

14<sup>th</sup> International Week  
Dedicated to Maths 2024

15 - 21 Απριλίου 2024 στο Διεθνές Πανεπιστήμιο Ελλάδος

Αφιερωμένη στα 50 χρόνια

από την ίδρυση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας

Η Μαθηματική  
Νοημοσύνη

πέραν των παρατηρήσεων και  
πέραν της Τεχνητής Νοημοσύνης

Συνδιοργάνωση:

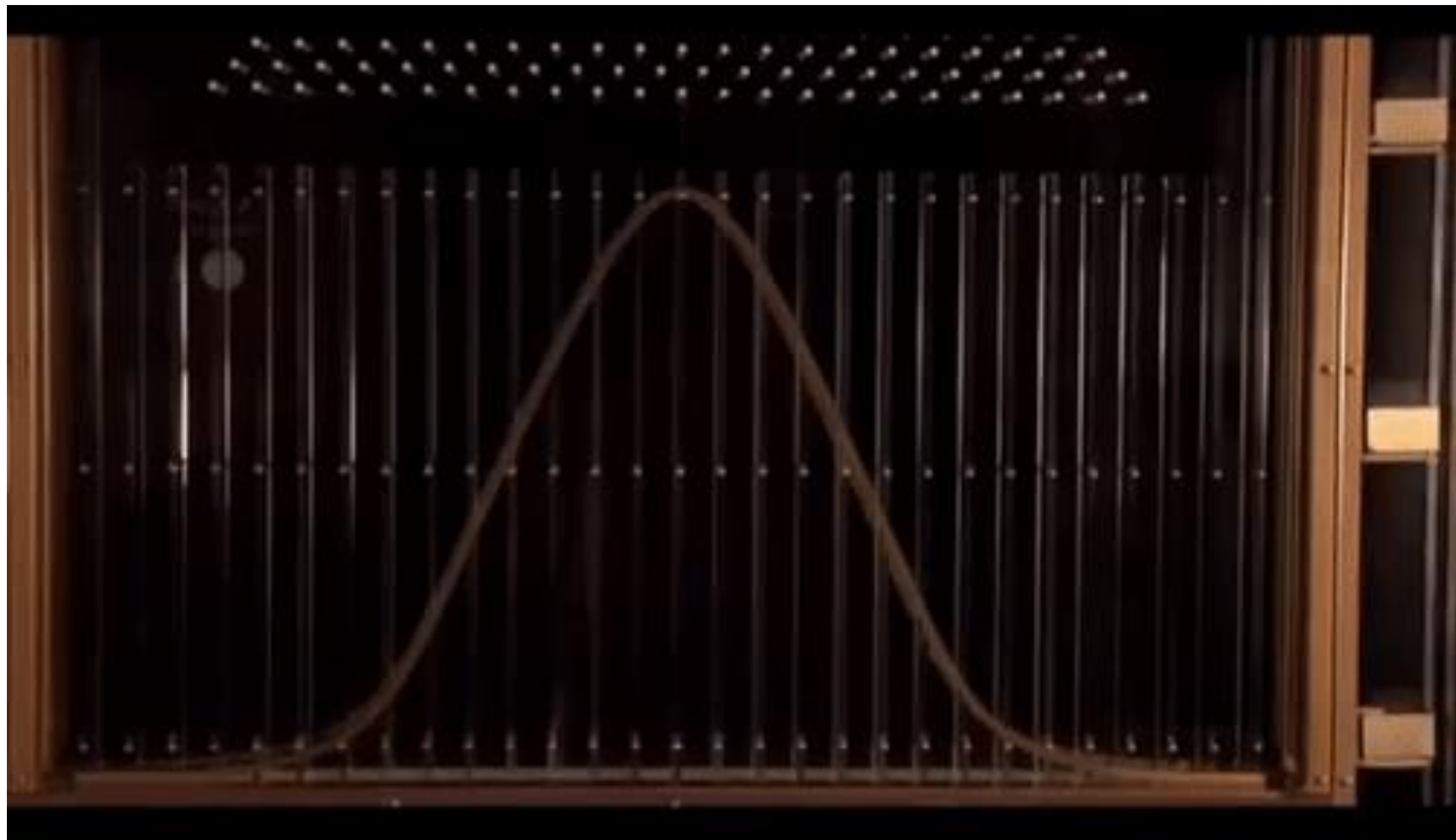
- Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, [Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας](#)
- Διεθνές Πανεπιστήμιο Ελλάδος
- Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Σχολή Θετικών Επιστημών  
[Παράρτημα ΕΜΕ Λάρισας](#), [Παράρτημα ΕΜΕ Ημαθίας](#), [Παράρτημα Σερρών](#).

Κατάθεση εργασιών για κρίση μέχρι 20 Μαρτίου 2024 στο email: [emethes2024@gmail.com](mailto:emethes2024@gmail.com)

Συνεχής ενημέρωση στην σελίδα: <https://14math2024.blogspot.com>

# ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ NORMAL DISTRIBUTION

Κυριαζής Χρήστος  
Πρωτοπαπάς Ελευθέριος  
Σαμπάνη Μαρία



# ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (NORMAL DISTRIBUTION)

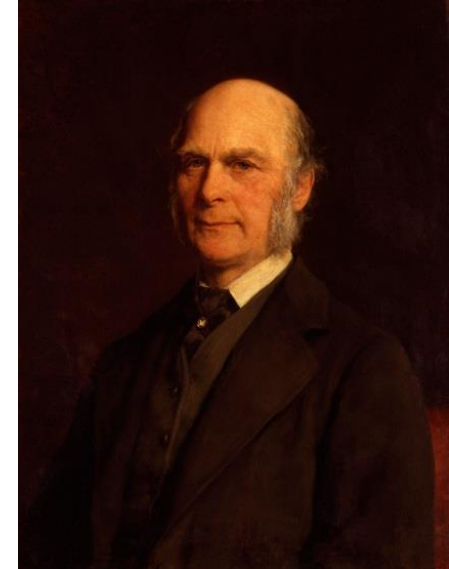
- ❖ Η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής
1. Πολλές τυχαίες μεταβλητές περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή ( ή από κατανομές που μπορεί αυτή να προσεγγίσει)
  2. Οι ιδιότητές της αξιοποιούνται στην Στατιστική Συμπερασματολογία

# ΓΙΑΤΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ;;;

Πήρε την ορολογία «κανονική» μετά από επιστημονικές δημοσιεύσεις τον 19<sup>ο</sup> αιώνα που έδειχναν ότι πολλά φαινόμενα φαινόταν να «αποκλίνουν κανονικά» από τον μέσο όρο (Peirce –Galton).

Η ιδέα της «κανονικής μεταβλητότητας» έγινε δημοφιλής ως κανονική καμπύλη από τον φυσιοδίφη Sir Francis Galton στο έργο του το 1889 Natural Inheritance.

Ο Galton δεν εξηγεί γιατί χρησιμοποιεί τον όρο "κανονικό", αλλά φαίνεται η ύπαρξη της συμμόρφωσης με έναν κανόνα (= Ένα πρότυπο, μοντέλο, τύπος).



# ΓΙΑΤΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ;;;

Ο Karl Pearson έγραψε, στο «Συμβολές στη Μαθηματική Θεωρία της Εξέλιξης»:

*"Μια καμπύλη συχνότητας, η οποία για πρακτικούς σκοπούς, μπορεί να αναπαρασταθεί από την καμπύλη σφάλματος, για το υπόλοιπο αυτού του άρθρου θα ονομάζεται κανονική καμπύλη"*

Αν και ο Pearson δεν εισήγαγε τον όρο, είναι δίκαιο να πούμε ότι η συνεπής και αποκλειστική χρήση αυτού του όρου στις εκδόσεις του, οδήγησε στην υιοθέτησή του σε ολόκληρη τη στατιστική κοινότητα.



# ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ...



- Η προέλευσή της μπορεί να εντοπιστεί σε ένα μεγάλο Γάλλο μαθηματικό τον Abraham de Moivre το 1733.
- Είχε επιστημονικό ενδιαφέρον για τον τζόγο και συχνά λειτουργούσε ως σύμβουλος των τζογαδόρων για τον προσδιορισμό των πιθανοτήτων.
- Μελετούσε την κατανομή πιθανοτήτων ρίψης νομισμάτων (πιθανότητα 60 ή περισσότερων κεφαλών σε 100 ρίψεις)

# ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ...

Μεταβλητές (φαινόμενα) όπως το ύψος, το βάρος και η δύναμη χαρακτηρίζονται με κανονική κατανομή.

Γι' αυτό είναι δυνατό να προσδιοριστεί το βάρος ή το ύψος σε σύγκριση με άλλους

Ένας Βέλγος αστρονόμος, ο Lambert Quetelet, ήταν ο πρώτος που παρατήρησε τη σχέση μεταξύ της κατανομής βάρους και ύψους και της κανονικής καμπύλης.



# ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- 1809 από τον μεγάλο Γερμανό Μαθηματικό Carl Friedrich Gauss
- Διαπίστωσε ότι τα σφάλματα που γίνονται σε αστρονομικές παρατηρήσεις μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή





# ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η κανονική κατανομή είναι γνωστή και ως

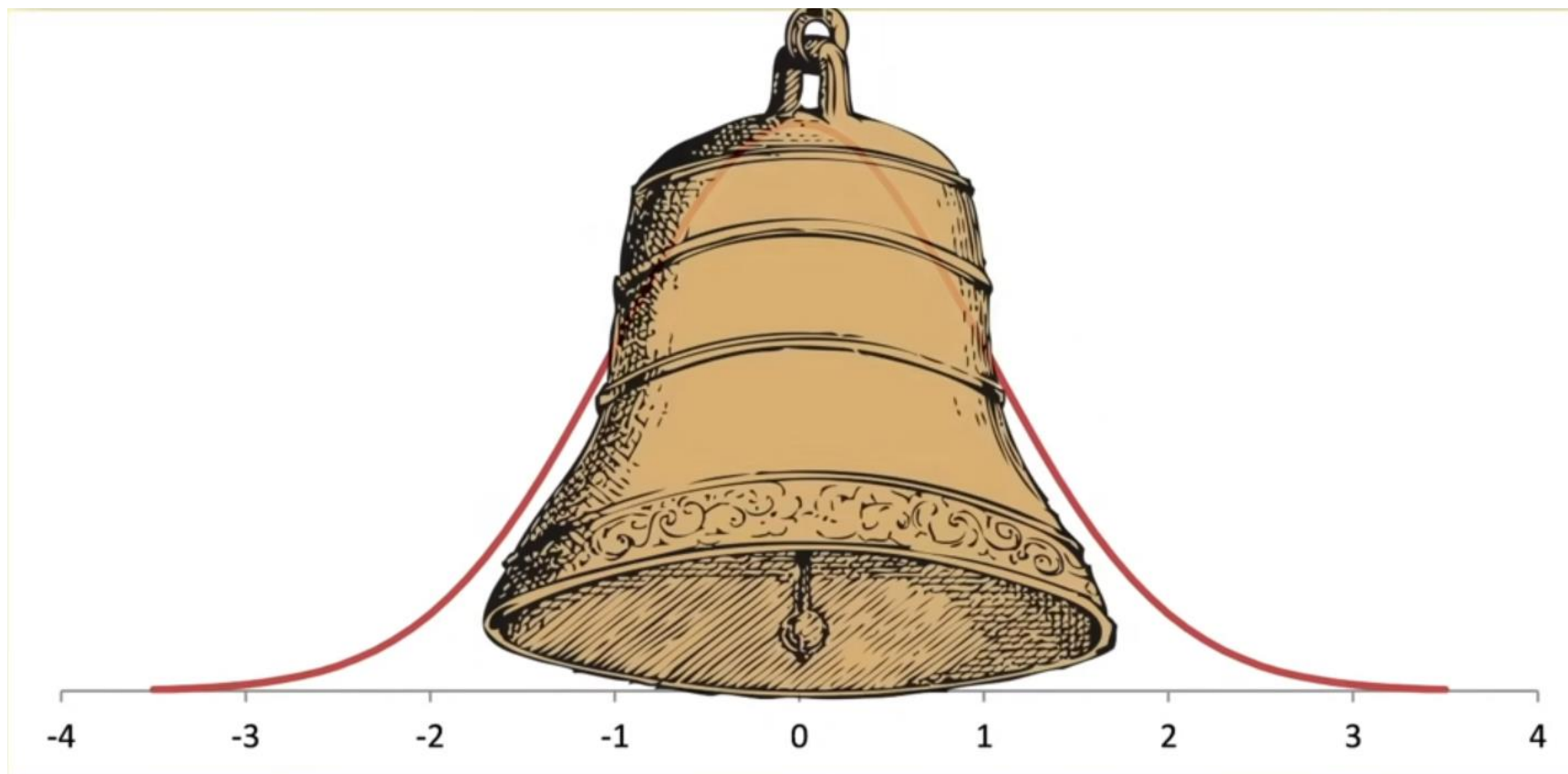
**Κατανομή Gauss ή Γκαουσιανή Κατανομή** από τον

