα αν αυτό βρίσκεται στο φορέα των

ιδιοδιανυσμάτων. Ένα τέτοιο διάνυσμα λόγου χάριν είναι το διάνυσμα $\vec{\imath}$, όπου ο φορέας του είναι ο άξονας $x'x$ και με την επίδραση του διανύσματος της πρώτης στήλης του πίνακα Α το διάνυσμα «επεκτείνεται» 3 φορές, στον ίδιο αυτό άξονα $x'x$. Λόγω του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα στον άξονα $x'x$, επίσης απλώς τεντώνεται με συντελεστή 3 και ως εκ τούτου παραμένει στο δικό του φορέα (Σχήμα 22).

Ένα ακόμη διάνυσμα που παραμένει στο φορέα του είναι το $(-1,1)$ και καταλήγει να «τεντώνεται» κατά συντελεστή 2. Λόγω γραμμικότητας κάθε διάνυσμα στο φορέα του διανύσματος $(-1,1)$ θα έχει την ιδιότητα να «τεντώνεται» 2 φορές (Σχήμα 23). Οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα θα περιστραφεί κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού και θα μετακινηθεί από τον φορέα του.

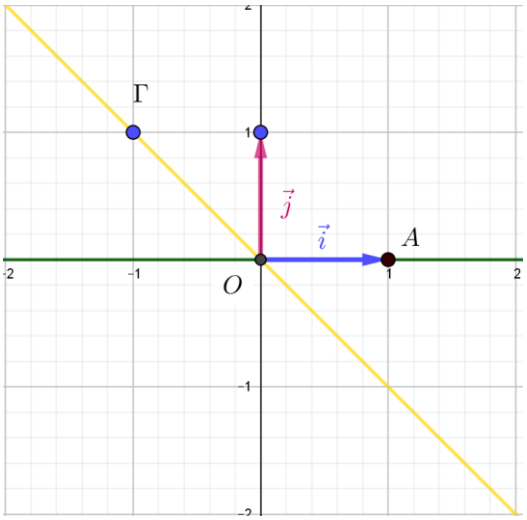


Σχήμα 22. Η επίδραση του πολλαπλασιασμού του πίνακα Α με το $\vec{\imath}$



Σχήμα 23. Η επίδραση του πολλαπλασιασμού του πίνακα Α με το $\vec{u} = (-1,1)$

Για τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό τα διανύσματα που έχουν την ιδιότητα να παραμένουν στο φορέα τους (είτε στην κίτρινη ευθεία ΟΓ, είτε στην πράσινη ευθεία ΟΑ) και να «τεντώνονται» κατά μέτρο 2 (ιδιοτιμή 2) ή 3 (ιδιοτιμή 3) αντίστοιχα, φαίνονται στο Σχήμα 24. Αυτά τα «ξεχωριστά» διανύσματα είναι τα ιδιοδιανύσματα του μετασχηματισμού.



Σχήμα 24. Οι φορείς των ιδιοδιανυσμάτων

Στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι αρνητικές, λόγου χάριν αν η μία ιδιοτιμή είναι -2, τότε τα ιδιοδιανύσματα αλλάζουν φορά και το μέτρο τους πολλαπλασιάζεται με το 2.

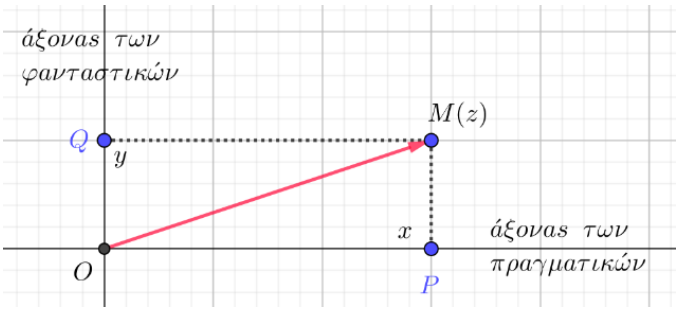
«ΒΛΕΠΟΝΤΑΣ» ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

Γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικός z απεικονίζεται ως ένα σημείο Μ του μιγαδικού επιπέδου ή ως την αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα, $\vec{OM}$. Το σημείο Μ ονομάζεται εικόνα του μιγαδικού και συμβολίζεται με $M(z)$.

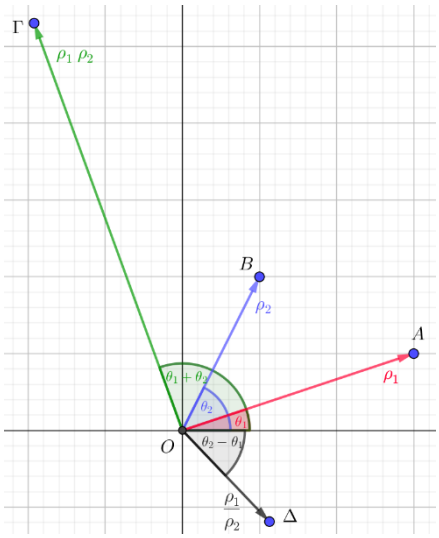
Το μέτρο του μιγαδικού $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ ισούται με το μήκος του $\vec{OM} = (x, y)$. Επίσης αν ο μιγαδικός είναι ο πραγματικός $z = x,\ x \in \mathbb{R}$ η εικόνα του Ρ ανήκει στον πραγματικό άξονα (Andreescu & Andrica, 2014), ενώ αν είναι ο φανταστικός $z = yi,\ y \in \mathbb{R}$ η εικόνα του Q ανήκει στον φανταστικό άξονα (Σχήμα 25). Θεωρούμε τους μιγαδικούς

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1) \\ z_2 = \rho_2(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2) \end{cases},\ \rho_1, \rho_2 > 0,\ 0 \le \theta_1, \theta_2 < 2\pi, \qquad (22)$$

όπου γεωμετρικά απεικονίζονται στο μιγαδικό επίπεδο με τα σημεία Α, Β, όπου $OA = \rho_1$, $OB = \rho_2$, $\hat{xOA} = \theta_1$, $\hat{xOB} = \theta_2$ (Σχήμα 26).



