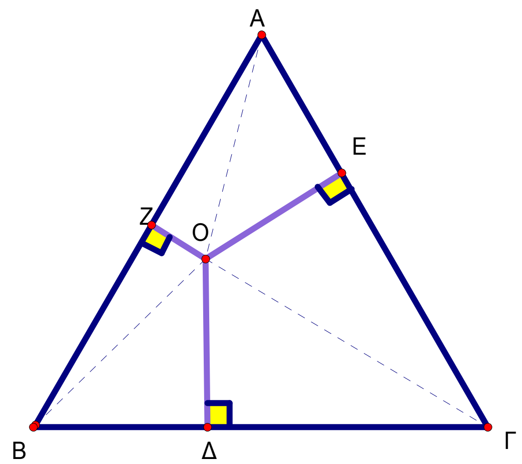
Από σημείο Ρ εντός κύκλου φέρνουμε 3 χορδές που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες 60 μοιρών και τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α,Β, Γ,Δ,Ε,Ζ έτσι ώστε τα σημεία αυτά να βρίσκονται στον κύκλο με αυτή τη σειρά.

Να αποδειχθεί ότι ΡΑ + ΡΓ + ΡΕ = ΡΒ + ΡΔ + ΡΖ **Μπάμπης**

Λήμμα

Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου στο εσωτερικό του από τις πλευρές του ισοπλεύρου είναι σταθερό και μάλιστα ισούται με το ύψος του.