C.F. Gauss

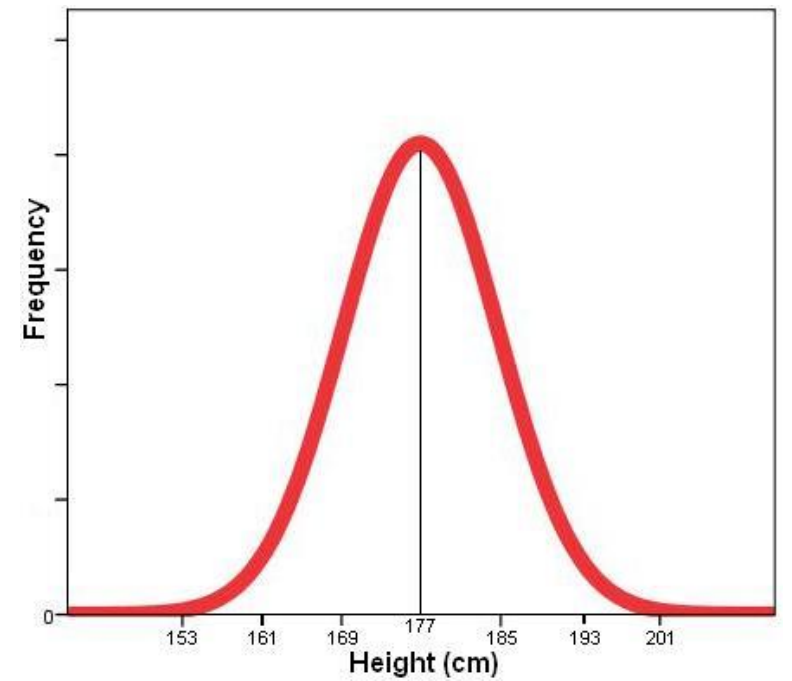
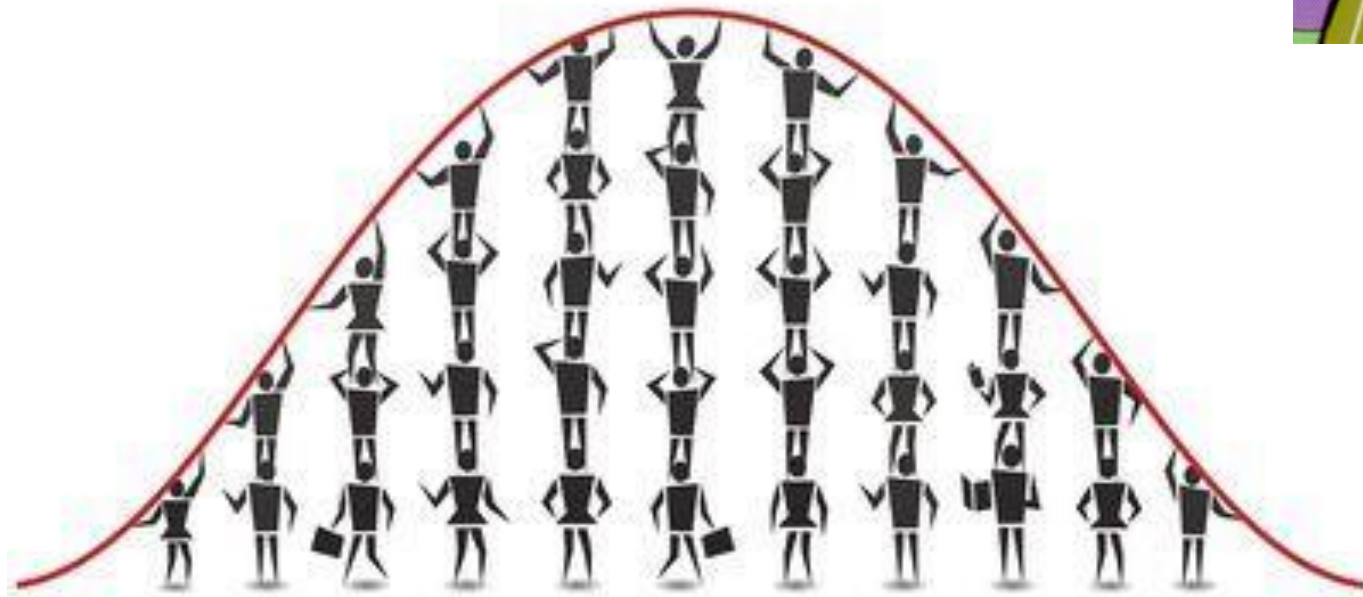
Δύο μαθηματικοί ο Adrian και ο Gauss ανέπτυξαν τύπο για κανονική κατανομή ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

Ο τύπος έδειξε ότι τα σφάλματα προσεγγίζονται καλά από την κανονική καμπύλη.

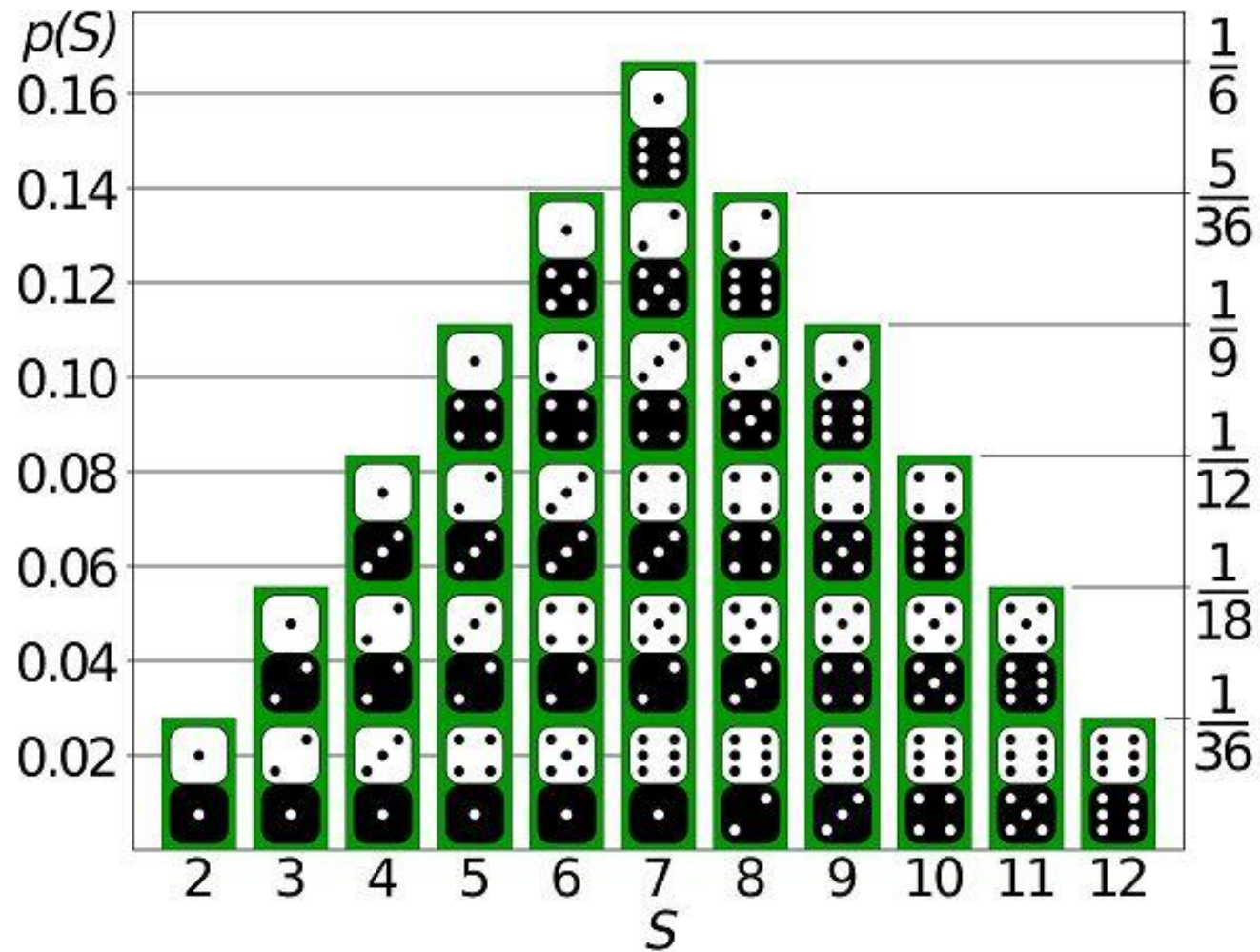
# ΚΑΜΠΑΝΑ (BELL CURVE)