Σχήμα 25. Το μιγαδικό επίπεδο



Σχήμα 26. Πράξεις μιγαδικών

Για το γινόμενο $z_1 z_2$ ισχύει

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)], \qquad \textbf{(23)}$$

δηλαδή απεικονίζεται στο σημείο Γ, όπου $O\Gamma = \rho_1 \rho_2$ και $\hat{xO\Gamma} = \theta_1 + \theta_2$, ενώ για το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$ ισχύει

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)], \qquad \textbf{(24)}$$

δηλαδή απεικονίζεται στο σημείο Δ, όπου $O\Delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ και $\hat{xO\Delta} = \theta_1 - \theta_2,\ \theta_1 \geq \theta_2$ ή $\hat{xO\Delta} = 2\pi - (\theta_2 - \theta_1),\ \theta_2 \geq \theta_1$ (Σχήμα 26).

Ο τύπος του Euler

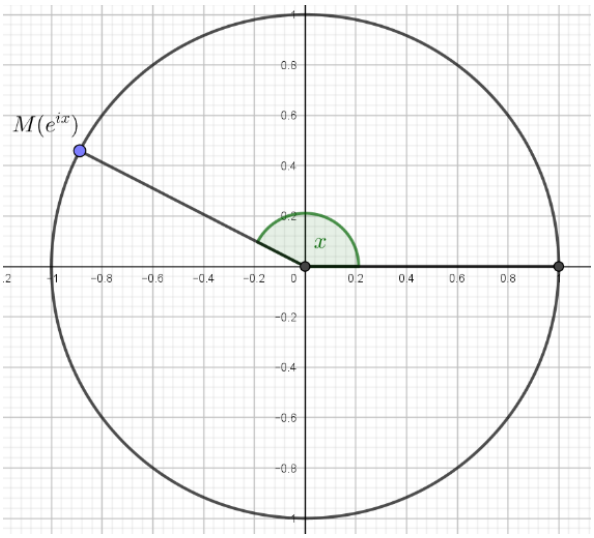
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x\,,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(25)}$$

δείχνει ότι ο μιγαδικός αριθμός e^{ix} απεικονίζεται πάνω στο μιγαδικό επίπεδο ως σημείο του κύκλου με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα 1 (Σχήμα 27).

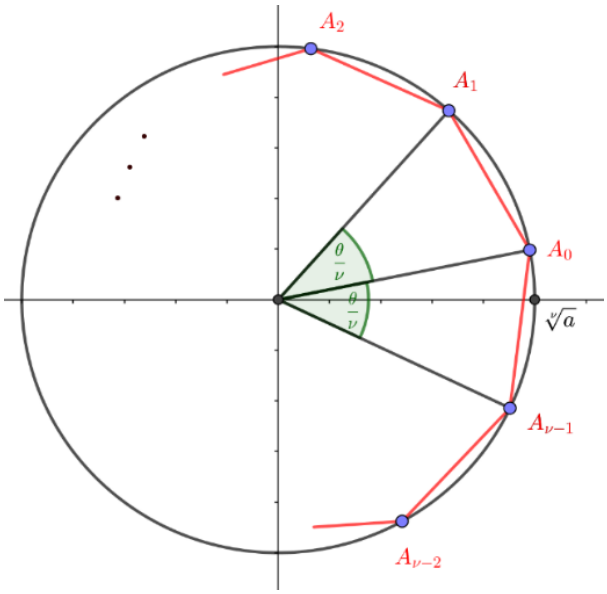
Για τις νιοστές ρίζες του μιγαδικού α, δηλαδή για τις λύσεις της εξίσωσης $z^\nu = \alpha$, με $\mu\varepsilon\ z \in \mathbb{C}$, $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho > 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ ισχύει ότι

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{\nu} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{\nu}\right) \text{για } k = 0,1,2,\ \ldots,\ \nu - 1, \qquad \textbf{(26)}$$

οι οποίες στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές του κανονικού ν-γώνου $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ (Σχήμα 28) που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο, ακτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$ και $A_k\left(\sqrt[\nu]{\rho}\cos\frac{2k\pi+\theta}{\nu}, \sqrt[\nu]{\rho}\sin\frac{2k\pi+\theta}{\nu}\right)$, για $k = 0,1,2,\ \ldots,\ \nu - 1$.



Σχήμα 27. Γεωμετρική ερμηνεία του τύπου του Euler



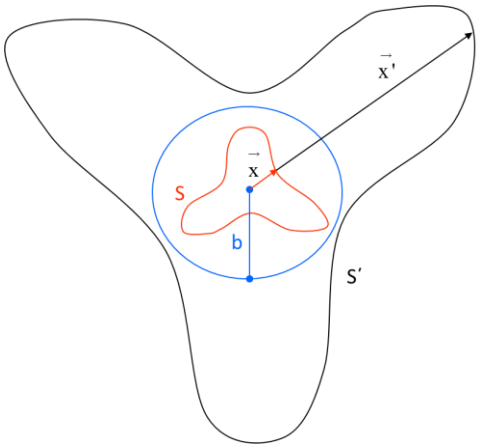
Σχήμα 28. Γεωμετρική ερμηνεία νιοστών ριζών μιγαδικού

ΒΛΕΠΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Υποθέτουμε γνωστό μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}$ και μια σφαίρα με κέντρο το Ο και ακτίνα $b > 0$. Τότε το διάνυσμα

$$\vec{x'} = \frac{b^2}{\left|\vec{x}\right|^2}\vec{x}, \qquad \textbf{(27)}$$

είναι ένα νέο διάνυσμα συγγραμμικό με το αρχικό και εκφράζει την αντιστροφή Kelvin (Δάσιος & Κυριάκη, 1994). Το νέο διάνυσμα έχει την ιδιότητα τα «στέλνει» τα κοντινά σημεία μακριά και τα μακρινά σημεία κοντά. Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ χρήσιμη, διότι μπορεί να αντιστοιχίσει τα εξωτερικά σημεία ενός σχήματος στα εσωτερικά ενός άλλου σχήματος (και αντίστροφα), διευκολύνοντας τη λύση ενός προβλήματος. Στο Σχήμα 29 φαίνεται η αντιστροφή Kelvin στο επίπεδο, όπου το αρχικό σχήμα S μετασχηματίζεται στο S΄ με κύκλο αντιστροφής ακτίνας $b > 0$.

