Αξιοποίηση εσκεμμένων διδακτικών λαθών στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου.

Κυριαζής Χρήστος
chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
lprotopapas@math.ntua.gr

Σαμπάνη Μαρία
sabani.maria@yahoo.com

Περίληψη.

Η διδασκαλία είναι μια διαδραστική διαδικασία με καθημερινές προκλήσεις. Συχνά γίνονται λάθη από τους μαθητές, τα οποία μπορούν να γίνουν αφορμή για εποικοδομητική συζήτηση και διαπραγμάτευση. Ο εντοπισμός του λάθους και η αντίστοιχη ερμηνεία του είναι απαραίτητη για την άρση των γνωστικών εμποδίων που δημιουργούνται. Είναι χρήσιμο να εντάσσουμε στη διδασκαλία μας εσκεμένα λάθη με σκοπό την ενεργοποίηση των μαθητών, την κατάκτηση, αλλά και την εμβάθυνση της γνώσης. Στη παρούσα εργασία αναπτύσσουμε τέτοια λάθη με επίκεντρο την ύλη των Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου.
Λέξεις κλειδιά: Λάθη, διδασκαλία, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.

Abstract

Teaching is an interactive process with daily challenges. Mistakes are often made by students, which can become an occasion for constructive discussions. The identification of the error and the corresponding interpretation is necessary to remove the cognitive obstacles that are created. It is useful to include deliberate mistakes in our teaching in order to activate the students, for the conquest of knowledge, but also to deepen in it. In this paper, we develop such errors with a focus on the Mathematics of the 3rd class of Lyceumn.

Εισαγωγή.

Σύμφωνα με τον Bachelard (1934), μαθαίνουμε σε βάρος όσων ήδη ξέρουμε υπερβαίνοντας ό,τι αποτελεί εμπόδιο. Ο Brousseau (1997) υποστηρίζει ότι τα λάθη είναι απαραίτητα στη διαδικασία μάθησης και αναφέρει ότι ο δρόμος της μάθησης πρέπει να περάσει από τη προσωρινή κατασκευή των λανθασμένων γνώσεων, επειδή η συνειδητοποίηση των λόγων για τους οποίους αυτή η γνώση είναι λανθασμένη, είναι απαραίτητη στην κατασκευή και την κατανόηση της νέας γνώσης.

Το φορμαλιστικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης συνήθως δεν αξιοποιεί τα λάθη. Αντίθετα, τείνει να δίνει έμφαση στην αποφυγή λαθών (Milteberger, 2008). Αυτή η προσέγγιση έχει τις ρίζες της στον συμπεριφορισμό, ο οποίος είναι μια θεωρία μάθησης που εστιάζει σε παρατηρήσιμες συμπεριφορές και εξωτερικά ερεθίσματα. Στα συμπεριφοριστικά μοντέλα διδασκαλίας και μάθησης, η έμφαση δίνεται στην παροχή σαφών οδηγιών, στην παρουσίαση πληροφοριών με δομημένο και ελεγχόμενο τρόπο και στη χρήση θετικής ενίσχυσης για την ενθάρρυνση σωστών απαντήσεων. Τα λάθη γενικά θεωρούνται ανεπιθύμητα και συχνά διορθώνονται ή αποθαρρύνονται. Η ιδέα είναι να διαμορφωθούν και να ενισχυθούν οι επιθυμητές συμπεριφορές και απαντήσεις μέσω της επανάληψης και της εξάσκησης (Skinner, 2014).

Καθήκον του μαθηματικού δεν είναι μόνο να εξηγήσει έναν νέο ορισμό ή ένα θεώρημα, αλλά να βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πλαίσιο το οποίο θα περιλαμβάνει την δημιουργία και την εξέλιξη των εννοιών. Η εστίαση στα λάθη μπορεί να είναι ευεργετική για τους μαθητές. Η κριτική ανασκόπηση των απαραίτητων μαθηματικών εννοιών με αφορμή ένα λάθος ενισχύει το αίσθημα υπευθυνότητας και τους προτρέπει σε διερεύνηση ουσιαστικών ερωτημάτων. Τα ερωτήματα που προκύπτουν από αυτή τη διαδικασία οδηγούν σε έναν επαναπροσδιορισμό του προβλήματος, σε βαθύτερη κατανόηση του περιεχομένου του, αλλά και σε κάποια απροσδόκητα και νέα αποτελέσματα (Borasi, 1996).