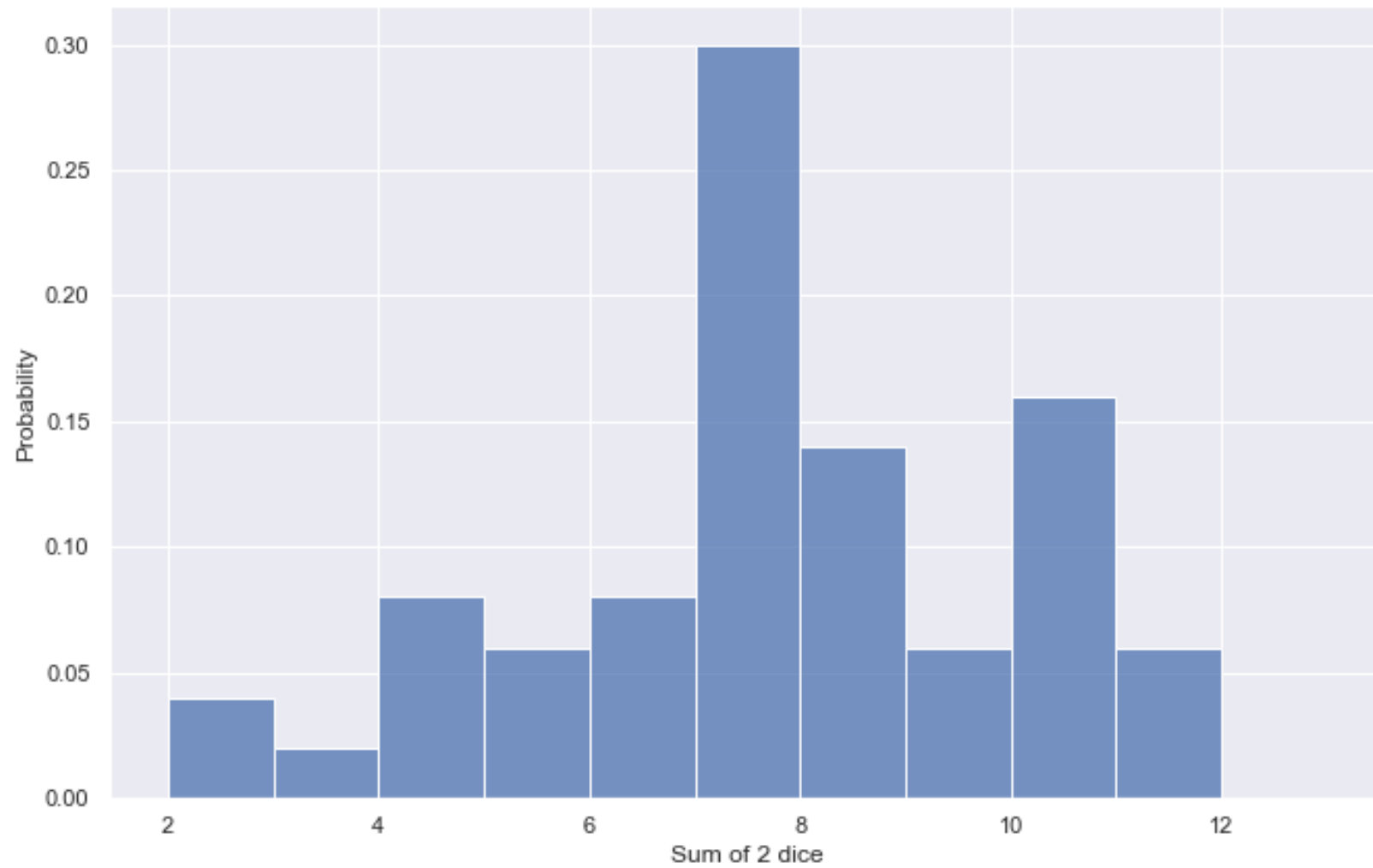
# Ύψος



# ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΩΝ



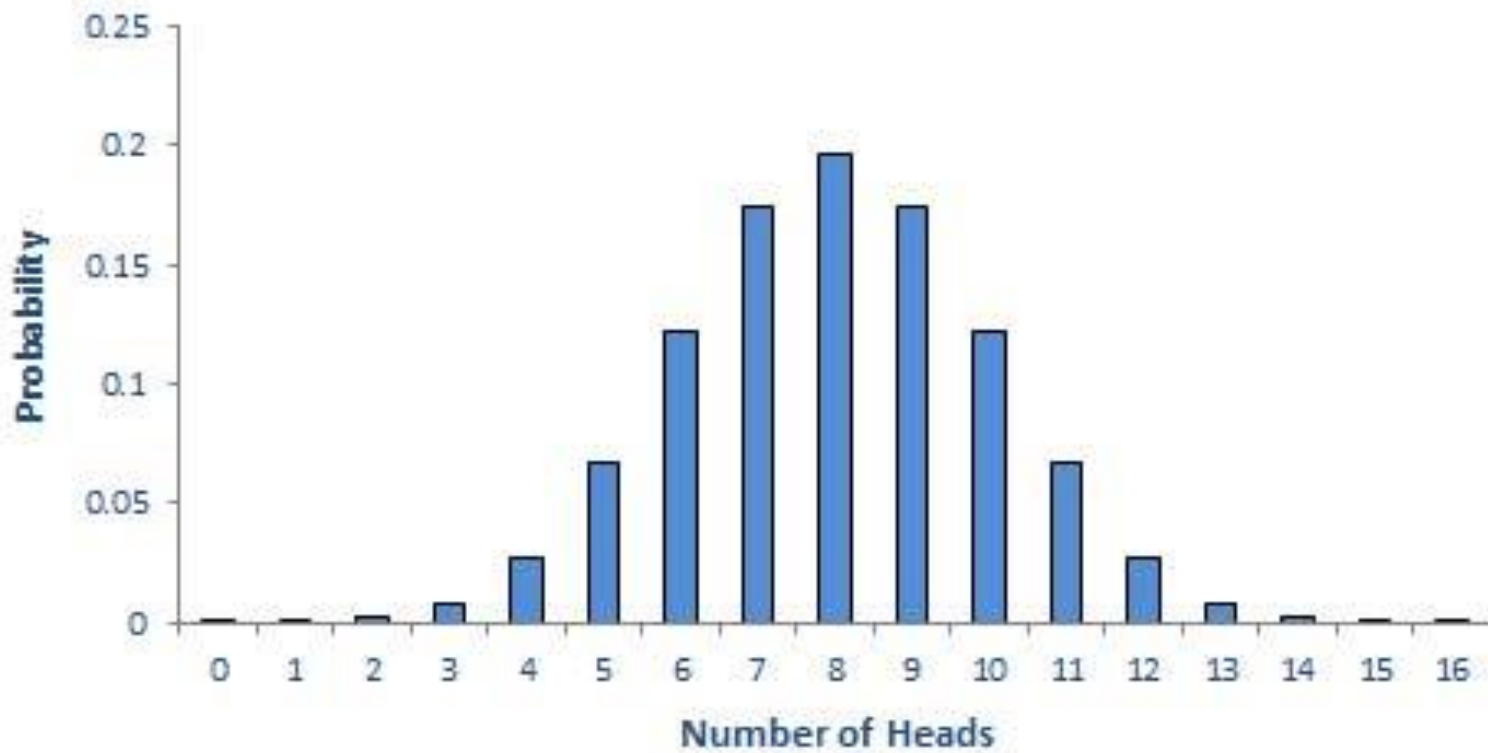
Distribution of the sum of 2 dice thrown 50 times