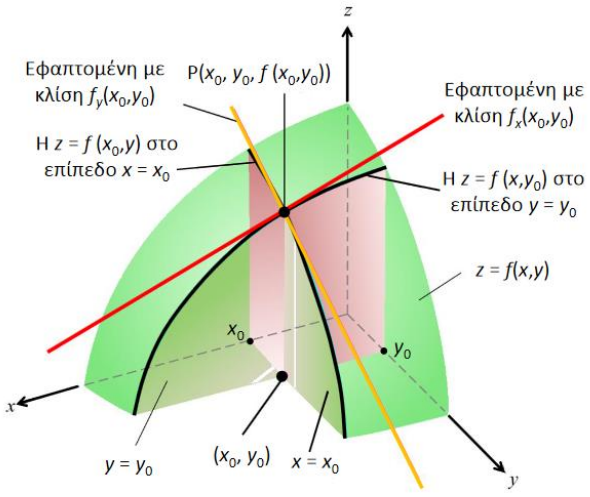


Σχήμα 29. Αντιστροφή Kelvin στο επίπεδο.

Για παράδειγμα σε περιπτώσεις ροών εξωτερικά ενός αντικειμένου, η αντιστροφή Kelvin οδηγεί σε ροή στο εσωτερικό ενός άλλου σχήματος, όπου η λύση είτε είναι γνωστή είτε πιο εύκολο να βρεθεί!

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ας θεωρήσουμε την πραγματική συνάρτηση $f(x,y),\ (x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ και το σημείο $(x_0,y_0) \in A$. Αν σταθεροποιήσουμε το $y_0 \in A$ η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ισούται με την παράγωγο $\varphi'(x_0)$ της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x,y_0), (x,y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ (Ζυγκιρίδης, 2015).



Σχήμα 30. Για την επιφάνεια $z = f(x,y)$

Η εξίσωση $z = f(x, y)$ περιγράφει μια επιφάνεια S στο χώρο όπως για παράδειγμα αυτή του σχήματος 30. Αν τώρα κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $z = g(x) = f(x, y_0)$ θα είναι η τομή της επιφάνειας S με το επίπεδο $y = y_0$. Όπως είναι γνωστό από τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, η παράγωγος αυτής σε ένα σημείο της γραφικής της παράστασης ισούται με την κλίση της εφαπτομένης. Επομένως, εδώ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, y_0) \in A$ και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία αυτή με το επίπεδο Oxy (Σχήμα 30).

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής, ανά μονάδα μήκους, της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x, y_0), (x, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ στο σημείο με τετμημένη x_0 ή ισοδύναμα της συνάρτησης $z = g(x) = f(x, y_0)$ στο σημείο (x_0, y_0) κατά τη διεύθυνση που ορίζει ο άξονας $x'x$. Με ανάλογο τρόπο εκφράζεται και η γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (Σχήμα 30).

ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Πόσες είναι οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 = 8$;

Αφού έχουμε τρεις ακέραιες μεταβλητές με άθροισμα οκτώ, το αποτέλεσμα που ψάχνουμε θα μπορούσε να εξαχθεί ακόμα και με απλή καταμέτρηση των περιπτώσεων. Λαμβάνουμε αυτό το παράδειγμα ώστε να καταστρώσουμε μια γενικότερη στρατηγική που θα μπορούσε να δώσει άμεση απάντηση ακόμα και στην περίπτωση που έχουμε 50 μεταβλητές με άθροισμα 10.000 (Πούλος, 2015).

Αρχικά λαμβάνουμε μια προφανή λύση για το πρόβλημα, για παράδειγμα την $(2,3,3)$, αφού $2 + 3 + 3 = 8$. Μπορούμε τώρα να σκεφτούμε κάθε ψηφίο ως πλήθος του συμβόλου $'1'$ και τα $' + '$ ως το σύμβολο $'|'$. Τότε η ισότητα γράφεται και ως

$$11|111|111 = 8. \qquad \textbf{(28)}$$

Κάνουμε το ίδιο για την προφανή λύση $(1,6,1)$, αφού ισχύει $1 + 6 + 1 = 8$, και κατά συνέπεια

$$1|111111|1 = 8. \qquad \textbf{(29)}$$

Ομοίως, αφού $0 + 0 + 8 = 8$ λύση είναι και η τριάδα $(0,0,8)$ ή με την απεικόνιση που επιλέξαμε γίνεται

$$||11111111 = 8. \quad \textbf{(30)}$$

Από τις (28), (29), (30) παρατηρούμε ότι:

το πλήθος των άσσων ισούται με το επιθυμητό άθροισμα και το πλήθος των $' + '$είναι το πλήθος των μεταβλητών ελαττωμένο κατά ένα $(3 - 1 = 2)$, στην ουσία η λύση του προβλήματος (από την αναπαράσταση που χρησιμοποιούμε) φαίνεται να δίνεται από τις επαναληπτικές μεταθέσεις των 8 άσσων και των δύο γραμμών, το επιθυμητό άθροισμα (το 8) συν το πλήθος των μεταβλητών (3 μεταβλητές x_1, x_2, x_3) μείον ένα ισούται με το πλήθος των αντικειμένων (των μονάδων και των γραμμών).

