$e^x \geq x + 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

Μία όχι και τόσο αυστηρή απόδειξη για τη Β λυκείου

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ισχύει για $x \leq -1$ διότι τότε είναι $x + 1 \leq 0$ και $e^x > 0$. Επίσης για $x > 0$ θέτουμε στη ζητούμενη $y = 1/x$ και ισοδύναμα έχουμε

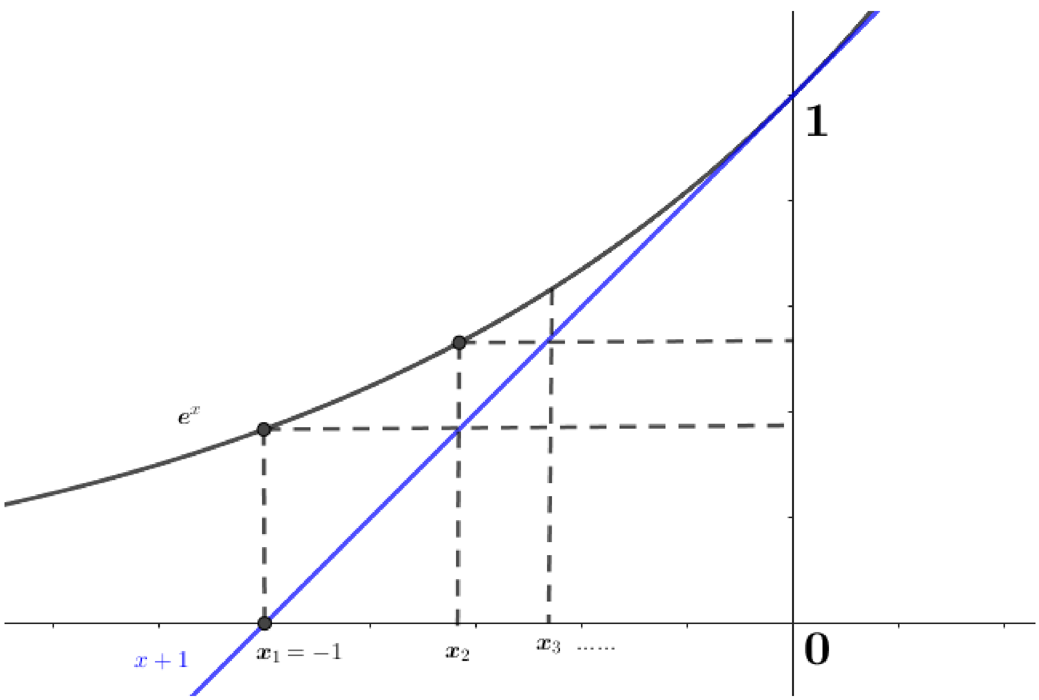
$$e^x \geqslant x + 1 \overset{y=1/x}{\Leftrightarrow} e^{1/y} \geqslant \frac{1}{y} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{1/y}\right)^y \geqslant \left(\frac{1}{y} + 1\right)^y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e \geqslant \left(\frac{1}{y} + 1\right)^y$$

και η τελευταία ισχύει διότι η συνάρτηση $(x + 1/x)^x$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει όριο το e [1]

Επομένως πρέπει να αποδείξουμε τη ζητούμενη για $x \in (-1, 0)$, αφού για $x = 0$ ισχύει η ισότητα. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = -1 \\ x_{n+1} = e^{x_n} - 1 \end{array} \right\}$$

η οποία προκύπτει από το παρακάτω σχήμα



Είναι σαφές ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη , επομένως συγκλίνει[2] και αν

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$$

[1] Το σχολικό βιβλίο αναφέρει ότι αυτό ισχύει για $x \in \mathbb{N}$.
[2] στο supremum της

τότε θα πρέπει $\ell = e^{\ell} - 1$ η οποία έχει λύση την $\ell = 0$ και επειδή το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό έχουμε

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

(Όχι αυστηρά)... Επειδή η (x_n) φτάνει όσο θέλουμε κοντά στο 0 , έχουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, x_{n+1}) = (-1, 0)$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε τη ζητούμενη:

- στο τυχαίο (x_k, x_{k+1}) και

- στο τυχαίο x_k

Έστω $x \in (x_k, x_{k+1})$. Τότε έχουμε

- $x \in (x_k, x_{k+1}) \Leftrightarrow x_k < x < x_{k+1} \Leftrightarrow \boxed{x_k + 1 < x + 1 < x_{k+1} + 1}$ (1)
- $x \in (x_k, x_{k+1}) \Leftrightarrow x_k < x < x_{k+1} \Leftrightarrow \boxed{e^{x_k} < e^{x} < e^{x_{k+1}}}$ (2)

Όμως ισχύει $x_{k+1} + 1 = e^{x_k}$ από τον αορισμό της (x_n) , οπότε οι (1) , (2) δίνουν

$$x + 1 < x_{k+1} + 1 = e^{x_k} < e^{x}$$

που είναι το ζητούμενο. Επίσης για το τυχαίο x_k είναι

$$e^{x_k} = e^{x_k} - 1 + 1 = x_{k+1} + 1 > x_k + 1$$

αφού η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα τελικά ισχύει $e^{x} > x + 1$ για κάθε $x \in [-1, 0)$.

Ερώτημα. Μπορεί όντως να διδαχθεί στη Β λυκείου ;