# ΡΙΨΗ ΚΕΡΜΑΤΟΣ

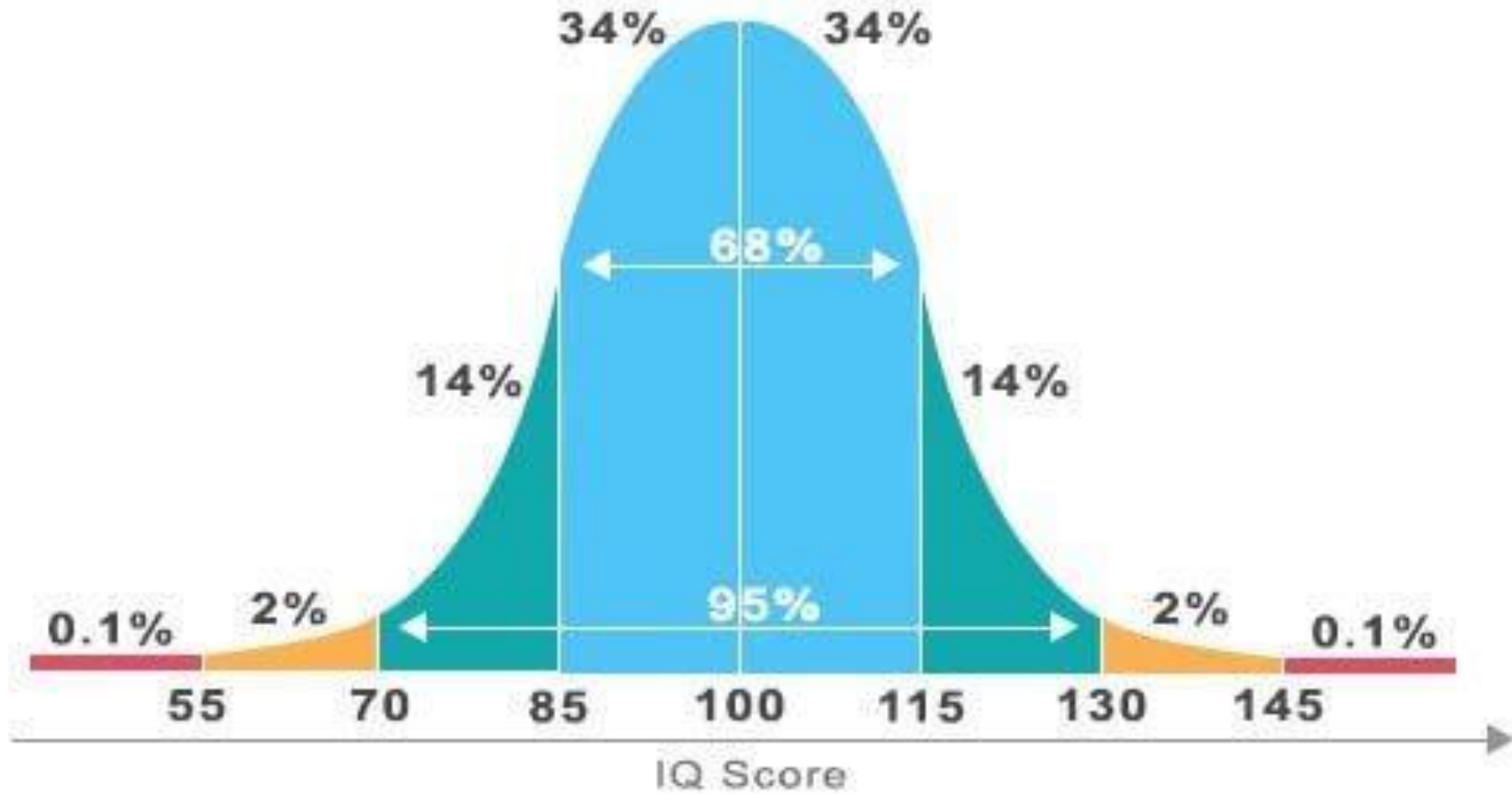


Probability of Heads from 16 Coin Tosses



IQ

## IQ GRAPH



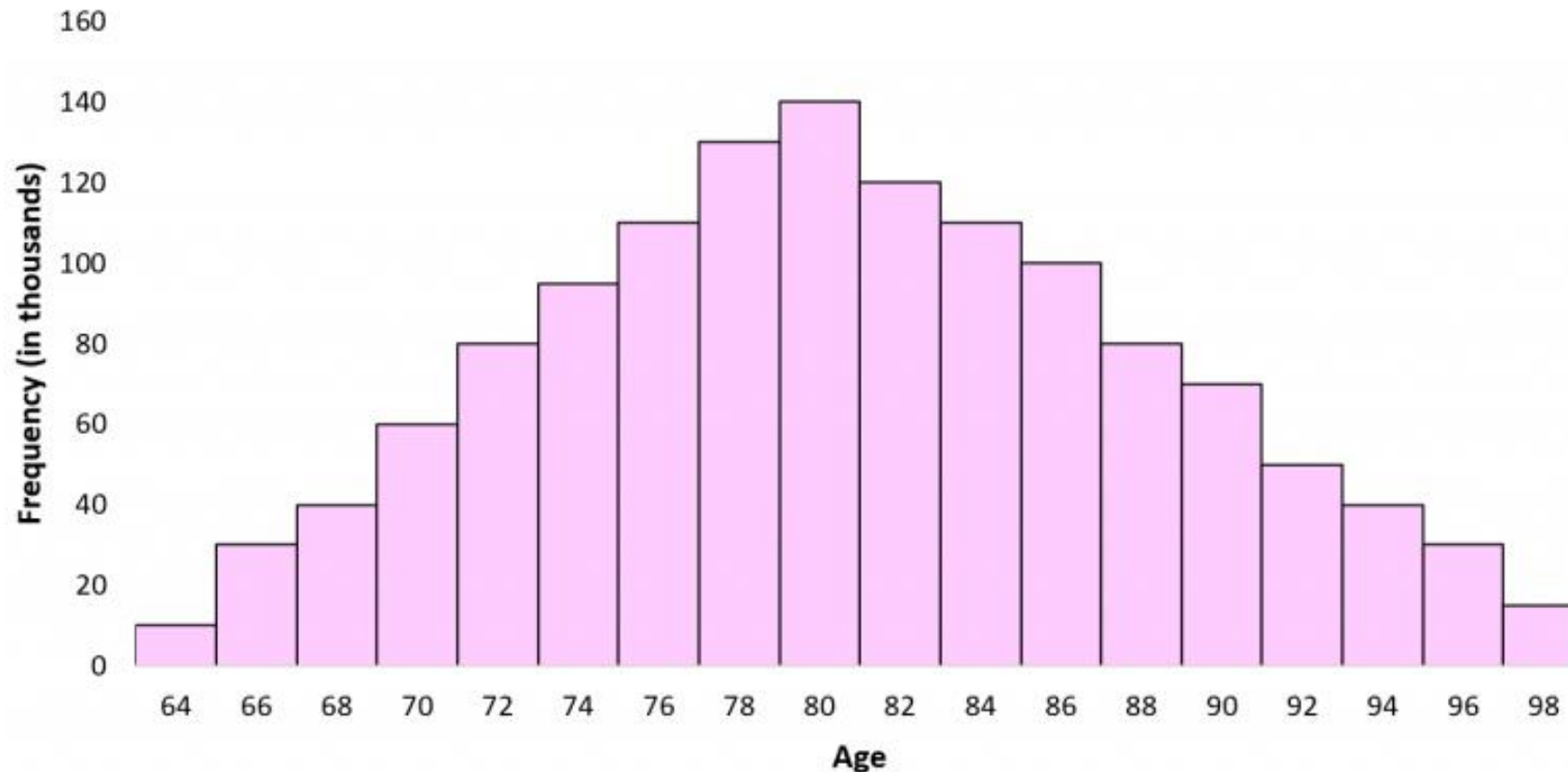
# ΑΡΤΗΡΙΑΚΗ ΠΙΕΣΗ

100-130



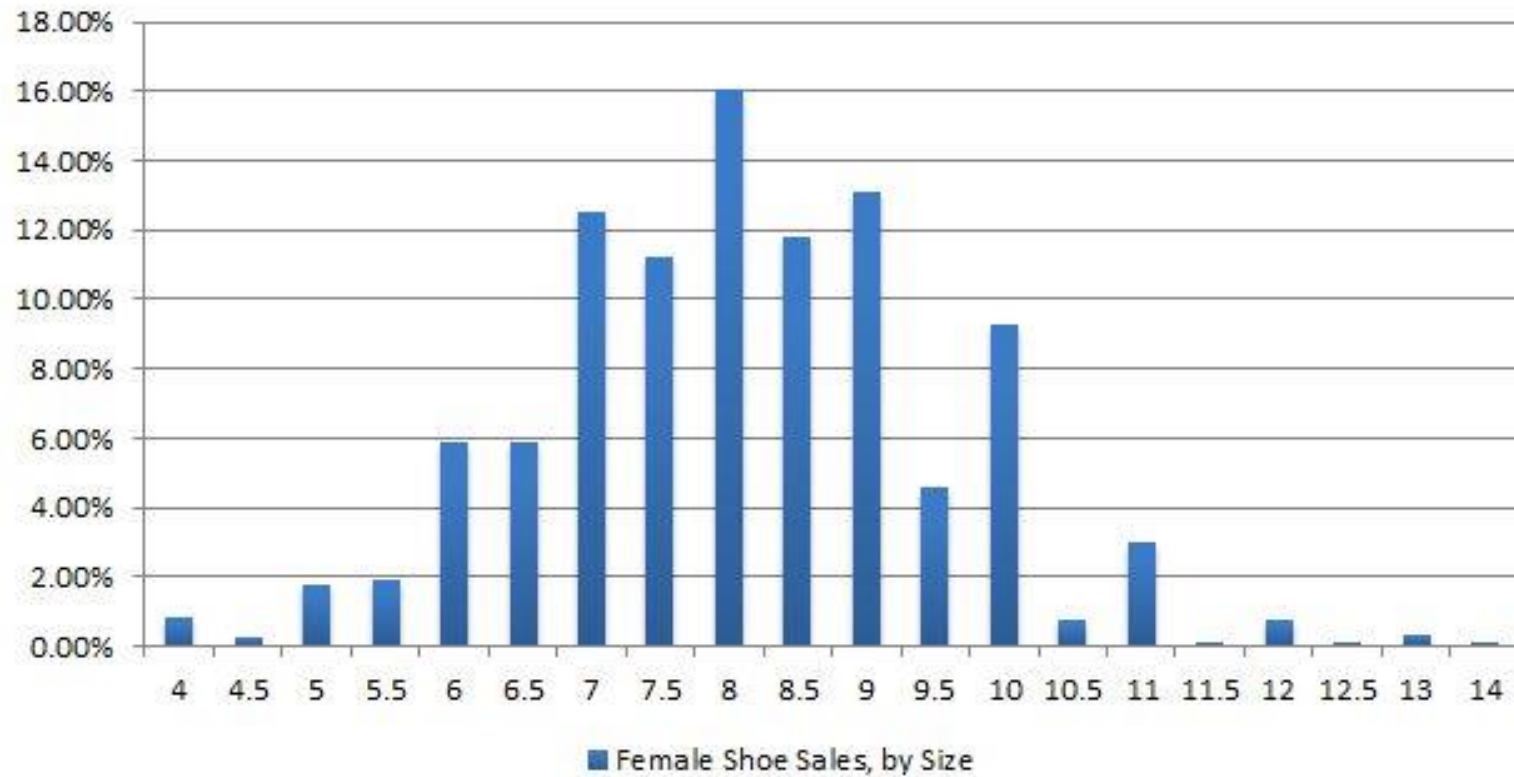
60-80

Distribution of Diastolic Blood Pressure

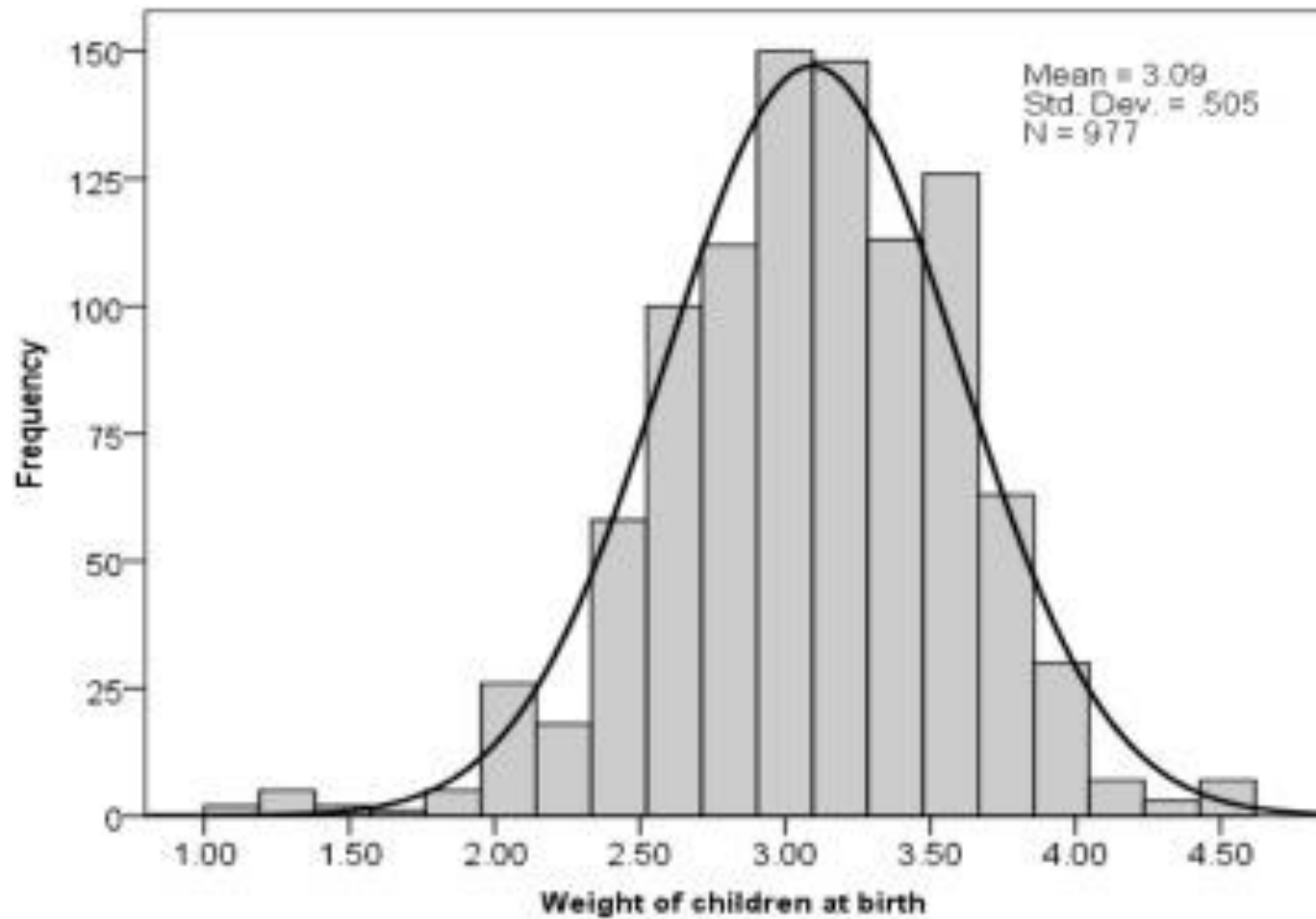


# ΝΟΥΜΕΡΟ ΠΑΠΟΥΤΣΙΟΥ

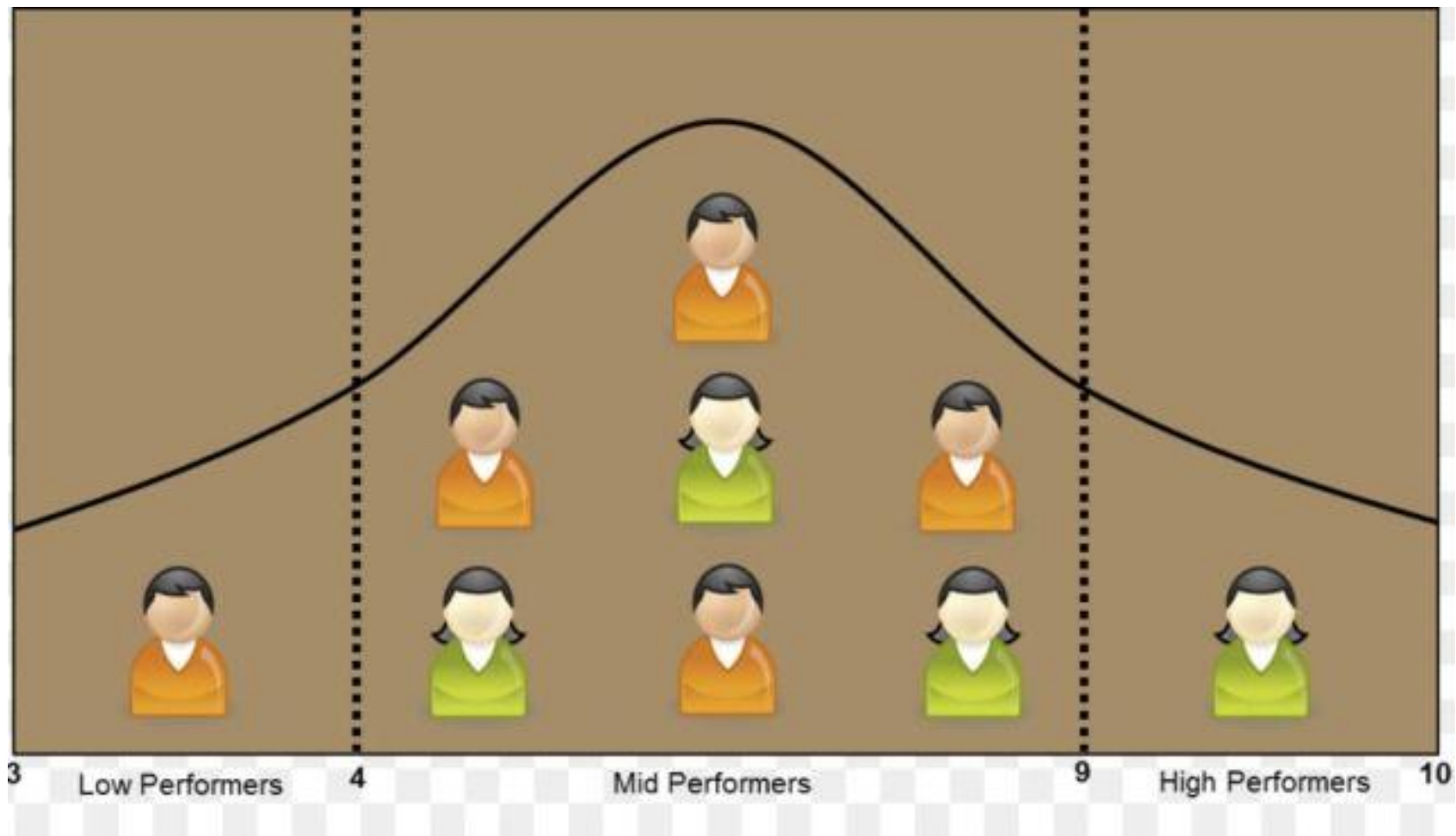
Female Shoe Sales



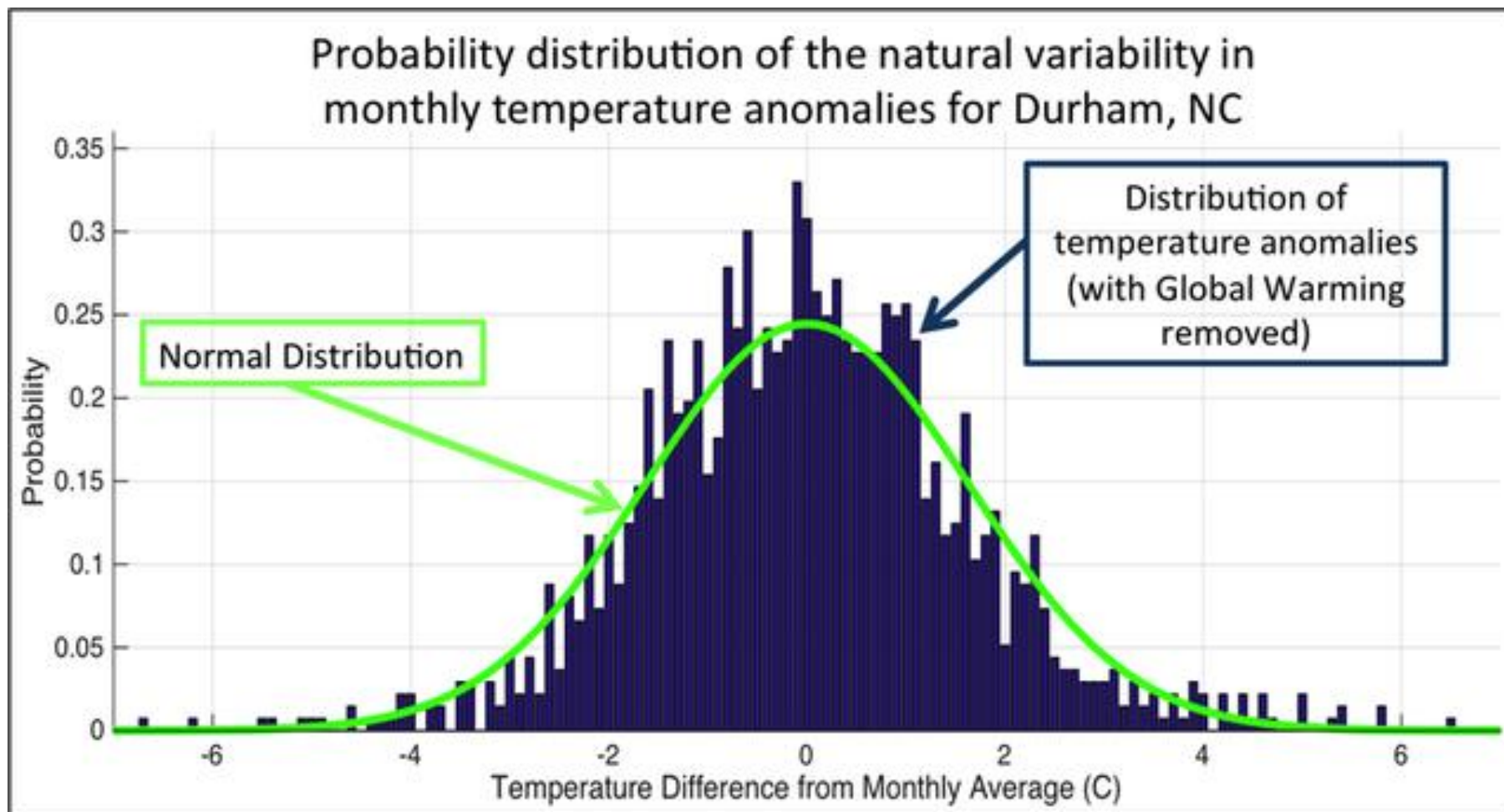
# ΒΑΡΟΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ



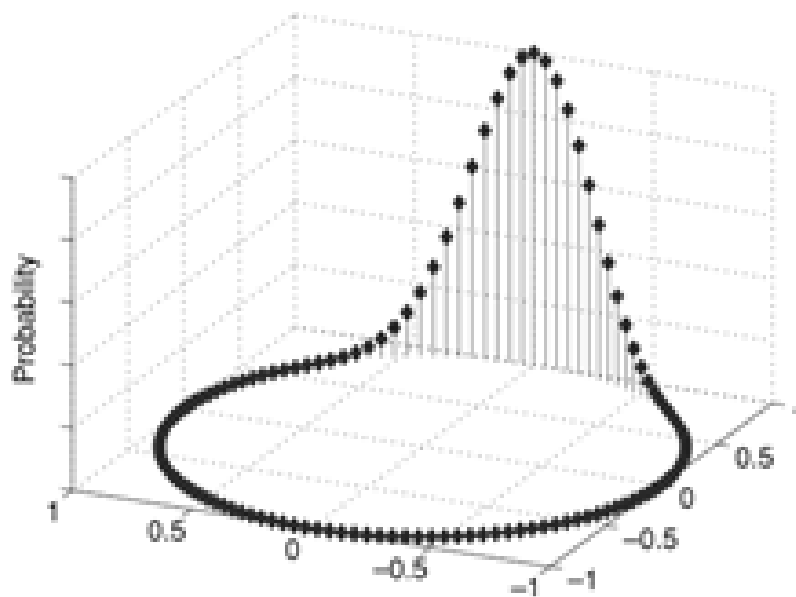
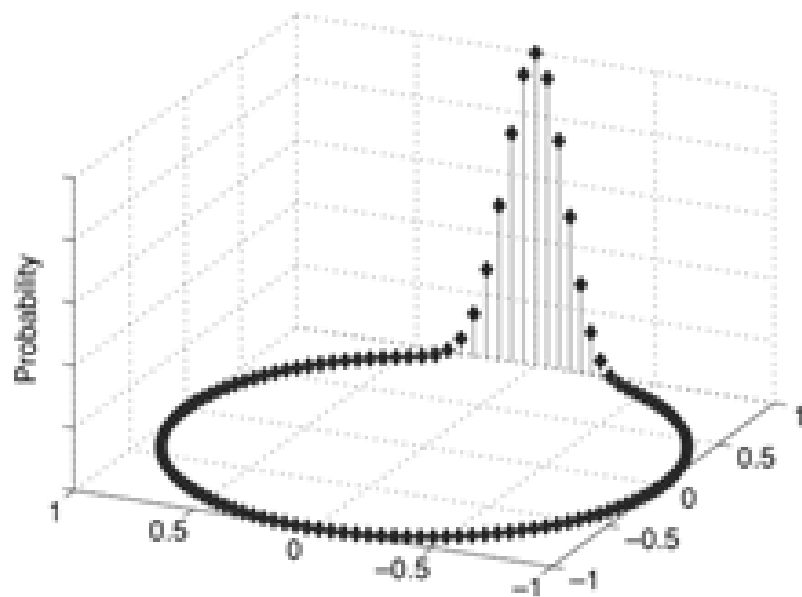
# ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ



# ΜΗΝΙΑΙΑ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ



# LEARNING WITH ERRORS (LWE)



# Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΣ ΠΡΟΤΑΣΗ

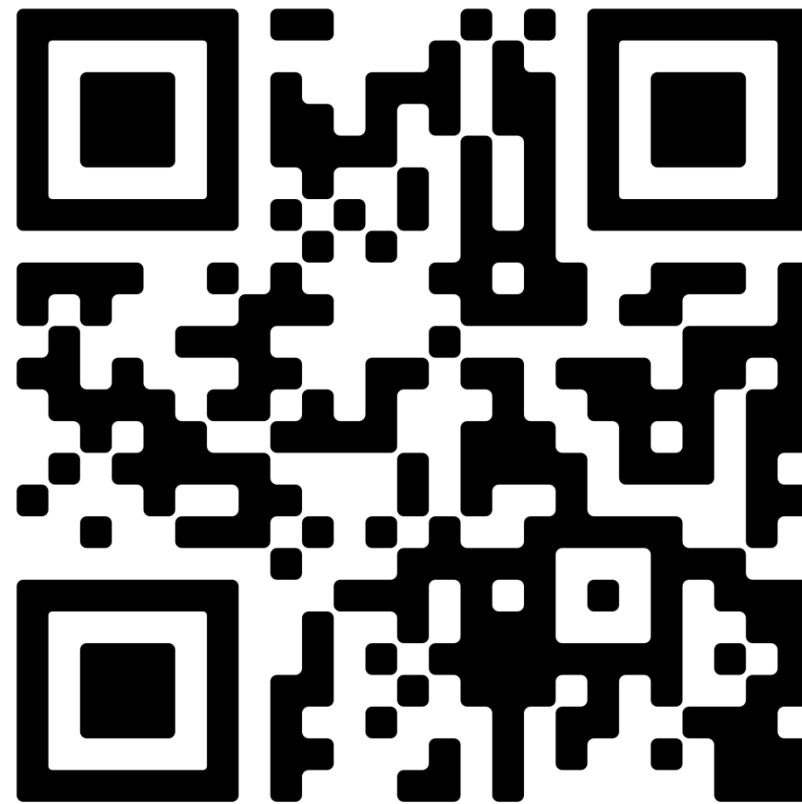
## ➤ Στόχοι

Οι μαθητές να είναι σε θέση:

1. να αναγνωρίζουν την κανονική κατανομή και τις συνθήκες για την εφαρμογή της σε πραγματικές-καθημερινές καταστάσεις,
2. να κατανοούν τη σημαντικότητα και το ρόλο της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης στην κανονική κατανομή,
3. να διακρίνουν τις ιδιότητες της γκαουσιανής καμπύλης,
4. να κατανοούν τις εφαρμογές της κανονικής καμπύλης στην καθημερινή ζωή,
5. να υπολογίζουν πιθανότητες με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής.