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι το σύνολο όλων των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της δοθείσας εξίσωσης και το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των οκτώ άσσων και των δύο γραμμών μπαίνουν σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία, οπότε για να βρούμε το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων αρκεί να βρούμε το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων 10 αντικειμένων $(8 + 2)$.

Έτσι στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ότι το πλήθος των ακέραιων μη αρνητικών λύσεων είναι

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Στη γενικότερη ερώτηση «πόσες ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = k$» η απάντηση προκύπτει με όμοιο τρόπο και είναι

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(n+k-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

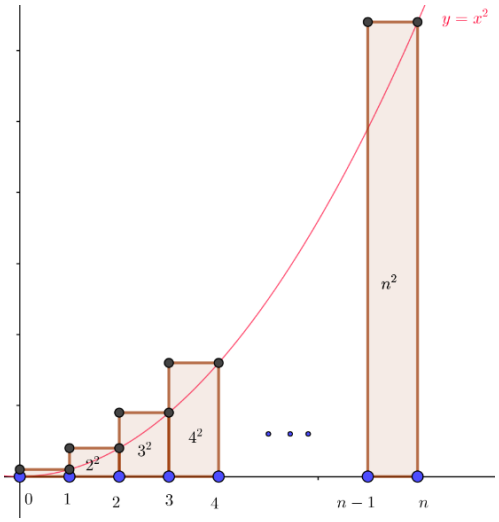
ΜΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΟΣΜΟΥ

Πολλές φορές για την επίλυση προβλημάτων χρειάζεται να απευθυνθούμε στον διακριτό, αλλά και στον συνεχή κόσμο των Μαθηματικών. Εκεί, με την οπτικοποίηση μπορούμε να δώσουμε κομψές και ευφυείς λύσεις.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017) και θα μας δείξει αυτήν την συνύπαρξη διακριτού και συνεχούς κόσμου είναι ο (γνωστός κατά τα άλλα) υπολογισμός του αθροίσματος

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \textbf{(31)}$$

Οι όροι του αθροίσματος παραπέμπουν σε άθροισμα εμβαδών n ορθογωνίων πλάτους 1 και μήκους $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ αντίστοιχα και προς αυτήν την κατεύθυνση θα εργαστούμε (Σχήμα 31).



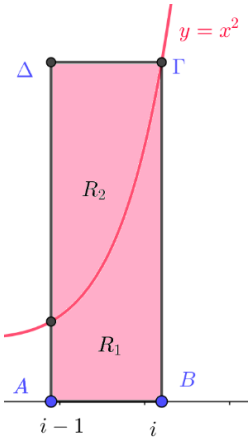
Σχήμα 31. Η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος S_n

Για το i-οστό ορθογώνιο του αθροίσματος (Σχήμα 32) έχουμε ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = R_1 + R_2 \Leftrightarrow R_2 = (AB\Gamma\Delta) - R_1,$$

οπότε

$$R_2 = i^2 - \int_{i-1}^{i} x^2 dx.$$



Σχήμα 32. Το i-οστό ορθογώνιο του αθροίσματος S_n

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων (Σχήμα 31) θα πάρουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = n$ και θα προσθέσουμε τα αντίστοιχα εμβαδά R_2 (που φαίνονται στο Σχήμα 32).

Συνεπώς:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$$

$$= \int_0^n x^2 dx + 1^2 - \int_0^1 x^2 dx + 2^2 - \int_1^2 x^2 dx + \ldots + n^2 - \int_{n-1}^n x^2 dx =$$

$$= \int_0^n x^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \int_{i-1}^{i} x^2 dx \right) = \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \frac{i^3}{3} + \frac{(i-1)^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i-1}{3} \right) = \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} i - \frac{n}{3} =$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Η οπτικοποίηση έχει πρωτεύοντα ρόλο στην επίλυση εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους. Το θεώρημα του Bolzano και η γεωμετρική του ερμηνεία είναι το θεμέλιο της εφαρμογής της μεθόδου της διχοτόμησης.

Μέθοδος του Νεύτωνα για την επίλυση εξισώσεων

Για την επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0,\ x \in D_f$, όπου η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta \subseteq D_f$, η μέθοδος του Νεύτωνα αφορά την εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας

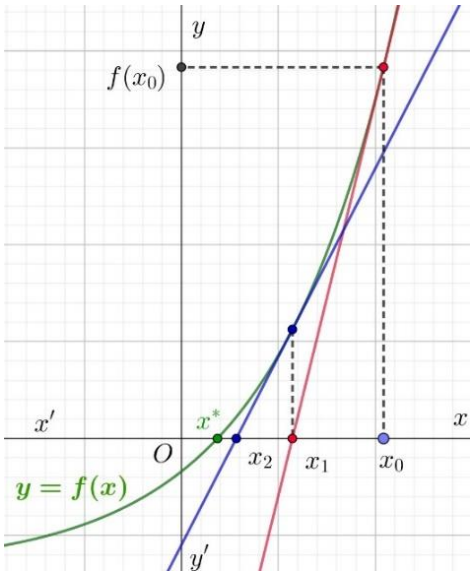
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ \mu\varepsilon\ f'(x_n) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}, \qquad \textbf{(32)}$$

για κάποιο αρχικό $x_0 \in \Delta$ (Ακρίβης & Δουγαλής, 2013).

Κάνοντας πράξεις στη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) + f(x_n) = 0, \qquad \textbf{(33)}$$

η οποία δίνει το σημείο τομής $(x_{n+1}, 0)$ της εφαπτομένης της C_f στο $(x_n, f(x_n))$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή μπορούμε να βρούμε τη ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0,\ x \in D_f$ (Σχήμα 33).



