Ημερίδα Μαθηματικών στην Κοζάνη την 15-3-09. Διοργανωτής: ΕΜΕ Κοζάνης. Συνδιοργανωτές: Σύλλογος Εκπαιδευτικών Φροντιστών Δυτ. Μακεδονίας και Σχολικός Σύμβουλος Δυτ. Μακεδονίας

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ.
ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ

Εισηγητής: Νικ. Ιωσηφίδης

Μαθηματικός – Φροντιστής, ΒΕΡΟΙΑ
e-mail: iossifid@yahoo.gr

Επειδή η Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου είναι το δυσκολότερο από τα κεφάλαια των Μαθηματικών που διδάσκονται στα Λύκεια, αποφασίσαμε η εισήγησή μας αυτή να διαλευκάνει κάποια από τα σημεία που θεωρούμε ότι παρουσιάζουν δυσκολίες ή ασάφειες. Τα σημεία αυτά είναι πολλά. Εδώ θα ασχοληθούμε με εκείνα που παρουσιάζονται πιο συχνά.

Οι ασάφειες δημιουργούνται κυρίως από ασκήσεις που δεν καλύπτονται πλήρως από τη θεωρία, όπως π.χ μονοτονία συνάρτησης της οποίας η παράγωγος είναι ≥ 0 ή η παραγωγισιμότητα συνάρτησης που περιέχει το σύμβολο $\sqrt{x}$ κ.ά.

Σε προηγούμενη εισήγησή μας (στη Βέροια την 4/3/2007 και στη Θεσ/νίκη στις 7/3/2007 στα πλαίσια της Μαθηματικής εβδομάδας) κάναμε κάποιες επισημάνσεις και δώσαμε διευκρινίσεις σε αντίστοιχα ερωτήματα με αφορμή θέματα των Πανελλαδικών εξετάσεων. Εξηγήσαμε επίσης γιατί κάποιες λύσεις είναι λάθος. Ακόμη γιατί κάποια θεωρήματα δεν μπορούν να εφαρμοστούν.

Αν και πολλά από τα ερωτήματα αυτά θα ταίριαζαν απόλυτα με το πνεύμα της σημερινής μας εισήγησης, δεν θα τα αναφέρουμε εδώ λόγω του περιορισμένου χρόνου. Θα σας δώσουμε όμως και την εισήγηση εκείνη ως συμπλήρωμα της σημερινής. Στην εισήγηση εκείνη αναφερθήκαμε στα εξής θέματα:

1. **Πλήθος αριθμών ξ που ικανοποιούν κάποια συνθήκη**
2. **Συνθήκες που δεν είναι απαραίτητες**
3. **Περισσότερες συνθήκες ή δεδομένα που δεν είναι συμβιβαστά. Ανύπαρκτες συναρτήσεις**
4. **Απαραίτητη επαλήθευση**
5. **Ερωτήματα τύπου σωστό – λάθος**
6. **Τοπικά ακρότατα – σημεία καμπής**
7. **Κανόνας De l’ Hospital**

Σε όλα τα παραπάνω θέματα υπάρχουν σημεία "παγίδες" και πολλά ερωτηματικά. Με την εισήγησή μας δίνονται απαντήσεις στα πιο σημαντικά ερωτήματα.

Είναι γνωστό ότι η ισχύς των θεωρημάτων είναι απόρροια των ορισμών. Ανάλογα με τον ορισμό που δίνεται κάθε φορά, τα θεωρήματα μπορούν να ισχύουν με τον έναν ή τον άλλον τρόπο.

Εδώ θα υιοθετήσουμε τους ορισμούς του σχολικού βιβλίου της Κατεύθυνσης και θα προσαρμόσουμε κάθε μας παρατήρηση πάνω σ’ αυτούς.

Ορισμός

Το σύμβολο { ως άκρο ενός διαστήματος θα παριστάνει το σύμβολο (ή το [. Αντίστοιχα, το σύμβολο } θα παριστάνει) ή].