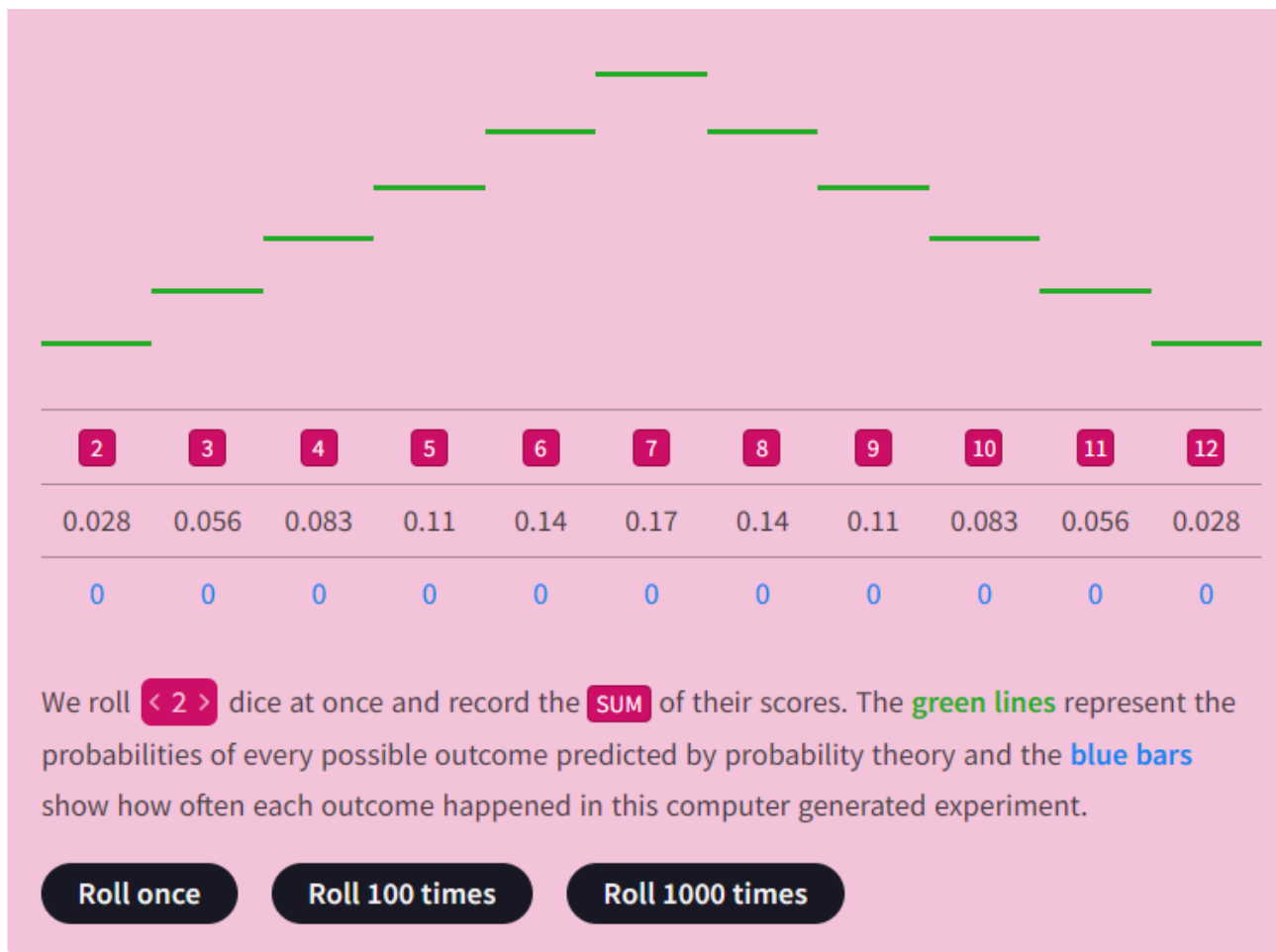
# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

➤ Αντεστραμμένη τάξη



SCAN ME

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Quincunx


The quincunx (or Galton Board) is an amazing machine.  
Pegs and balls and probability!  
Have a play, then read [Quincunx Explained](#).

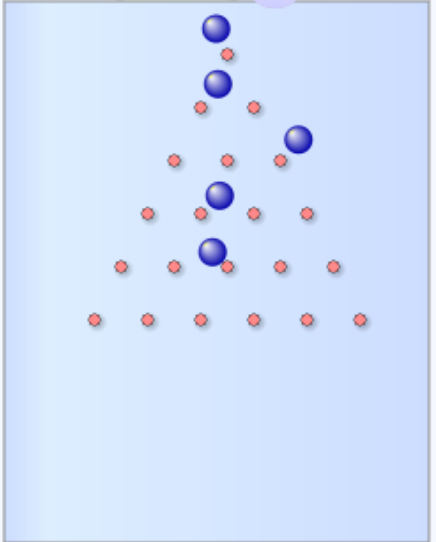
Restart Data Blue

Size:  6

Left/Right:  50% / 50%

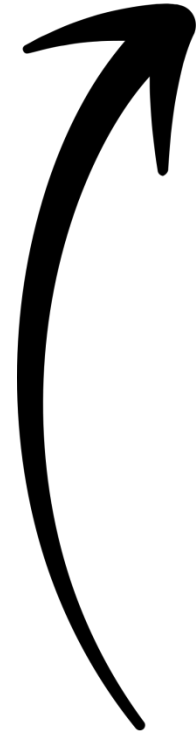
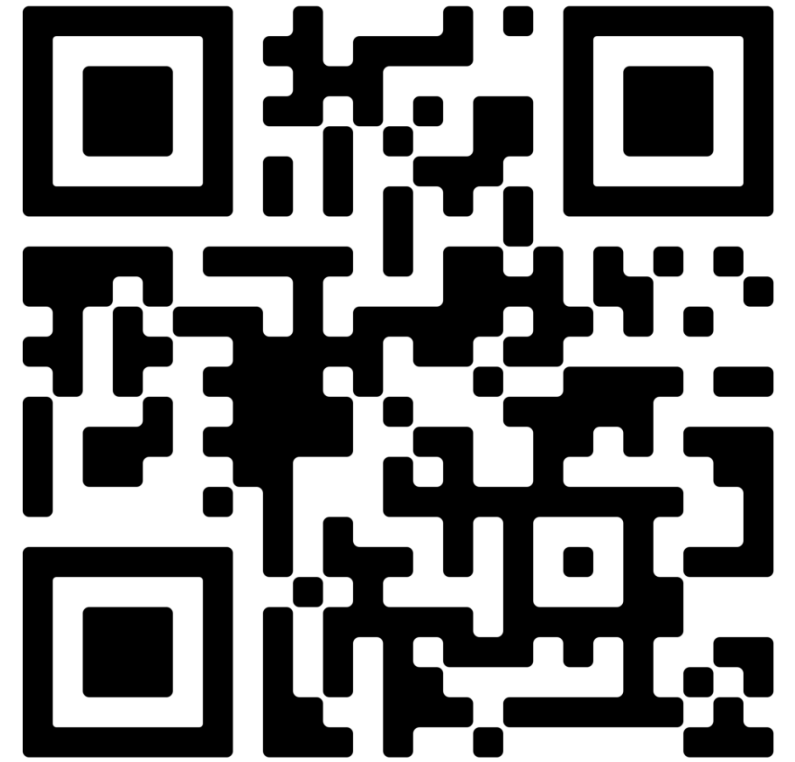
Speed:  33

5 



The image shows a digital simulation of a quincunx. At the top, there are three buttons: 'Restart', 'Data', and 'Blue'. Below these are three sliders: 'Size' set to 6, 'Left/Right' set to 50% / 50%, and 'Speed' set to 33. A green box with the number '5' and a pause button is positioned above the quincunx. The quincunx itself is a triangular grid of red pegs with 5 blue balls falling through it.

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1



*SCAN ME*

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

The image shows the PhET Plinko Probability simulation interface. At the top, there are four tabs: "Plinko Probability" (selected), "More Probability", "More Live Data", and "More Statistics". The main area features a triangular plinko board with a funnel at the top and a row of 10 blue cylindrical bins at the bottom. A single red ball is currently in the 5th bin from the left. To the right of the board, there is a control panel with a green play button, three radio buttons for multiplier selection (x1, x10, xAll), and a text input field containing "N = 1". On the left side of the board, there are three icons: a calculator, a ball icon, and a clipboard. At the bottom right, there are volume and refresh icons. The bottom of the interface has a navigation bar with "Plinko Probability", "Intro", "Lab", a home icon, and the PhET logo. Attribution text at the very bottom reads: "Attribution PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, https://phet.colorado.edu."

Φύλλο εργασίας

Παρακάτω δίνονται τα ύψη των μαθητών της Γ τάξης του ΓΕΛ Λιτοχώρου σε cm.

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟ

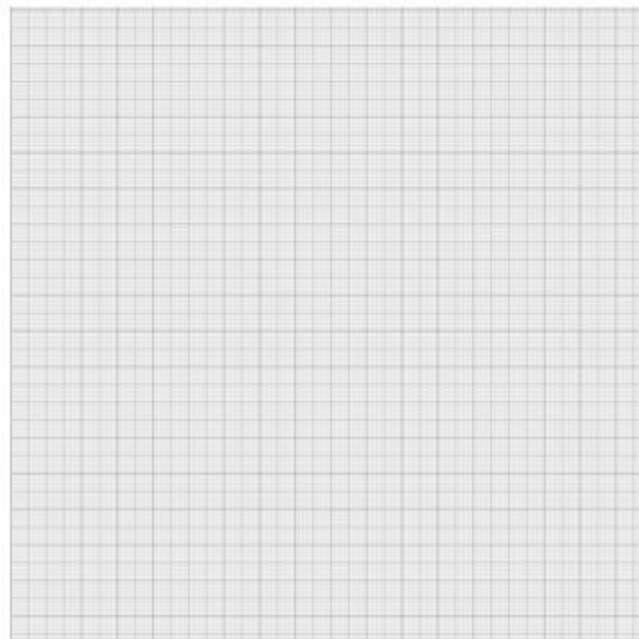
149 153 154 155 156 156 157 158 158 158 159 160 160 161  
 162 163 163 164 165 165 165 166 167 168 168 169 169 170  
 170 171 172 172 173 173 173 174 175 175 176 176 177 178  
 179 179 180 181 182 183 185 185 186 187 187 193

Ο μέσος όρος είναι  $\bar{x} \approx 170$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma \approx 10$ .

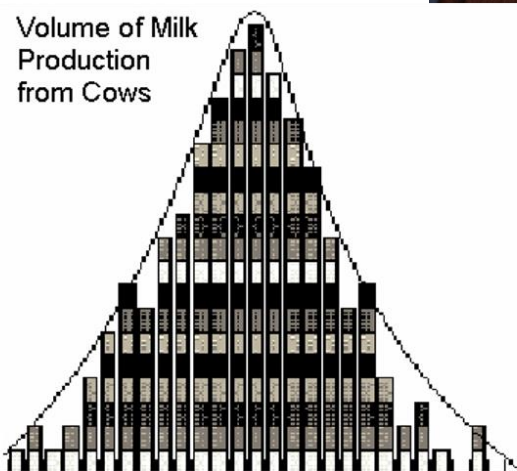
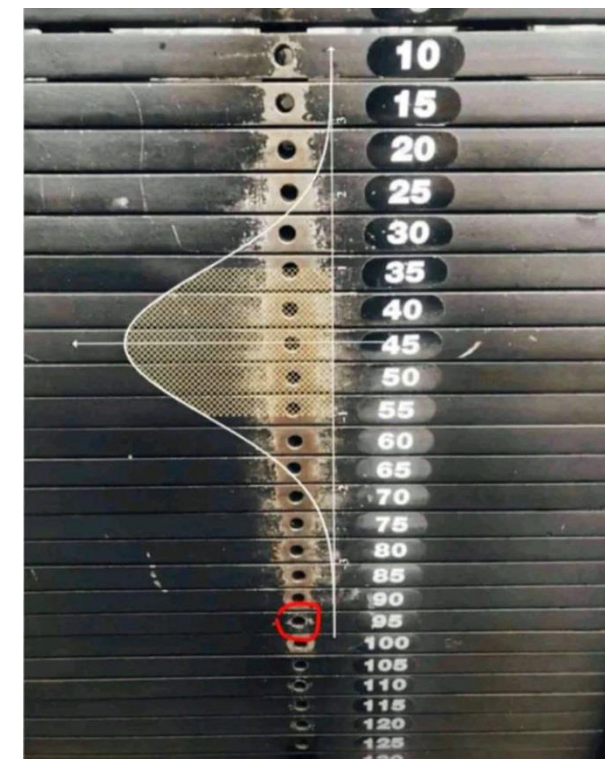
Αν οι τιμές των μεταβλητών συγκεντρωτικά στον πίνακα είναι

| Νούμερο Παπουτσιού | Συχνότητα |
|--------------------|-----------|
| [140,150)          | 1         |
| [150,160)          | 10        |
| [160,170)          | 16        |
| [170,180)          | 17        |
| [180,190)          | 9         |
| [190,200)          | 1         |