Σχήμα 33. Η μέθοδος του Νεύτωνα

Μέθοδος της τέμνουσας για την επίλυση εξισώσεων

Για την επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0,\ x \in D_f$, όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta \subseteq D_f$, η μέθοδος της τέμνουσας αφορά την εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας

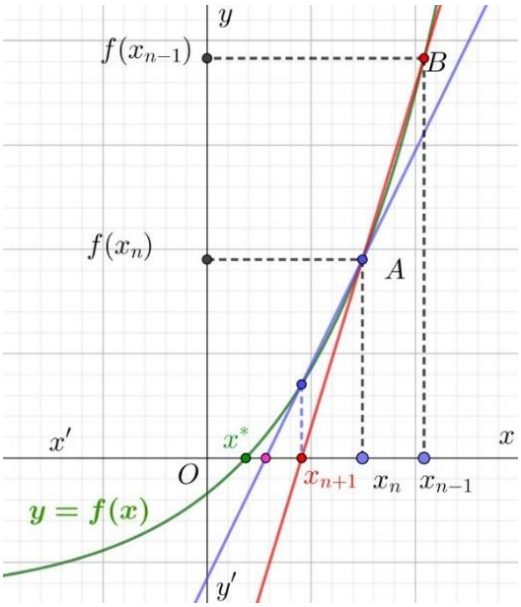
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, f(x_n) \neq f(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{(34)}$$

για κάποια αρχικά $x_0, x_1 \in \Delta$ (Ακρίβης & Δουγαλής, 2013).

Κάνοντας πράξεις στη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$(x_{n+1} - x_n)\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} + f(x_n) = 0, \quad \textbf{(35)}$$

η οποία δίνει το σημείο τομής $(x_{n+1}, 0)$ της ευθείας $A_{n-1}A_n$ με $A_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $A_n(x_n, f(x_n))$ με τον άξονα x΄x. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή μπορούμε να βρούμε τη ρίζα x^* της εξίσωσης $f(x) = 0,\ x \in D_f$ (Σχήμα 34).



Σχήμα 34. Η μέθοδος της τέμνουσας

Η ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Οι πρώτες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.) με τις οποίες έρχεται κάποιος σε επαφή είναι αυτές της πρώτης τάξης. Από αυτές άλλες μπορούν να λυθούν αναλυτικά και άλλες μπορούν να λυθούν μόνο αριθμητικά. Σε κάθε περίπτωση μας ενδιαφέρει να έχουμε μια εικόνα για το αν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση. Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0, \qquad \textbf{(36)}$$

έχει μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική προσέγγιση (Boyce & DiPrima, 2018). Αρκεί οι συναρτήσεις f, f_y να είναι συνεχείς σε ένα ορθογώνιο στο οποίο το σημείο (x_0, y_0) είναι εσωτερικό του για να έχει το (36) μοναδική λύση. Για παράδειγμα το Π.Α.Τ.

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)},\ y(0) = 0, \qquad \textbf{(37)}$$

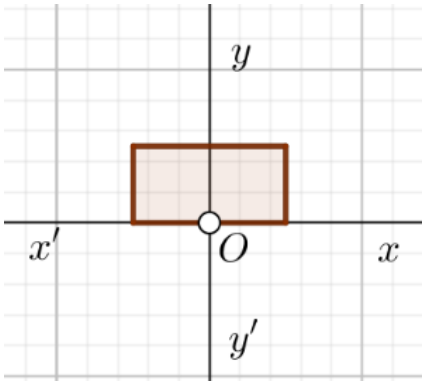
δεν έχει μοναδική λύση, αφού

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y},\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+$$

και η

$$f_y(x,y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}},\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}_+^*$$

δεν είναι συνεχής σε κανένα ορθογώνιο που να περιλαμβάνει το $(0,0)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 35.

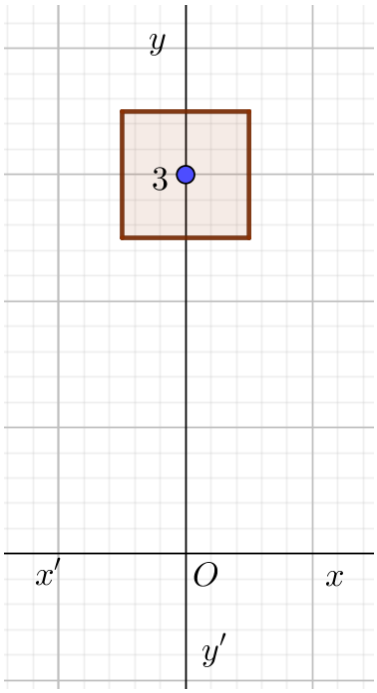


Σχήμα 35. Δεν υπάρχει ορθογώνιο γύρω από το $(0,0)$

Αντιθέτως, το Π.Α.Τ

$$y'(x)=\sqrt[3]{y(x)},\ y(0)=3, \qquad \textbf{(38)}$$

έχει μοναδική λύση, αφού υπάρχει ορθογώνιο που περιλαμβάνει το $(0,3)$, ώστε οι συναρτήσεις f, f_y να είναι συνεχείς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 36.



Σχήμα 36. Υπάρχει ορθογώνιο γύρω από το (0,3)

ΟΙ ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Η οπτικοποίηση είναι μια μαθηματική εκτίμηση μέσω εικόνων. Έτσι λοιπόν, ένα σχήμα που είναι κοντά στα δεδομένα του προβλήματος και το επεξηγεί κατάλληλα, δεν αποτελεί και απόδειξη του εν λόγω προβλήματος. Η οπτικοποίηση βοηθά στην κατανόηση του προβλήματος, χρησιμοποιείται ως οδηγός επίλυσής του, πολλές φορές βοηθά και στην παραγωγή δημιουργικών ιδεών, αλλά οφείλουμε να παραθέτουμε επιστημονικά τεκμηριωμένες λύσεις.

