

Μία ενδιαφέρουσα διαφορική ανίσωση

Πρόβλημα. Έστω ότι ή $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχής, όπου $D \subset \mathbb{R}^2$, άνοικτό, και έστω $\varphi, \psi : [\tau : T] \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμες συναρτήσεις. Αν $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$, και

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{και} \quad \psi'(t) < f(t, \psi(t)), \quad \text{διά κάθε } t \in [\tau, T],$$

τότε δείξατε ότι $\psi(t) < \varphi(t)$, διά κάθε $t \in (\tau, T]$.

Απόδειξη. Έστω ότι κάτι τέτοιο δέν ισχύει. Τότε υπάρχει $t_1 \in (\tau, T]$, ώστε

$$\psi(t_1) \geq \varphi(t_1).$$

Ίσχυρισμός 1. Υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$\varphi(t) > \psi(t), \quad \text{διά κάθε } t \in (\tau, \tau + \delta).$$

Απόδειξη του Ίσχυρισμού 1. Καθώς $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$, τότε

$$\psi'(\tau) < f(\tau, \psi(\tau)) = f(\tau, \varphi(\tau)) = \varphi'(\tau).$$

Όποτε για $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varphi'(\tau) - \psi'(\tau))$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε

$$0 < h < \delta \implies \left| \frac{(\varphi(\tau + h) - \psi(\tau + h)) - (\varphi(\tau) - \psi(\tau))}{h} - (\varphi'(\tau) - \psi'(\tau)) \right| < \varepsilon,$$

και συνεπώς, διά κάθε $h \in (0, \delta)$

$$\frac{\varphi(\tau + h) - \psi(\tau + h)}{h} > (\varphi'(\tau) - \psi'(\tau)) - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

και άρα $\varphi(t) > \psi(t)$, διά κάθε $t \in (\tau, \tau + \delta)$.

Ίσχυρισμός 2. Υπάρχει $t^* \in (\tau, t_1]$, ώστε

$$\varphi(t^*) = \psi(t^*), \quad \text{ένω} \quad \varphi(t) > \psi(t), \quad \text{διά κάθε } t \in (\tau, t^*).$$

Έστω ότι έχομε άποδείξει τον Ίσχυρισμό 2. Τότε διά κάθε $t \in (\tau, t^*)$, έχομε

$$\frac{\psi(t) - \psi(t^*)}{t - t^*} > \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*},$$

και άρα

$$\psi'(t^*) = \lim_{t \rightarrow t^*} \frac{\psi(t) - \psi(t^*)}{t - t^*} \geq \lim_{t \rightarrow t^*} \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*} = \varphi'(t^*).$$

Ταυτοχρόνως, αφού $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$, τότε έχουμε ότι

$$\varphi'(t^*) = f(t^*, \varphi(t^*)) = f(t^*, \psi(t^*)) > \psi'(t^*).$$

Άτοπο. Απομένει να δείξουμε τόν Ίσχυρισμό 2.

Απόδειξη του Ίσχυρισμού 2. Καθώς ισχύει ότι $\varphi(t) > \psi(t)$, διὰ κάθε $t \in (\tau, \tau + \delta)$, ενώ $\varphi(t_1) \leq \psi(t_1)$, τότε το Θεώρημα της Ένδιαμέσου Τιμής παρέχει $t_2 \in [\tau + \delta, t_1]$, όπου $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$. Θέτομε

$$S = \{t \in [\tau + \delta, T] : \varphi(t) = \psi(t)\}.$$

Το σύνολο S είναι μη κενό, κάτω φραγμένο από το $\tau + \delta$ και κλειστό, λόγω της συνέχειας των φ και ψ . Άρα διαθέτει ελάχιστο στοιχείο t^* . Δηλαδή, $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$, ενώ ταυτοχρόνως,

$$\varphi(t) > \psi(t), \quad \text{διὰ κάθε } t \in (\tau, t^*).$$

Άλλιώς, αν υπήρχε $t' \in (\tau, t^*)$, με $\varphi(t') \leq \psi(t')$, τότε καθώς στο $(\tau, \tau + \delta)$ ισχύει ότι $\varphi(t) > \psi(t)$, λόγω του Θεωρήματος της Ένδιαμέσου Τιμής, θα υπήρχε $t'' \in (\tau, t']$, με $\varphi(t'') = \psi(t'')$, και άρα $t'' < t^*$. Άτοπο. $\square$

Παρατήρηση. Αν ή υπόθεση

$$\psi'(t) < f(t, \psi(t)), \quad \text{διὰ κάθε } t \in [\tau, T],$$

αντικατασταθεί από την ελαφρώς ασθενέστερη υπόθεση

$$\psi'(t) < f(t, \psi(t)), \quad \text{διὰ κάθε } t \in (\tau, T],$$

τότε το συμπέρασμα παύει να ισχύει.

Αντιπαράδειγμα. Έστω $f(t, x) = 4|x|^{1/2}$, και $\varphi, \psi : [0, \infty)$, με τύπους:

$$\varphi(t) \equiv 0, \quad \psi(t) = t^2.$$

Τότε ή $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, ενώ

$$\varphi'(t) = 0 = 4|\varphi(t)|^{1/2} = f(t, \varphi(t)), \quad \text{διὰ κάθε } t \geq 0.$$

Ταυτοχρόνως όμως,

$$\psi'(t) = 2t < 4t = 4|\psi(t)|^{1/2} = f(t, \psi(t)), \quad \text{διὰ κάθε } t > 0.$$

αλλά

$$\psi(t) > \varphi(t), \quad \text{διὰ κάθε } t > 0.$$