Να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων και το ιστογράμμα συχνοτήτων. Τι παρατηρείτε για το σχήμα αυτό; Τι μας θυμίζει;



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

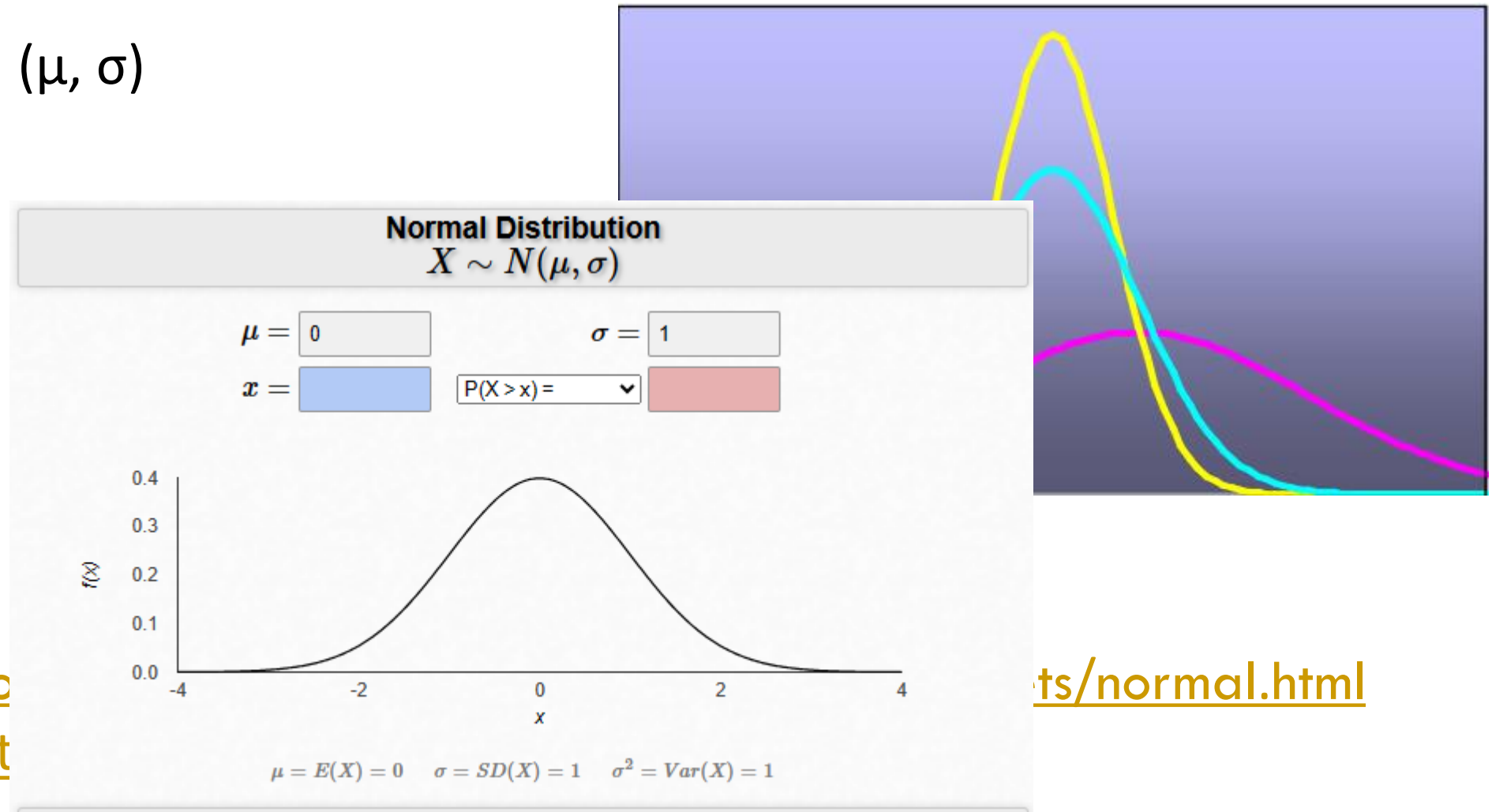


# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4

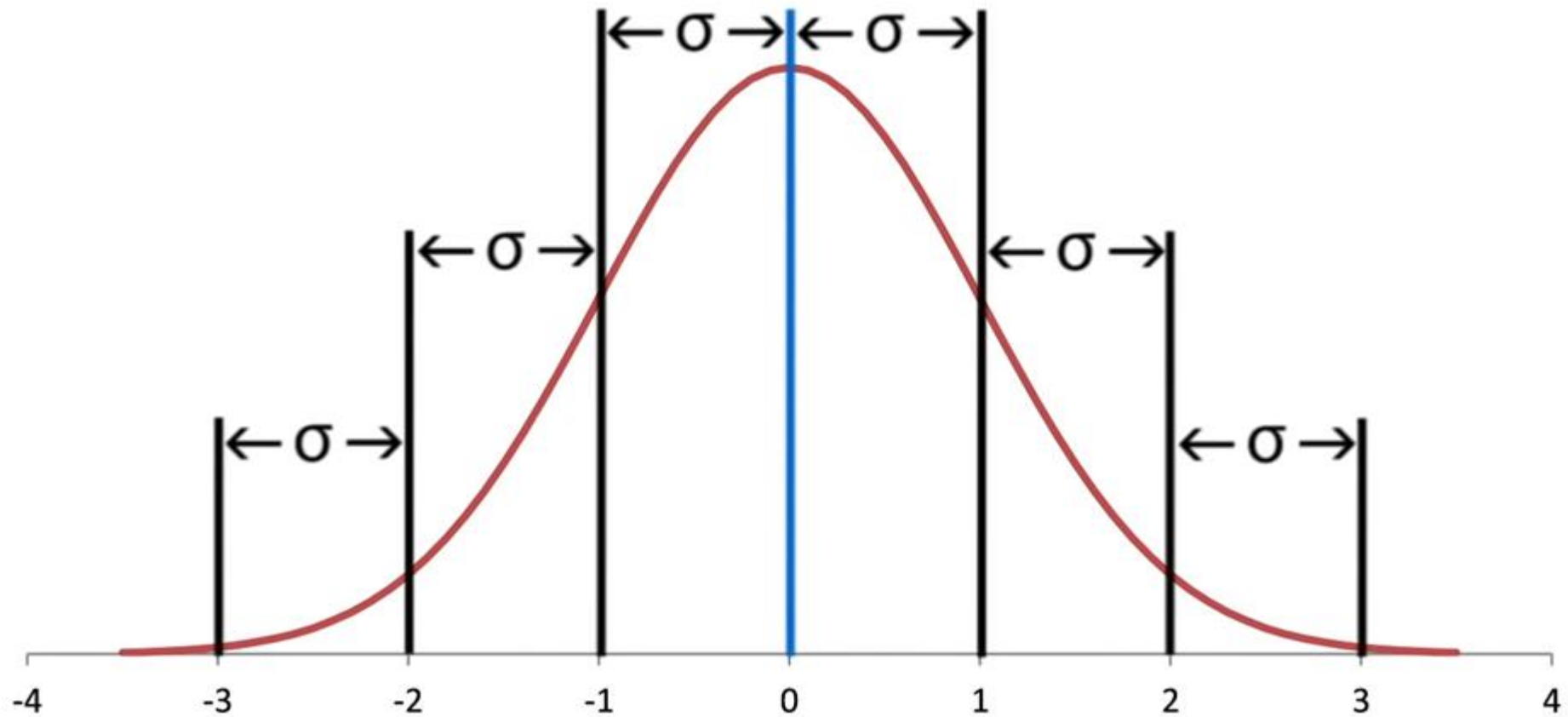
Επιλογή ( $\mu$ ,  $\sigma$ )