Επιπλέον, η πλάνη ελλοχεύει ανά πάσα στιγμή και κάτι που φαίνεται πασιφανές μπορεί να μας οδηγήσει σε λανθασμένο συμπέρασμα. Για παράδειγμα, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, κανένας δε μπορεί να αμφισβητήσει το αποτέλεσμα του θεωρήματος Bolzano το οποίο και γραφικά μας δείχνει ότι ισχύει. Αντιθέτως, αν ο μαθητής ή ο φοιτητής σκεφθεί σε συνεχείς καμπύλες ορισμένες σε διάστημα θα συμπεράνει την ύπαρξη εφαπτομένης σε κάθε σημείο της, κάτι το οποίο είναι λανθασμένο, αφού υπάρχουν συναρτήσεις (όπως η συνάρτηση Weierstrass) που είναι παντού συνεχείς και πουθενά παραγωγίσιμες (Spivak, 2007).

Επιπροσθέτως υπάρχουν έρευνες, όπως αυτή των Rosken & Rolka από πανεπιστήμια της Γερμανίας, που αναδεικνύουν τη δυσκολία που έχουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες να ανταπεξέλθουν στη χρήση της οπτικοποίησης στο μάθημα του Ολοκληρωτικού λογισμού μίας μεταβλητής (Rosken & Rolka, 2006).

Πολλοί φοιτητές και πολλές φοιτήτριες δυσκολεύονται να σχεδιάσουν μια γραφική παράσταση συνάρτησης και συχνά δυσκολεύονται να δουν τη Γεωμετρία ως κλάδο των Μαθηματικών, αναρωτώμενοι πότε θα σταματήσουμε τη Γεωμετρία και θα κάνουμε Μαθηματικά (Zimmerman & Cunningham, 1991).

Η διαίσθηση και η αυστηρότητα δεν είναι κατ' ανάγκη αντίθετες μεταξύ τους, μπορούν να συνδυαστούν και να οδηγήσουν σε μαθηματική απόδειξη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η οπτικοποίηση προσφέρει μια μέθοδο θέασης του αόρατου (McCormick et al., 1987). Εμπλουτίζει τη διαδικασία της επιστημονικής ανακάλυψης και ενθαρρύνει βαθιές και απροσδόκητες ιδέες. Είναι ένα κεντρικό συστατικό πολλών διαδικασιών στις οποίες πραγματοποιείται η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο μοντέλο σκέψης (Ben-Chaim et al., 1989). Εάν συγκεκριμένες και αφηρημένες οπτικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα για την οπτικοποίηση του προβλήματος, είναι πιο εύκολο για τους μαθητές και τις μαθήτριες να δημιουργήσουν σχέσεις και συνδέσεις μεταξύ της συγκεκριμένης και της αφηρημένης πτυχής του προβλήματος, που τελικά οδηγεί σε περαιτέρω βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας και καλύτερες επιδόσεις των μαθητών (Moreno, et al., 2011). Ως εκ τούτου είναι σημαντικό να επανεξεταστούν η φύση και ο ρόλος της οπτικοποίησης, οι καινοτομίες της έρευνας και η εφαρμογή τους στα προγράμματα σπουδών (Arcavi, 2003).

Για να απαντήσουμε στο αρχικό μας ερώτημα, μια εικόνα ισούται με χίλιες σκέψεις, όταν κάποιος έχει την ικανότητα να την χρησιμοποιήσει σωστά στο πεδίο εφαρμογής της και με ευελιξία. Η οπτικοποίηση λοιπόν είναι χρήσιμη για να φωτίσει τις πτυχές ενός προβλήματος, να εμπνεύσει, και πλέον με τη βοήθεια κατάλληλων λογισμικών να εμφανίσει πολλαπλές ιδιότητες καμπύλων ή σχημάτων. Πάντοτε όμως, θα πρέπει να συνοδεύεται με μαθηματική σκέψη, αυστηρότητα και γνήσια, ακριβή επιχειρήματα ώστε να καταλήξουμε στα ζητούμενα συμπεράσματα.

Το γεγονός ότι η οπτικοποίηση μπορεί να μας οδηγήσει σε σφάλματα δε θα πρέπει να αποτελεί επιχείρημα κατά της εφαρμογής της οπτικοποίησης στα μαθηματικά, επειδή η οπτικοποίηση στα μαθηματικά μπορεί να είναι πολύ αποτελεσματική. Μερικές φορές ακόμη και «επίσημες» τεχνικές μπορεί να μας οδηγήσουν σε ένα λάθος. Αυτός όμως δεν είναι λόγος να σταματήσουμε να επιλέγουμε έναν τέτοιο τρόπο αντιμετώπισης. Τα λάθη πρέπει να αντιμετωπίζονται ως κάτι φυσικό που πρέπει να μας οδηγούν σε νέες ανακαλύψεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ακρίβης, Δ. Γ., & Δουγαλής, Α. Β. (2013). *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. και Πολύζος, Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου, Β΄ μέρος*. ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., και Σβέρκος, Α. (2020). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. ΙΤΥΕ.

Andreescu, T., & Andrica, D. (2014). *Complex Numbers from A to … Z*. Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8415-0.

Αργυράκης, Δ. Βουργάνας, Π., Μέντης, Κ., Τσικοπούλου, Σ. και Χρυσοβέργης, Μ., (2008). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, Ο.Ε.Δ.Β.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., και Σιδέρης, Π. (2012). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου*. ΙΤΥΕ ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241, https://doi.org/10.1023/A:1024312321077.

Arnheim, P. (1991). *Art and Visual Perception. A Psychology of the Creative Eye* (Second Edition). Fiftieth Anniversary Printing.

Ben-Chaim, D., Lappan G., & Houang R. (1989). The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 49–60.

Bishop, A. (1989). Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 7–16.

Boyce, E. W., & DiPrima, C. R. (2018). *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Brown, R. J. (1997). *Proofs and Pictures*. *British journal for the Philosophy of science, 48*(2), 161–180.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La Penseé Sauvage.

Δάσιος, Γ., & Κυριάκη, Κ. (1994). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Αυτοέκδοση.

Davis, P. J., & Anderson, A. J. (1979). *Nonanalytic Aspects of Mathematics and Their Implication for Research and Education, SIAM Review 21*, 112–117.

Draaisma, D. (2002). *Metaphors of memory - A history of ideas about the mind*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1002/jhbs.1122.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). *On visual versus analytical thinking in mathematics*. In L. Burton & C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158). University of London Institute of Education.

Eisenberg, T., & Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham S. (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America.

English, L. (1997). *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images*. Lawrence Earlbaum Associates.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in Mathematics*. Oxford University Press.

Guzmán, De M. (2010). *El rincón de la pizarra*, Edicitiones Piramide, Madrid.

Ζυγκιρίδης, Θ. (2015). *Σημειώσεις μαθήματος Μαθηματική Ανάλυση ΙΙΙ* https://eclass.uowm.gr/courses/ICTE260/.

Hadamard, J. (1995). *Η ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά.* Κάτοπτρο.

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1983). *Geometry and the imagination*, Translated by P. Nemenyi. Chelsea, N.Y.

Hitt, F. (2002). *Representations and mathematics visualization.* International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. *Science, 320,* 454–455. DOI: 10.1126/science.1154659.

Kaput, J. (1992). *Technology and mathematics education*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 515–556). Macmillan.

Knuth, E. J. (2000). *Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study*. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, No 4, 500–508. https://doi.org/10.2307/749655.

Lang, S. (2002). *Άλγεβρα*. Ευρύαλος Απόλλων.

Lopez Jr, A. M. (2001). A classroom notes on: Making connections through geometric visualization. *Mathematics and Computer Education, 35*(2), 116–121.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα Μαθηματικά.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Manfrino, B. R., Ortega, G. A. J., & Delgado, V. R. (2015). *Inequalities A Mathematical Olympiad Approach*. Birkhauser.

McCormick B. H., DeFanti T. A., & Brown M. D. (1987). *Visualization in scientific computing: Definition, domain, and recommendations*. Computer Graphics 21.

Moreno, R., Ozogul, G., & Reisslein, M. (2011). *Teaching with concrete and abstract visual representations: Effects on students' problem solving, problem representations, and learning perceptions*. Journal of Educational Psychology, 103(1), 32. https://doi.org/10.1037/a0021995.

Μουστάκας, Κ., Παλιόκας, Ι., Τσακίρης, Α., & Τζοβάρας, Δ. (2015). *Γραφικά και εικονική πραγματικότητα.* Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. Ανακτήθηκε από https://hdl.handle.net/11419/4491

Μποζαπαλίδης, Σ. Μ. (1997). *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Αυτοέκδοση.

Nelsen, B. R. (1996). *Αποδείξεις χωρίς λόγια.* Εκδόσεις Σαββάλας.

Nelsen, B. R. (2015). *Cameos for Calculus Visualization in the First-Year Course*. The Mathematical Association of America.

Nelsen, B. R. (2016). *Proofs without words III*. The Mathematical Association of America.

Pólya, G. (1971). *How to Solve it. (2nd ed.)*. Princeton University Press.

Pólya, G. (2001). *Η Μαθηματική ανακάλυψη (Πρώτος τόμος)*. Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Πούλος, Α. (2015). *Συνδυαστική Απαρίθμηση και Συνδυαστική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595–610. https://doi.org/10.1007/BF00540062.

Presmeg, N. (1997). *Generalization using imagery in mathematics*. In English, L. (Ed.) Mathematical reasoning. Analogies, metaphors and images. Erlbaum.

Presmeg, N. (2006). *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009 .

Rival, I. (1987). *Picture Puzzling. Mathematicians are Rediscovering the power of Pictorial Reasoning*. *Sciences, 27*(1), 40–46. https://doi.org/10.1002/j.2326-1951.1987.tb02894.x.

Rosken, B., & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words-The role of visualization in Mathematics learning. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 441–448). Progue. PME.

Schoenfeld, A. H., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4., pp. 55–176). Erlbaum.

Schonefeld, S. (2018). Eigenpictures: picturing the eigenvector problem. *The College Mathematical Journal, 26*, 316–319. https://doi.org/10.1080/07468342.1995.11973723.

Sfard, A. (1998). A Mathematician's View of Research in Mathematics Education: An Interview with Shimshon A. Amitsur. In: Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (eds) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. New ICMI Studies Series*, vol 4. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_30.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19*, 7–40.

Spivak, M. (2007). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(4), 353–387. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0604_1.

Takachi, Ђ. and Radovanovic, J. (2009). *On the visualization of the derivative function*. Pedagogical Reality LV (9–10), 1000-1006.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers Group. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Tiwari, S., Obradovic, D., Rathour, L., Mishra, L. N., & Mishra, V. N. (2021). Visualization in mathematics teaching. *Journal of Advances in Mathematics, 21*, 431-439. https://doi.org/10.24297/jam.v20i.9136.

Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition – Mathematics, education and other endangered species. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 63-78). PME.

Yerushalmy, M. and Shternberg, B. (2001). A visual course to the concept of function, in A. Cuoco (ed), *The Roles of Representations in School Mathematics*, 2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook (2001), pp. 251–268.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. The Mathematical Association of America.