Έτσι το σύμβολο {α, β} θα παριστάνει οποιοδήποτε από τα διαστήματα (α, β) ή [α, β] ή (α, β] ή [α, β). Τα α και β επίσης θα παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς ή α = $-\infty$ ή β = $+\infty$
Στη μελέτη των παραγώγων όταν θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο Δ_0 σε συνδυασμό με το διάστημα $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ θα εννοούμε ότι το Δ_0 είναι το εσωτερικό του διαστήματος Δ που ορίζεται ως το ανοιχτό διάστημα με τα ίδια άκρα με το Δ, δηλαδή

- αν $\Delta = [\alpha, \beta]$ ή (α, β) ή $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$ τότε $\Delta_0 = (\alpha, \beta)$
- αν $\Delta = (-\infty, \alpha]$ ή $\Delta = (-\infty, \alpha)$ τότε $\Delta_0 = (-\infty, \alpha)$
- αν $\Delta = [\alpha, +\infty)$ ή $\Delta = (\alpha, +\infty)$ τότε $\Delta_0 = (\alpha, +\infty)$
- αν $\Delta = (-\infty, +\infty) = R$ τότε $\Delta_0 = R$

Πεδίο ορισμού της f΄

Το πεδίο ορισμού της f΄ δεν μπορεί να βρεθεί από τον τύπο της f΄.
Αντίστοιχα με τη σύνθεση δύο συναρτήσεων, για να ορίζεται η f΄ δεν αρκεί ο τύπος της να ορίζεται.

Για να ανήκει ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού της f΄ πρέπει

α) Να ορίζεται η f στο x_0
β) Να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Είναι φανερό ότι στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της η f δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού η παράγωγος της f στο x_0 είναι το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και επομένως για να υπάρχει αυτό, πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0]$ ή $[x_0, \beta)$. Έτσι π.χ

α) Για τη συνάρτηση $f: A \to R$ με $A = (1, 5) \cup \{6\}$ με $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = 2x$ για κάθε $x \in (1, 5)$, ενώ δεν ορίζεται το $f'(6)$ αφού η f δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, 6] ή [6, α)
Έτσι πεδίο ορισμού της f ΄ είναι το (1, 5)

β) Η συνάρτηση f(x) = lnx έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in A$. Ο τύπος $\dfrac{1}{x}$ ορίζεται και για $x < 0$, όμως οι τιμές αυτές δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f΄. Το πεδίο ορισμού της f΄ είναι το $A = (0, +\infty)$

Οι περισσότερες γνωστές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στα πεδία ορισμού τους.

Για την ύλη του σχολικού βιβλίου, σχεδόν όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες. Εξαίρεση αποτελούν οι συναρτήσεις που ορίζονται με περισσότερους του ενός τύπους οι οποίες στα σημεία αλλαγής του τύπου τους μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμες. Στην κατηγορία αυτή θα εντάξουμε και τις συναρτήσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές.

Είναι γνωστό π.χ ότι η $f(x) = |x|$, $x \in R$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Ένα διαφορετικό, χαρακτηριστικό όμως παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f:[0, +\infty) \to R$ με $f(x) = \sqrt{x}$

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $A' = (0, +\infty)$, δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο 0.

Πράγματι, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Πριν πούμε τι ισχύει γενικότερα, είναι αναγκαίο να δώσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}$ για τις διάφορες τιμές του α

Το πεδίο ορισμού Α της f είναι το εξής:

Αν $\alpha \in Z$

- **αν $\alpha \in N^*$ τότε: $A = R$**
- **αν $\alpha \leq 0$ τότε: $A = R^*$**

Αν $\alpha \notin Z$

- **αν $\alpha > 0$ τότε $A = [0, +\infty)$**
- **αν $\alpha < 0$ τότε $A = (0, +\infty)$**

Για την παραγωγισιμότητα τώρα της $f(x) = x^{\alpha}$ ισχύουν τα εξής:

Σε όλες τις περιπτώσεις η $f(x) = x^{\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α, εκτός από την περίπτωση $0 < \alpha < 1$ οπότε $A = [0, +\infty)$. Στην περίπτωση αυτή η f είναι παραγωγίσιμη στο $A' = (0, +\infty)$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty$$

Ειδική περίπτωση είναι η $f(x) = \sqrt{x}$ και γενικότερα η $f(x) = \sqrt[\nu]{x}$, $\nu \geq 2$

<u>ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ</u>

Είναι γνωστό ότι αν η $f: A \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η $g: B \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Τι γίνεται όμως αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$;

Η σύνθεση $g \circ f$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αν ακόμη δεν ισχύει καμία από τις παραπάνω προϋποθέσεις. Μπορεί φυσικά και να μην είναι.

Δίνουμε τέσσερα παραδείγματα στα οποία καταφαίνεται η αλήθεια των παραπάνω.

Παράδειγμα 1ο (όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και η σύνθεση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0)

Η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το A = $[0, +\infty)$ και όπως έχουμε πει **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0**.

Η συνάρτηση g(x) = x^2 έχει πεδίο ορισμού το B = R και **είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο f(0) = 0.**

Η σύνθετη συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το Γ = $[0, +\infty)$ και είναι $(g\circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ για κάθε $x\in \Gamma$

Η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το Γ, δηλαδή **είναι παραγωγίσιμη και στο 0.**

Παράδειγμα 2ο (όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και η σύνθεση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0)

Η συνάρτηση f(x) = |x| έχει πεδίο ορισμού το A = R και **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} 2x & , \text{αν } x < 0 \\ x^2+1 & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το R και **δεν είναι παραγωγίσιμη στο f(0) = 0**, αφού δεν είναι συνεχής στο 0.

Η σύνθεσή τους $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το Γ = R και τύπο: $(g\circ f)(x) = |x|^2 + 1$ = x^2 + 1 για κάθε $x\in$ R, επομένως **είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο 0.**

Παράδειγμα 3ο (όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και η σύνθεση $g\circ f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0)

Η συνάρτηση h(x) = $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ = $[(x-1)^2]^{\frac{1}{3}}$ [1]

Είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt[3]{x}$ και f(x) = $(x-1)^2$, δηλαδή h(x) = g(f(x)) για κάθε $x\in$ R.

Η f παραγωγίζεται στο R, άρα και στο 1, η g όμως δεν παραγωγίζεται στο f(1) = 0.

Για τη σύνθεση h(x) = g(f(x)) = $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ δεν προκύπτει άμεσα συμπέρασμα για την παραγωγισιμότητά της στο 1.

Το αν η h είναι ή όχι παραγωγίσιμη στο 1 πρέπει να εξεταστεί με τη βοήθεια του ορισμού.

---

[1] Δεν μπορούμε να γράψουμε f(x) = $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ καθόσον η παράσταση $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ορίζεται για κάθε $x\in$ R, ενώ η $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ ορίζεται μόνο στο διάστημα $[1, +\infty)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$, επομένως

η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

<u>Παράδειγμα 4^{o}</u> **(όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και η σύνθεση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0)**

Αντίθετα με το 3^{o} παράδειγμα, η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4}$ είναι πάλι σύνθεση των

f: $R\to R$ με $f(x) = (x-1)^4$ που **είναι παραγωγίσιμη στο 1** και

g: $[0, +\infty)\to R$ με $g(x) = \sqrt[3]{x}$ που **δεν είναι παραγωγίσιμη στο f(1) = 0.**

Η h είναι παραγωγίσιμη στο f(1) = 0 αφού:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{|x-1|^4}}{-|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}(-\sqrt[3]{|x-1|}) = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 0$ και **η h είναι παραγωγίσιμη στο 1.**

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ**</u>

Δεν μπορούμε όμως να γράψουμε h΄(1) = g΄(f(1))$\cdot$ f΄(1) αφού δεν υπάρχει το g΄(f(1)) = g΄ (0)

Παραγώγιση ισότητας

Συνηθισμένα λάθη που συναντούμε στις παραγώγους είναι

α) Παραγώγιση εξίσωσης.

Η παράγωγος της f στο x_0 ως όριο της συνάρτησης $\lambda(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ όταν $x\to x_0$ για να ορίζεται πρέπει η λ(x), άρα και η f(x) να ορίζεται κοντά στο x_0, δηλαδή σε ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β).