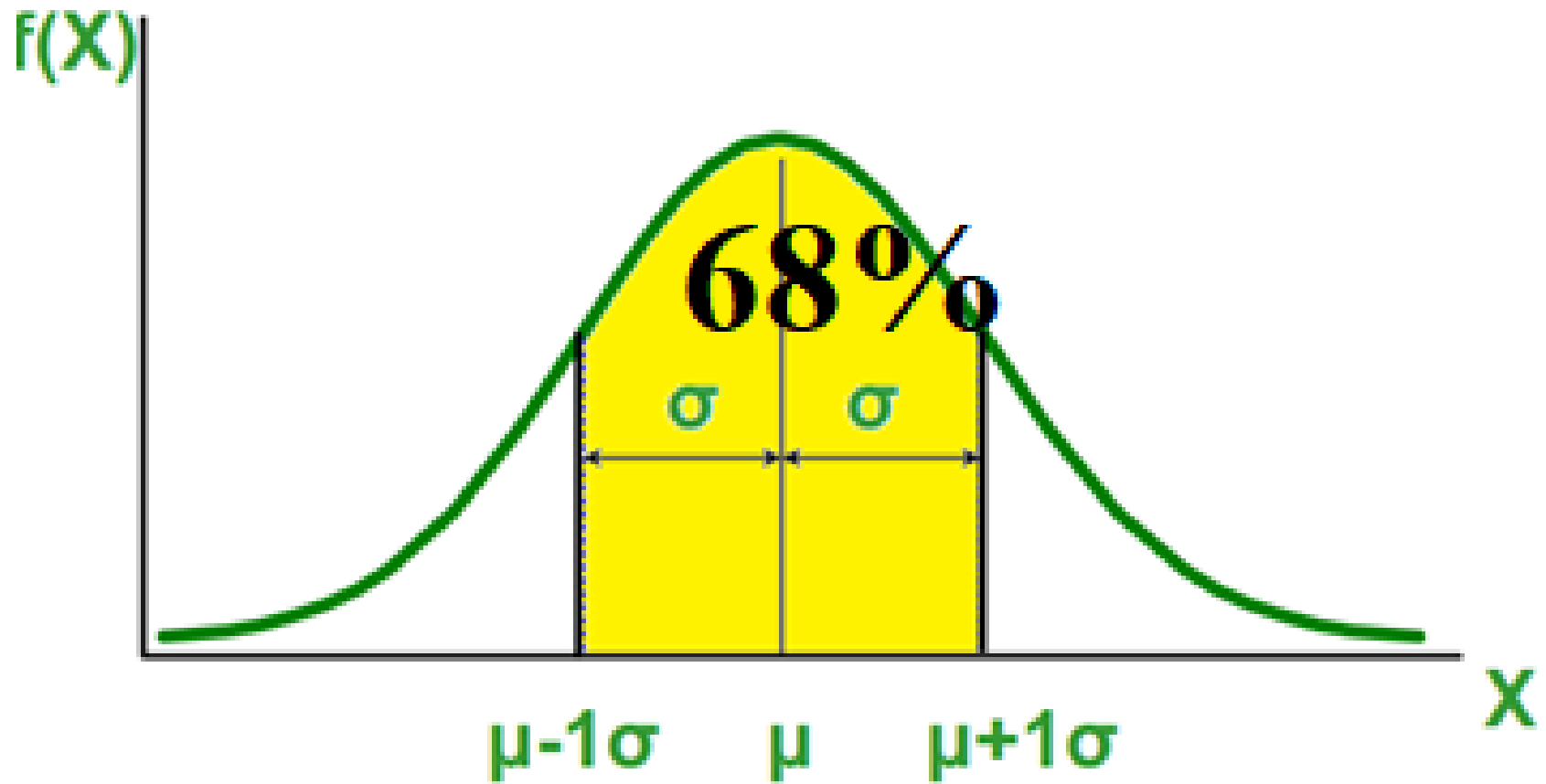
<https://h...>  
<https://st...>

<https://normal.html>

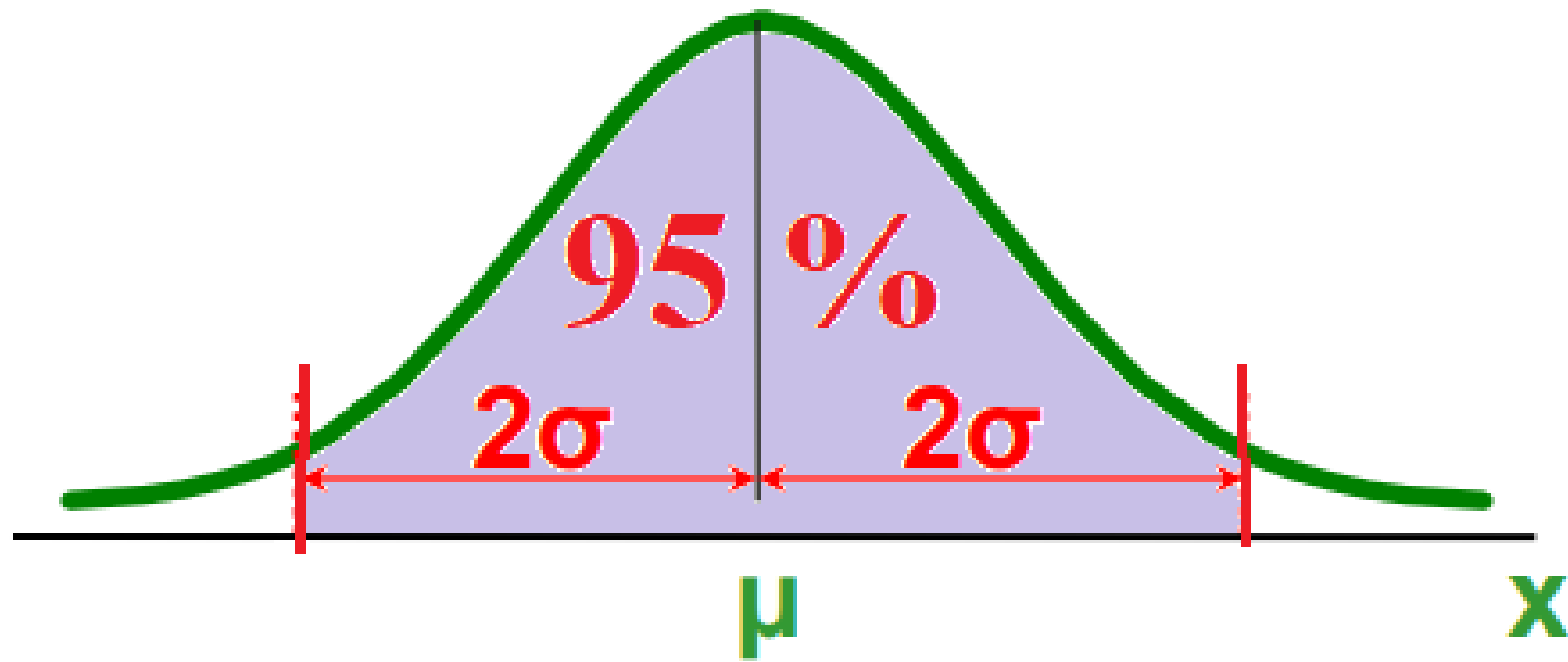
# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5



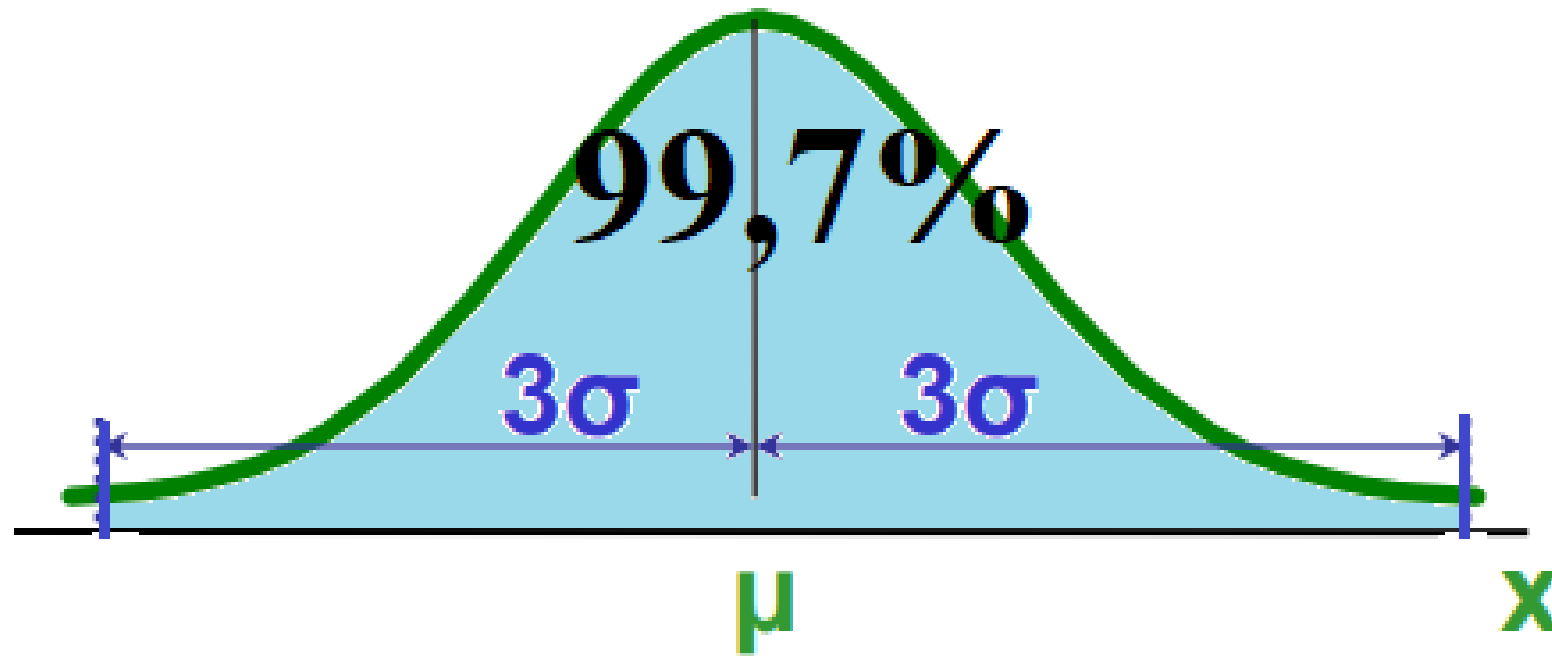
# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5

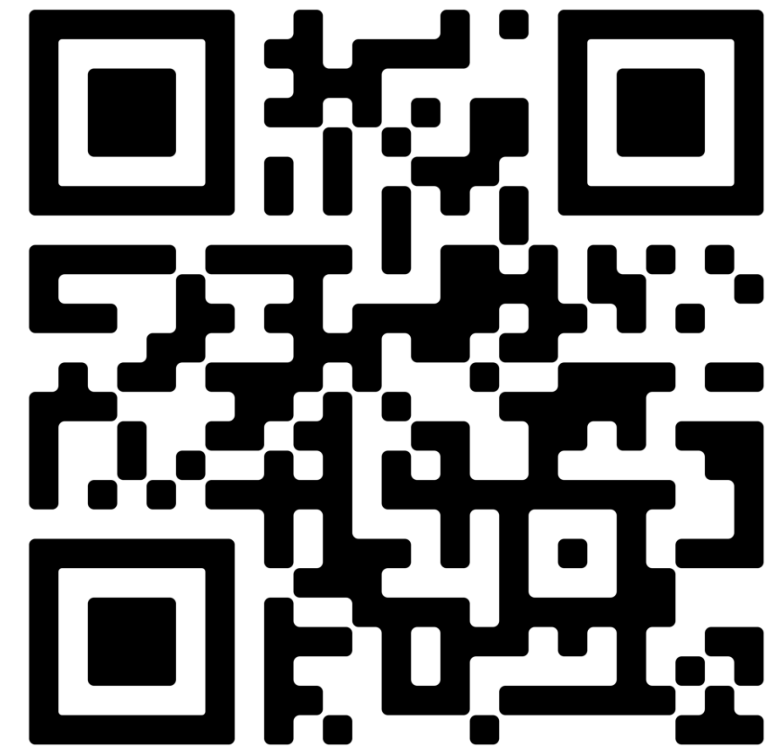


# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5



# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6

➤ Τεστ αξιολόγησης



SCAN ME

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 6

Η καμπύλη κανονικής κατανομής έχει σχήμα ...

καμπάνας

ζαριού

κούπας

Σε κανονική κατανομή οι παρατηρήσεις που βρίσκονται ανάμεσα από το  $\mu - \sigma$  και από το  $\mu + \sigma$  αποτελούν το

16%

68%

98%

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7

«Οι βαθμοί του Α΄ τετραμήνου στην Α΄ Λυκείου ενός σχολείου στην Άλγεβρα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 14 και τυπική απόκλιση 2.

**α)** Ποιο είναι το ποσοστό των βαθμών στα διαστήματα;

**β)** Αν το σχολείο έχει 80 μαθητές στην Α΄ Λυκείου, πόσοι περνούν το μάθημα;»

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 7

«Ένας αθλητής τρέχει κάθε μέρα 10 χιλιόμετρα. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που κάνει ακολουθούν την κανονική κατανομή, η καμπύλη της οποίας έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία. Έχοντας καταγράψει χρόνους 300 ημερών παρατηρεί ότι το 1,5% των χρόνων είναι τουλάχιστον 40 λεπτά.

- α)** Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι ίση με 34 και η τυπική απόκλιση είναι ίση με 2.
- β)** Ποιο είναι το ποσοστό των διαδρομών στις οποίες έκανε μέχρι 30 λεπτά;
- γ)** Σε πόσες διαδρομές έκανε το πολύ 32 λεπτά;
- δ)** Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας τυχαίος καταγεγραμμένος χρόνος να είναι πάνω από 36 και κάτω από 38 λεπτά;»

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 8

Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου

Ασκήσεις της τράπεζας θεμάτων

# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με τη βοήθεια της ανεστραμμένης τάξης, της ομαδοσυνεργατικής και ανακαλυπτικής μεθόδου διδασκαλίας με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών, κατακτήθηκαν οι βασικές έννοιες από το σύνολο των μαθητών, όπως φάνηκε από το διαγνωστικό τεστ αξιολόγησης που πραγματοποιήσαμε μέσα στην αίθουσα διαδικτυακά.

# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

22 μαθητές που συμμετείχαν οι 20 συμπλήρωσαν σωστά όλες τις ερωτήσεις.

Από την κουβέντα που ακολούθησε οι μαθητές ήταν ενθουσιασμένοι με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε.

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πιο εντυπωσιακό στοιχείο του αιώνα που διανύουμε είναι οι αλλαγές σε όλα σχεδόν τα επίπεδα που έχουν να κάνουν με την ζωή μας, όπως της κοινωνικής, της πολιτιστικής, της οικονομικής και της πολιτικής μας ζωής.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να επηρεάζεται άμεσα και η διδασκαλία ενός αντικειμένου και η σύνδεσή του με τις αλλαγές αυτές είναι επιτακτική.

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ως εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να μένουμε μόνο στη σείρα μετάδοση γνώσεων, αλλά να τολμάμε να διαμορφώνουμε την παρουσία μας ως καταλύτη, δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο θα ευνοεί τη συμμετοχή και θα καλλιεργεί τις δεξιότητες και τις ιδιαίτερες κλίσεις των μαθητών μας, αν και πολλές φορές δυστυχώς και αναπόφευκτα δε μπορούμε να αποφύγουμε την αφόρητη πίεση των υποχρεώσεων που ολοένα και περισσότερο αυξάνονται και πρέπει να ικανοποιηθούν.

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η δημιουργία ενός διαφορετικού μαθήματος που θα ικανοποιεί όλα τα παραπάνω, εμπλέκοντας και εμπνέοντας τους μαθητές πρέπει να είναι κύριο μέλημα μας, ως εκπαιδευτές εφήβων.

Το κέρδος θα είναι πολλαπλό για όλους.

Вероватноћа



ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΑΣ