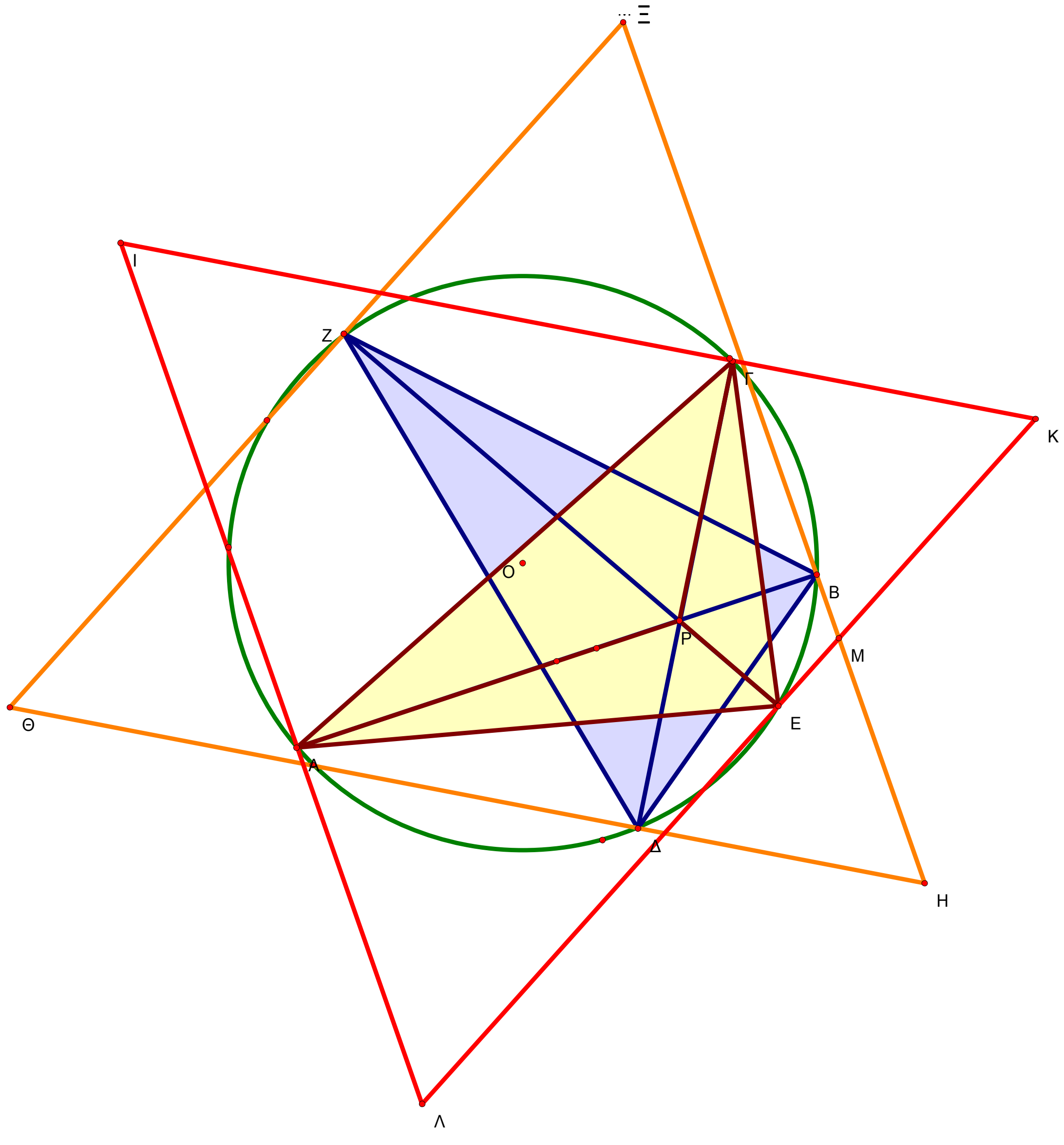
Απόδειξη

Έστω ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ=α τότε

(ΑΒΓ)= (ΒΟΑ)+(ΒΟΓ)+(ΓΟΑ) ή

α $υ_α$=α ΟΖ+αΟΔ+αΟΕ ή

$υ_α$=ΟΖ+ΟΔ+ΟΕ όεδ



Παρατήρηση

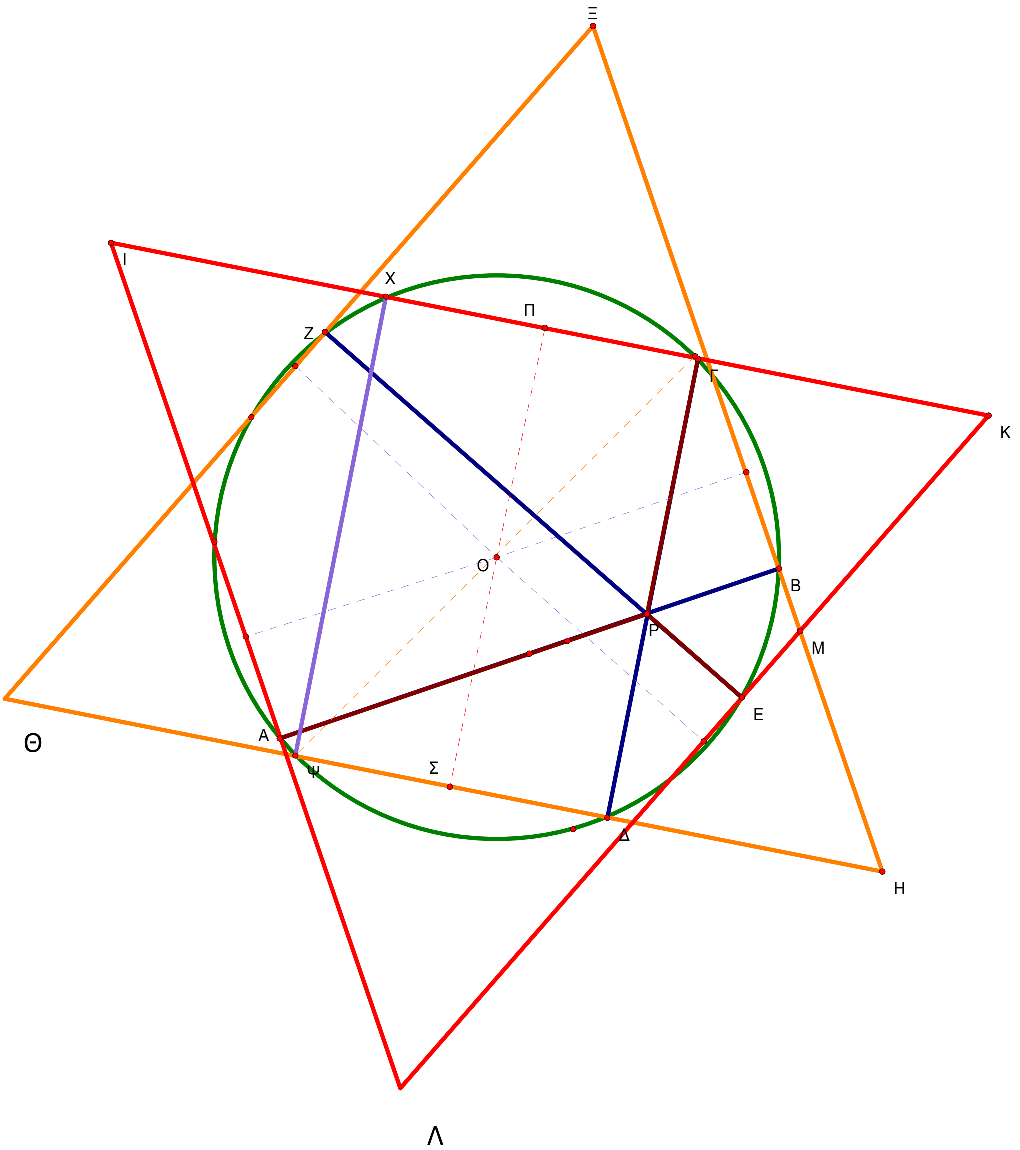
Το σημείο Ρ είναι το σημείο Fermat –Steiner των τριγώνων ΖΔΒ και ΑΕΓ (δηλαδή το σημείο του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τις κορυφές των αντιστοίχων τριγώνων είναι ελάχιστο.