Κατά τη μελέτη εξισώσεων, γίνεται το σοβαρό λάθος να παραγωγίζονται τα δύο μέλη.
Π.χ δίνονται κάποιες συναρτήσεις f και g (μπορεί να δοθούν οι τύποι τους ή κάποιες ιδιότητές τους) και ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση f(x) = g(x) έχει μια ρίζα στο διάστημα (α, β).
Στην περίπτωση αυτή, η σχέση f(x) = g(x) αληθεύει για κάποιες μόνο τιμές του x που δεν αποτελούν διάστημα. **Έτσι η παραγώγιση f΄(x) = g΄(x) δεν έχει νόημα.**

β) Παραγώγιση συνάρτησης με πεδίο ορισμού το N

Δεν μπορεί να παραγωγιστεί συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N

<u>Παράδειγμα</u> (άσκηση σχολικού βιβλίου)
Ένα πρακτορείο ταξιδιών διοργανώνει μια εκδρομή. Αν στην εκδρομή συμμετάσχουν 100 άτομα, καθένα θα πληρώσει 1000€. Για κάθε επιπλέον άτομο, η τιμή μειώνεται κατά 5€. Πόσα άτομα επιπλέον πρέπει να συμμετάσχουν ώστε το πρακτορείο να έχει τα περισσότερα έσοδα;

<u>Λύση</u>
Αν x είναι ο αριθμός των επιπλέον ατόμων, θα συμμετάσχουν 100+x άτομα και καθένα θα πληρώσει (1000-5x)€. Επομένως τα συνολικά έσοδα του πρακτορείου θα είναι
$E(x) = (100 + x)(1000 - 5x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$
Πρέπει να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης
$E: N \to R$ με $E(x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$
Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η παραγώγιση της E(x) δεν έχει νόημα, αφού η συνάρτηση E ορίζεται μόνο στο N.
Το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση
$\theta: R \to R$ με $\theta(x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$ (επέκταση της E στο R)
Είναι τώρα: $\theta'(x) = -10x + 500$
Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβολών της θ είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	50	$+\infty$
θ(x)	+	0	-
θ΄(x)	↗		↘
		ολ. μέγ	

Επομένως η συνάρτηση θ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = 50

Επειδή $50 \in N$, συμπεραίνουμε ότι και η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = 50

Τι θα συνέβαινε όμως αν η θ(x) παρουσίαζε μέγιστο σε κάποιο σημείο $x_0 \notin N$;

Αλλάζουμε λίγο τα δεδομένα στο πρόβλημα
Αντί η "**τιμή μειώνεται κατά 5€**" τώρα έχουμε "**τιμή μειώνεται κατά 8€**"
Η αντίστοιχη συνάρτηση θ είναι τώρα
$\theta(x) = -8x^2 + 200x + 100\,000,\ x \in R$
Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβολών της θ είναι τώρα ο εξής:

x	$-\infty$	$\frac{25}{2}$	$+\infty$
θ(x)	+	0	-
θ΄(x)	↗		↘
		ολ. μέγ	

Η θ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \dfrac{25}{2} \notin N$

Δεν μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0

Επειδή $12 < \frac{25}{2} < 13$ και η θ είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, \frac{25}{2}]$, το μέγιστο της θ για $x \in N$ στο διάστημα αυτό θα συμβαίνει όταν x = 12.

Αντίστοιχα, στο διάστημα $[\frac{25}{2}, +\infty)$ το μέγιστο της Ε θα συμβαίνει όταν x =13.