*Ο **Χρήστος Κυριαζής** είναι M.Sc. μαθηματικός και διδάσκει Μαθηματικά σε μαθητές από το 1995. Από το 2009 κι έπειτα διδάσκει στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και τα τελευταία εννέα χρόνια στο 2ο Λύκειο Αγίας Βαρβάρας. Κατά καιρούς συμμετέχει με άρθρα και εργασίες για τα Μαθηματικά σε συνέδρια, κυρίως της Μαθηματικής εταιρείας.*

*Ο **Ελευθέριος Πρωτοπαπάς** είναι Ph.D., M.Sc. μαθηματικός, ο οποίος υπηρετεί την τριτοβάθμια εκπαίδευση ως Ε.ΔΙ.Π. στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών στον τομέα Μαθηματικών. Τα τελευταία τρία χρόνια είναι διδάσκει και στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο ως συνεργαζόμενο εκπαιδευτικό προσωπικό (Σ.Ε.Π.). Έχει δημοσιεύσει 20 πρωτότυπες εργασίες σε περιοδικά, 8 ανακοινώσεις σε συνέδρια με δημοσίευση στο βιβλίο των περιλήψεων, 5 προσκεκλημένες ομιλίες και 5 αναρτημένες ανακοινώσεις σε συνέδρια για την τριτοβάθμια εκπαίδευση σε θέματα εφαρμοσμένων μαθηματικών στις βιοεπιστήμες, σε φασματική ανάλυση τελεστών και σε ερευνητικά εκπαιδευτικά θέματα σχετικά με τη διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Παράλληλα έχει 29 ανακοινώσεις σε συνέδρια με κριτές για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, 4 άρθρα σε περιοδικά της ΕΜΕ και 1 άρθρο στο περιοδικό «Μελέτη» του διαδικτυακού* forum www.mathematica.gr.

*Η **Μαρία Σαμπάνη** ζει και κατοικεί στη Λάρισα. Το 2000 πέρασε με υποτροφία στο Μαθηματικό Τμήμα Ιωαννίνων κι ακολούθησε τον τομέα της Γεωμετρίας. Έχει μεταπτυχιακό δίπλωμα στα Θεωρητικά Μαθηματικά και στην Ειδική Αγωγή, τα οποία αποτελούν αντικείμενα συνεχούς μελέτης της. Πρόσφατα εισήχθη στο Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων Θεσσαλίας , ως υποψήφια διδάκτορας με τομέα έρευνας τα Μαθηματικά Μοντέλα Κρυπτογραφίας στους Κβαντικούς Υπολογιστές. Είναι πιστοποιημένη εκπαιδεύτρια ενηλίκων, γνωρίζει τη γραφή Braille, έχει επάρκεια σε 4 ξένες γλώσσες (άριστη γνώση) ενώ μαθαίνει Ρωσικά και Γερμανικά. Από το 2006 ως το 2017 εργάστηκε σε φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης και από το 2017 μέχρι σήμερα εργάζεται στη δημόσια δευτεροβάθμια εκπαίδευση και στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας. Από το 2018 ως σήμερα, είναι επιστημονικός συνεργάτης ιδιωτικής εταιρείας που πραγματοποιεί προγράμματα Erasmus σε καθηγητές δευτεροβάθμιας άλλων χωρών και αναλαμβάνει τις εισηγήσεις στο πρόγραμμα των Μαθηματικών.*

Συμμετέχει από το 2013 σε συνέδρια ως ομιλήτρια με εργασίες και από το 2017 συμμετέχει στα συνέδρια πολύγλωσσων.

A picture equals to thousand … thoughts? The role of visualization in mathematics

Kyriazis Christos
2nd General Lykeio of Agia Varvara
chriskyriazis@gmail.com

Protopapas Eleftherios
School of Applied Mathematical and Physical Sciences
National Technical University of Athens
Department of Mathematics
lprotopapas@math.ntua.gr

Sabani Maria
Gymnasium and Lyceum classes of Armenio
masampani@uth.gr

Abstract

Mathematics often involves the use of imagination and the construction of an intuitive picture of a mathematical problem. Visualization is about understanding the content of a problem by effectively using images to achieve knowledge and discovery. However, this visualization may cause confusion and mathematical misunderstandings. The purpose of this paper is to present mathematical visualization through a series of useful and didactic examples.

Keywords: Visualization, didactic approach, mathematics.

Christos Kyriazis *is an M.Sc. mathematician teaching Mathematics to students since 1995. From 2009 onwards he has been teaching in Secondary Education and for the last nine years at the 2nd High School of Agia Varvara. From time to time he participates with articles and papers on Mathematics in conferences, mainly of the Mathematical Society.*

Eleftherios Protopapas *is a Ph.D., M.Sc. mathematician who serves as Teaching Laboratory Staff at the National Technical University of Athens at the School of Applied Mathematics and Natural Sciences in the department of Mathematics. For the last three years he teaches in the Hellenic Open University as collaborator teaching staff. He has published 20 original papers in journals, 8 conference papers with publication in the book of abstracts, 5 invited talks and 5 posters in conferences on higher education regarding topics of applied mathematics in Biosciences, spectral analysis of operators and research educational topics related to teaching in secondary education. At the same time, he has 29 presentations in conferences with referees for secondary education, 4 articles in journals of the Hellenic Mathematic Society and 1 article in the journal "Meleti" of the online forum www.mathematica.gr.*

Maria Sabani *lives and resides in Larissa. In 2000, she went with a scholarship to the Mathematical Department of Ioannina and followed the field of Geometry. She has a master's degree in Pure Mathematics and Special Education, which are subjects of her continuous study. She was recently admitted to the Department of Digital Systems of Thessaly, as a PhD candidate with a research field of Mathematical Models of Cryptography in Quantum Computers.*

She is a certified adult trainer, knows Braille, has proficiency in 4 foreign languages (excellent knowledge) and she is learning Russian and German. From 2006 to 2017, s0he worked in a secondary school, and from 2017 to the present, she works in public secondary education and in the University. From

2018 to the present, she of Thessaly. She is a scientific partner of a private company that carries out Erasmus programs for secondary school teachers in other countries and undertakes the introductions to the Mathematics program. She has been participating since 2013 in conferences as a speaker with papers and since 2017 she has been participating in multilingual conferences.