Αυτό συμβαίνει όταν το Ρ βλέπει τις πλευρές του τριγώνου απέναντί του υπό γωνία 120^o .

Αρκεί να δείξουμε επομένως ότι τα τρίγωνα έχουν το ίδιο ελάχιστο άθροισμα (ΡΑ+...).

Στα άκρα των ΖΕ ,ΔΕ και ΑΒ φέρω **τις καθέτους** προς αυτές που σχηματίζουν δύο ισόπλευρα τρίγωνα.Αυτά είναι ισόπλευρα έπειδή έχουν όλες τις γωνίες τους 60^o (Πχ γωνΘ=60^o ως παραπληρωματική της ΖΡΔ αφού ΖΡΔ=120^o εκ κατασκευής.)

[Δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων του Ρ από τις κορυφές του ενός τριγώνου (Πχ του ΑΕΤ) θα το δούμε ως άθροισμα αποστάσεων του Ρ από τις πλευρές του «περιγεγραμμένου» του ισοπλεύρου τριγώνου (ΙΛΚ) για να εφαρμοστεί το λήμμα.]



Φέρω το ΧΨ .
ΤΔΨ=90^o άρα ΨΤ διάμετρος άρα ΨΧΤ=90^o επομένως ΨΔΤΧ ορθογώνιο και επομένως τα αποστήματα ΟΣ και ΟΠ είναι ίσα (ΧΑ/2) και κείνται επ'ευθείας. Επομένως η ευθεία ΙΚ με στροφή 180^o περί το Ο πέφτει πάνω στην ευθεία ΘΗ. Το ίδιο θα συμβεί και με τις ευθείες – φορείς των άλλων πλευρών των ισοπλεύρων ανά δύο. Δηλαδή το ένα τρίγωνο προκύπτει από στροφή του άλλου περί το Ο κατά 180^o . Συνεπώς τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως έχουν ίσα ύψη. ($υ_{ΘΞΗ} = υ_{ΛΙΚ}$) **Άρα βάσει του λήμματος** είναι

$ΡΖ+ΡΒ+ΡΔ=υ_{ΘΞΗ}$

$ΡΑ+ΡΤ+ΡΕ= υ_{ΛΙΚ}$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο

Math_finder Γ. Π