Τα λάθη στα Μαθηματικά δεν αξιοποιούνται όσο θα έπρεπε στη σχολική τάξη. Στα σχολικά βιβλία και στα βιβλία καθηγητή υπάρχουν ελλείματα σε επίπεδο καταγραφής σχετικών παρανοήσεων (Μπαραλός, 2007). Όμως και οι οδηγίες διδασκαλίας δεν δίνουν ιδιαίτερη διάσταση στο θέμα, όπου η αξιοποιήση του λάθους γίνεται μέσω αντιπαραδειγμάτων, αφού για να υπάρξει αντιπαράδειγμα κάπου υπάρχει ένα λάθος (Πλατάρος, 2007).

Η οργάνωση της διδασκαλίας γύρω από τη διδακτική χρήση των λαθών, όπου τα λάθη ενσωματώνονται σκόπιμα σε σχέδια μαθήματος και φύλλα εργασίας για εκπαιδευτικούς σκοπούς, είναι μια διδακτική προσέγγιση που στοχεύει να βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν από τα λάθη τους και να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση του θέματος. Ορισμένα παραδείγματα που καταδεικνύουν τη διδακτική χρήση λαθών είναι τα φύλλα ανάλυσης σφαλμάτων, ασκήσεις διόρθωσης και επεξεργασίας, συζητήσεις με γνώμονα τα σφάλματα και εργασίες επίλυσης προβλημάτων με λάθη (Brown et al, 2014).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε κάποια εσκεμμένα λάθη για τα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου, δίνοντας στον εκπαιδευτικό κατάλληλα εργαλεία, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν βασικές έννοιες και να εμβαθύνουν τις γνώσεις τους.

Ένα «γεωμετρικό» όριο από το σχολικό βιβλίο.

Στην άσκηση 3 της Β΄ ομάδας στη σελίδα 58 του βιβλίου Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ορθή γωνία την $\hat{A}$), κάθετη πλευρά $\gamma = 1$ και στο πρώτο ερώτημα της άσκησης ζητείται να βρεθεί το $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$.

Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ, έχουμε $\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\alpha}$, $\varepsilon\varphi\theta = \beta$. Τότε μία λύση είναι η

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left[\alpha(1 - \eta\mu\theta)\right] = \alpha \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu\theta) = 0, \qquad (1)$$

ενώ μια ακόμα λύση είναι η

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \varepsilon\varphi\theta \right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = 0. \qquad (2)$$

Και οι δύο λύσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Είναι όμως και οι δύο σωστές; Αν δούμε προσεκτικά την (1) στο σημείο που το α βγαίνει εκτός του ορίου υπάρχει ψεγάδι. Η υποτείνουσα α εξαρτάται από τη γωνία θ κι επομένως δεν είναι σωστή αυτή η κίνηση. Η σωστή λύση είναι μόνο αυτή που δίνεται στην (2).

Μια ακόμα λύση που δημιουργεί το αίσθημα της ορθότητας είναι

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta) = \alpha - \beta, \qquad (3)$$

με επιχείρημα ότι τα α, β δεν εξαρτώνται από το θ, το οποίο δεν ισχύει!

Προσοχή στην αντικατάσταση!

Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ \eta\mu\frac{1}{x}\right)$, έχουμε για $x \neq 0$ ότι

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\,\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|, \qquad (4)$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ \eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0. \qquad (5)$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ \eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1. \qquad (6)$$

Το λάθος εντοπίζεται στον δεύτερο τρόπο επίλυσης, όπου θέτοντας $u = \frac{1}{x}$ θα έπρεπε να διακρίνουμε περιπτώσεις για $x > 0$ ή $x < 0$, οπότε το όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{\eta\mu u}{u} = 0$ ή $\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{\eta\mu u}{u} = 0$, αντίστοιχα και όχι $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

Υπολογίζοντας δύο όρια με λάθος τρόπο!