Επομένως η μέγιστη τιμή της Ε στο Ν θα συμβαίνει όταν x = 12 ή x = 13

Επειδή τώρα:

Ε(12) = (100 + 12)(1000 – 8.12) = 101 248 και

Ε(13) = (100 + 13)(1000 – 8.13) = 101 248

συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο της Ε συμβαίνει όταν x = 12 και όταν x = 13

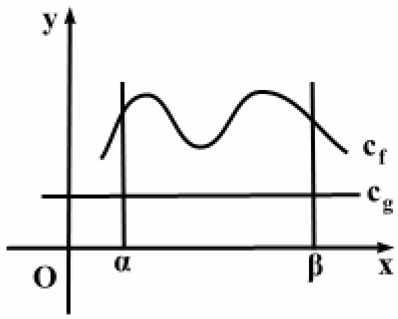
Το ότι Ε(12) = Ε(13) είναι επειδή το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παίρνει την ίδια τιμή για τιμές συμμετρικές ως προς την τιμή $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλαδή για δύο τιμές της μορφής $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \lambda$ και $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \lambda$

(Αυτό αποδεικνύεται γράφοντας την f με τη μορφή $f(x) = \alpha(x + \frac{\beta}{2\alpha})^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$)

Παραγώγιση ανισοτήτων

Οι ανισότητες δεν μπορούν να παραγωγιστούν

Αν δηλαδή για τις συναρτήσεις f και g ισχύει π.χ η σχέση $f(x) > g(x)$, δεν προκύπτει καμία διάταξη για τα $f'(x)$ και $g'(x)$



Στο διπλανό σχήμα, είναι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \Delta = [\alpha, \beta]$

Επίσης $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (αφού η g είναι σταθερή), ενώ για την f΄ αλλού ισχύει $f'(x) > 0$, αλλού $f'(x) < 0$ και αλλού $f'(x) = 0$

Εξίσωση εφαπτομένης καμπύλης

1) Ο κλασικός ορισμός της εφαπτομένης μιας καμπύλης ως η οριακή θέση μιας τέμνουσας που στρέφεται γύρω από το ένα σημείο τομής της με την καμπύλη ωσότου και το δεύτερο σημείο τομής της συμπέσει με το πρώτο, κράτησε αρκετούς αιώνες.

Με τη βοήθεια του ορισμού αυτού αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, στο σημείο της x_0 στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, είναι: $\mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

Ο παραπάνω ορισμός παρουσίαζε ορισμένες ατέλειες, ασάφειες και αδυναμίες. Π.χ δεν μπορούσε να εφαρμοστεί στη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x\in Q\\ 0 & \text{αν } x\notin Q\end{cases}$

Έτσι ο παραπάνω ορισμός αντικαταστάθηκε από έναν πιο σύγχρονο και γενικό ορισμό που είναι ο εξής:

Έστω συνάρτηση f: A $\to$ R η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in A$. Η ευθεία με εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ονομάζεται εφαπτομένη της c_f στο σημείο x_0.

Ο ορισμός αυτός δε δίνει καμιά γεωμετρική εικόνα για το ποια είναι η θέση της c_f σχετικά με την εφαπτομένη της, αλλά αυτό δε μας ενδιαφέρει εδώ.

Στην περίπτωση που η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, επειδή κάποιο από τα πλευρικά όρια της $\lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$, μπορεί πάλι να οριστεί εφαπτομένη της c_f, εδώ όμως δημιουργήθηκε ένα πρόβλημα.

Για κάποιους συγγραφείς

<u>**Ορισμός 1**</u>
Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=+\infty$ ή $-\infty$, η ευθεία $x = x_0$ λέγεται εφαπτομένη της c_f στο σημείο x_0.

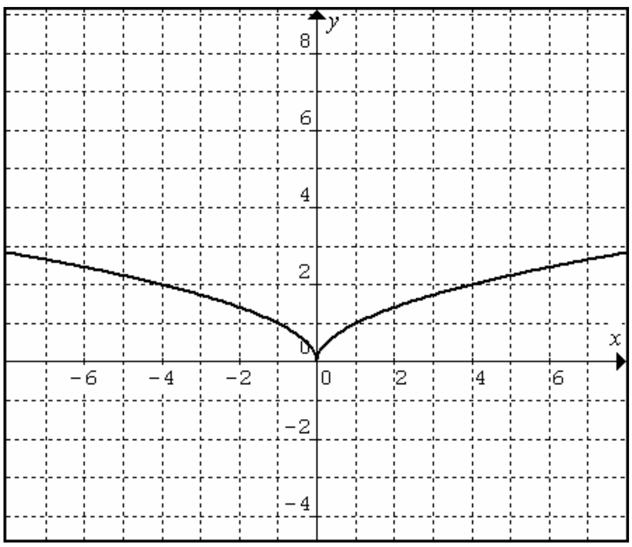
Για κάποιους άλλους (σ' αυτούς συμπεριλαμβάνονται και οι συγγραφείς του σχολικού βιβλίου)

<u>**Ορισμός 2**</u>
Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+}\lambda(x)=+\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\lambda(x)=+\infty$ ή $-\infty$
(4 δυνατοί συνδυασμοί), η ευθεία $x = x_0$ λέγεται εφαπτομένη της c_f στο x_0.