Ας δούμε δύο τρόπους για τον υπολογισμό του ίδιου ορίου:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x^{0} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1, \qquad (7)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u\to 0^{+}} e^{u} = 1. \qquad (8)$$

Παρόλο που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δεν είναι και οι δύο σωστές (Βισκαδουράκης, 2008). Η πρώτη λύση είναι λανθασμένη, διότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε αποσπασματικά κάποιους όρους στο όριο. Για να αναδείξουμε το λάθος μπορούμε να υπολογίσουμε το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e, \qquad (9)$$

ως εξής

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}(1+0)^{x} = \lim_{x\to +\infty} 1^{x} = 1. \qquad (10)$$

Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Δίνεται το ημικύκλιο με εξίσωση $x^2+y^2=1, y\geq 0$ και το σημείο $A(2,0)$. Ζητείται το σημείο του ημικυκλίου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α (Δαμβακάκης κ.ά., 2008). Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο του ημικυκλίου, η απόσταση του Μ από το Α είναι ίση με

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+1-x^2}=\sqrt{5-4x}\,. \tag{11}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση d με

$$d(x)=\sqrt{5-4x},\ x\in D_d=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right], \tag{12}$$

όπου

$$d'(x)=\frac{-2}{\sqrt{5-4x}},\ x\in D_{d'}=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right). \tag{13}$$

Συνεπώς

$$d'(x)<0,\ x\in D_{d'}=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right), \tag{14}$$

οπότε η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $x\in D_d=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$ και κατά συνέπεια παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{5}{4}$ το $d\left(\frac{5}{4}\right)=0$.

Όμως σχεδιάζοντας το ημικύκλιο και το σημείο Α είναι φανερό ότι η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται για το σημείο $B(1,0)$ του ημικυκλίου. Το λάθος έγκειται στο γεγονός ότι για το ημικύκλιο ισχύει $-1\leq x\leq 1$, οπότε και η συνάρτηση d πρέπει να ορισθεί στο διάστημα $[-1,1]$. Τότε λόγω της μονοτονίας της d το ελάχιστο επιτυγχάνεται για $x=1$, το οποίο είναι το $d(1)=1$ και έτσι προκύπτει για το σημείο $B(1,0)$.

Είναι παραγωγίσιμες;

Πολύ συχνά χρησιμοποιείται η έκφραση: μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Αυτό όμως δεν είναι πάντα αληθές και η χρήση του πρέπει να γίνεται με φειδώ (Συγκελάκης, 2014). Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ορίζεται στο $[-1,1]$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\sqrt{x}$, $1-x^2$, αλλά στο $(-1,1)$. Τέτοια προβλήματα ανακύπτουν όταν έχουμε τις μορφές $|f|$ ή $\sqrt[\nu]{f}$.

Θεώρημα μέσης τιμής σε διάστημα με μεταβλητό άκρο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \tag{15}$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (Ντούγιας, 2007). Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ.) στο $[0,x]$ αν $x>0$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ έτσι ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow x\eta\mu\frac{1}{x}=2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}. \tag{16}$$

Όμως αν το $x\to 0^+$ και αφού $\xi\in(0,x)$, ισχύει $\xi\to 0^+$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0, \tag{17}$$

$$\lim_{\xi\to 0^+}\left(2\xi\eta\mu\frac{1}{\xi}\right)=0, \tag{18}$$

ως γινόμενα μηδενικής επί φραγμένης συνάρτησης, άρα από την (16) ισχύει

$$\lim_{\xi\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}=0. \tag{19}$$

Όμως ξέρουμε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}=0$ δεν υπάρχει. Το λάθος εντοπίζεται στο ότι μπορούμε να πούμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}=0,\ 0<\xi<x, \tag{20}$$

το οποίο δεν συνεπάγεται τη σχέση (19), διότι το ξ δεν παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές στην περιοχή δεξιά του μηδενός. Στην ουσία έχουμε αποδείξει (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2016) πως για μια συγκεκριμένη ακολουθία τιμών της μεταβλητής ξ (εξαρτώμενης από το x) ισχύει η (19).

Ενδιαφέρον πρόσημο ορισμένου ολοκληρώματος.

Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^{-4}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \tag{21}$$

και

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^{-4}dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} < 0\,, \qquad (22)$$

το οποίο φαίνεται παράξενο, αφού ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αναμένουμε $\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$. Το λάθος αφορά το σημείο στο οποίο ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 1]$, στο οποίο η f δεν είναι συνεχής (Δαμβακάκης κ.ά., 2008).

Παράξενο ορισμένο ολοκλήρωμα.

Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f(2x) = f(x)$, $x \in [1, 2]$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_{1}^{2} f(x)dx$ με την ακόλουθη διαδικασία (Δαμβακάκης κ.ά., 2008):

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(2x)dx = \int_{0}^{1} f(u)du\,, \qquad (23)$$

οπότε

$$\int_{0}^{2} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(u)du = 0 \Rightarrow \int_{1}^{2} f(x)dx = 0\,, \qquad (24)$$

κάτι το οποίο δεν μπορεί να είναι αληθές, διότι για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ ισχύει η $2f(2x) = f(x)$, αλλά $\int_{1}^{2} f(x)dx = \ln 2$! Το πρόβλημα εδώ βρίσκεται στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό του $\int_{1}^{2} f(x)dx$ έχουμε ότι $x \in [1, 2]$, ενώ στη διάρκεια της λύσης μας χρησιμοποιήσαμε ότι $x \in [0, 2]$.

Όταν οι φταίχτες είμαστε εμείς…

Στις εξετάσεις των Μαθηματικών Α΄ Δέσμης, το 1997 είχε τεθεί το θέμα: Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι $g(x+y) = e^{y}g(x) + e^{x}g(y) + xy + \alpha$. Να αποδείξετε ότι $g(0) = -\alpha$.

Μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να θέσουν στη σχέση $x=0$, $y=0$ και $x=y=0$, να συζητήσουμε τα συμπεράσματα τους, καθώς και να αναπτύξουν τι πιστεύουν ότι συμβαίνει. Το παράδοξο προκύπτει επειδή η συναρτησιακή σχέση δεν υποστηρίζονταν από καμία συνάρτηση.

Σωστό αποτέλεσμα, αλλά με… λάθος τρόπο.

Στις πανελλήνιες εξετάσεις του 2023 το Δ4 ερώτημα έδινε δύο αρχικές συναρτήσεις F, G μιας συνάρτησης f στο $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$ όπου x_1, x_2 είναι οι μοναδικές ρίζες της συνάρτησης f στο $(0,2)$ με $x_1<x_2$ και ζητούσε στο πρώτο υποερώτημα να αποδειχτεί η σχέση $F(x_2)+G(x_1)=0$. Μια από τις λύσεις που έδωσαν κάποιοι μαθητές δίνεται ακολούθως.

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_1,\ x_2]$ για τις F, G, ισχύουν

$$F'(\xi)=\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow f(\xi)=\frac{F(x_2)}{x_2-x_1}, \tag{25}$$

$$G'(\xi)=\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow f(\xi)=-\frac{G(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{26}$$

Από τις (25), (26) έχουμε

$$F(x_2)=-G(x_1)\Rightarrow F(x_2)+G(x_1)=0. \tag{27}$$

Είναι σωστή η λύση; Είναι προφανές πως ο λύτης εδώ θεώρησε πως το ξ του Θ.Μ.Τ είναι το ίδιο, το οποίο γενικά δεν ισχύει!

Η αξία της επαλήθευσης στην εύρεση της τιμής μιας παραμέτρου.

Ας αναλογιστούμε την ακόλουθη άσκηση (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2019). Αν $a^x\le x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $a>0$, να βρείτε τον a. Η άσκηση είναι κλασική και για την αντιμετώπισή της θεωρούμε συνάρτηση f με

$$f(x)=a^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}, \tag{28}$$

οπότε η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x)\le 0=f(0),\ x\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=0$. Επιπλέον, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε

$$f'(0)=0\Leftrightarrow a=e. \tag{30}$$

Εύκολα κάποιος μπορεί να διαπιστώσει ότι η συνάρτηση f που προκύπτει έχει τύπο $f(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$ και όχι μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή $a=e$ δεν ικανοποιεί τα δεδομένα της άσκησης, άρα θα πρέπει να απορριφθεί.

Ποια είναι η συνάρτηση;

Η αξία της επαλήθευσης αναδεικνύεται και στην ακόλουθη άσκηση. Να βρεθεί η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f(x+y)=f(x-y)+2x^3$. Κάποιος μπορεί εύκολα να θέσει $y=0$ και να βρει ότι η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=x^3$, η οποία δεν επαληθεύει τη δοθείσα σχέση (Συγκελάκης, 2014).

Ένα λάθος με κορυφαία διδακτική αξία.

Γνωρίζουμε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η σύνθεσή τους είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Το 2019 διατυπώθηκε ο ισχυρισμός ότι αυτή η πρόταση δεν είναι σωστή, παραθέτοντας το παράδειγμα (Χατζόπουλος, 2019).

Έστω οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x)=e^x,\ x\le 0, \tag{29}$$

$$g(x)=-x^2,\ x\in\mathbb{R}. \tag{30}$$

Η συνάρτηση $g\circ f$ ορίζεται στο $A=D_f=(-\infty,0]$, διότι η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$, όπου $f(A)=(0,1]\subseteq D_g=\mathbb{R}$ και

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^x)=-e^{2x},\ x\le 0. \tag{31}$$

Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,0]$ έχουμε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, ενώ η gof είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή δεν ισχύει η γνωστή πρόταση!

Είναι δεδομένο ότι το παράδειγμα είναι λανθασμένο και η αναγνώριση των λαθών αναδεικνύει τη διδακτική του αξία. Συγκεκριμένα, η g δεν είναι γνησίως αύξουσα σε όλους τους πραγματικούς, ενώ για την επιβεβαίωση του λανθασμένου ισχυρισμού ο συγγραφέας χρησιμοποιεί για τη σύνθεση μόνο το κομμάτι της g στο οποίο είναι γνησίως φθίνουσα και όχι και εκείνο που είναι γνησίως αύξουσα!

Συμπεράσματα.

Στα Μαθηματικά όλα είναι ορισμένα με σαφήνεια και επικρατεί τάξη. Την τάξη αυτή μπορεί να διαταράξει ένα λάθος. Ένα τέτοιο λάθος μέσα στην σχολική τάξη μπορεί να έχει ευεργετικά αποτελέσματα, δεδομένου ότι θα κινητοποιήσει τους μαθητές, θα αυξήσει την προσοχή τους και θα διεγείρει την περιέργειά τους. Τέτοια λάθη είναι χρήσιμο να ενσωματώνονται στη διδασκαλία διότι βοηθούν δραστικά στην αποσαφήνιση εννοιών, στην υπερπήδηση γνωστικών εμποδίων με στόχο τη γνώση και την κατανόηση. Δυστυχώς στη σχολική πραγματικότητα τέτοιες επισημάνσεις είναι σε έλλειψη, κάτι το οποίο είναι καλό να ληφθεί υπόψη, αφού βρισκόμαστε σε περίοδο συγγραφής νέων σχολικών βιβλίων.

Ενδεικτική βιβλιογραφία.

Bachelard G. (1934). *The New Scientific Spirit*. Boston: Beacon Books.

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathematics*, 1970-1990. Kluwer Academic Publishers.

Brown P. C., Roediger H. L. and McDaniel M. A. (2014). *Make It Stick: The Science of Successful Learning*. Belknap Press: An Imprint of Harvard University Press.

Milterberger G. R. (2008). *Behavior Modification: Principles and Procedures*. Thomson Wadsworth.

Skinner B. F. (2014). *Science and Human Behavior*. Pearson Education.

Βισκαδουράκης Β. (2008). Περιοδικό το φι. Τεύχος 5.

Δαμβακάκης Γ., Κτιστάκης Ν., Λάμπρου Μ. και Σπανουδάκης Κ. Ν. (2008). *Επαναληπτικά θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου.* Εκδόσεις Καγκουρό Ελλάς.

Κυριαζής Χ. και Πρωτοπαπάς Ελ. (2016). Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού σε διάστημα με μεταβλητό άκρο, *Πρακτικά 8ης Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας*, σελ. 621 – 632.

Κυριαζής Χ. και Πρωτοπαπάς Ελ. (2019). Αναψηλαφώντας την έννοια της παραμέτρου στα Μαθηματικά του Λυκείου, *Πρακτικά 36ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, σελ. 507 – 571.

Μπαραλός Γ. (2007). Το λάθος ως στοιχείο σχεδιασμού της διδασκαλίας στα Μαθηματικά. *Πρακτικά συνεδρίου του ΚΕΕ με τίτλο: Τα λάθη των μαθητών: δείκτες αποτελεσματικότητας ή κλειδιά για τη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης;* σελ.345 – 354.

Ντούγιας Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Leader Books.

Πλατάρος Π. Γ. (2007) Το αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία συνήθων λαθών στα Μαθηματικά. *Πρακτικά συνεδρίου του ΚΕΕ με τίτλο: Τα λάθη των μαθητών: δείκτες αποτελεσματικότητας ή κλειδιά για τη βελτίωση της ποιότητας της εκπαίδευσης;* σελ. 380 – 375.

Συγκελάκης Α. (2014). Λάθη και παρανοήσεις στα Μαθηματικά του Λυκείου. *Πρακτικά 6ης Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας,* σελ. 734-749.

Χατζόπουλος Γ. (2019). Ας μιλήσουμε για τη σύνθεση των συναρτήσεων. *Πρακτικά 36ου Συνεδρίου της ΕΜΕ*, σελ. 1007 – 1016.