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{αν } x\ge 0\\ \sqrt{-x} & \text{αν } x<0\end{cases}$ είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{|x|}}{-|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{|x|}} = -\infty$$



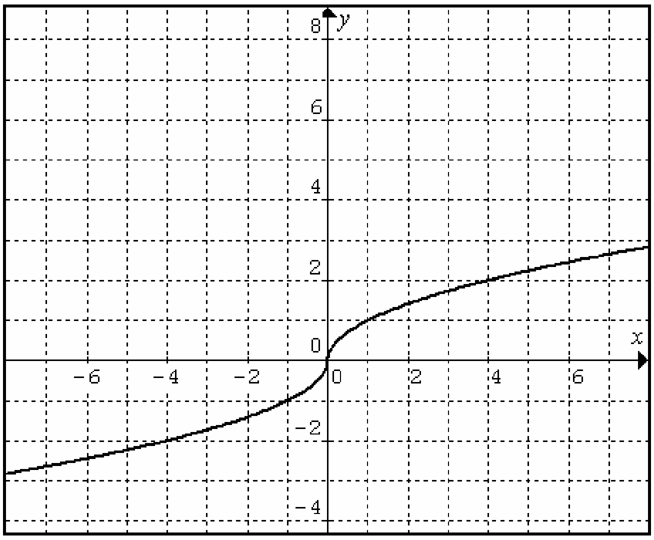
Σύμφωνα με τον 1ο ορισμό, η c_f δε δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 0$, ενώ σύμφωνα με τον 2ο ορισμό, η c_f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη την $x = 0$ δηλαδή τον άξονα y΄y.

Η γραφική παράσταση της f αποδίδεται από το παραπάνω σχήμα.

Το σημείο (0, f(0)) = (0, 0) είναι γωνιακό σημείο της c_f

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

μπορούμε όμοια να βρούμε ότι: $\lim\limits_{x \to 0^-} \lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \lambda(x) = +\infty$, άρα **η c_f δέχεται, σύμφωνα και με τους δύο ορισμούς**, στο σημείο 0 κατακόρυφη εφαπτομένη την x=0, δηλαδή τον άξονα y΄y



Η c_f δεν παρουσιάζει γωνιακά σημεία. Αυτή είναι και η διαφορά των δύο ορισμών.

Ο 1ος ορισμός ορίζει κατακόρυφη εφαπτομένη μόνο σε μη γωνιακά σημεία, ενώ ο 2ος ορισμός δέχεται εφαπτομένη και σε γωνιακά σημεία.

Η γραφική παράσταση της f δίνεται από το παραπάνω σχήμα.

2) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει με την c_f εκτός του σημείου επαφής και άλλα κοινά σημεία, ακόμη και άπειρα όπως προκύπτει από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Αυτό είναι γνωστό για σημεία απομακρυσμένα από το σημείο επαφής, το ότι όμως μπορούμε να έχουμε και κοινά σημεία της εφαπτομένης με την c_f οσονδήποτε κοντά στο σημείο επαφής δεν είναι πολύ γνωστό. Αυτό φαίνεται από το 2ο παράδειγμα

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της $f(x) = x^3$ στο σημείο $x_0 = 1$

β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της c_f με την (ε)

Λύση:

α) $f'(x) = 3x^2$, άρα $f'(1) = 3$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 1$ είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ και τελικά $y = 3x - 2$

β) Τα κοινά σημεία της c_f με την (ε) είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι: (x, y) = (1, 1) και (- 2, - 8)
Το (1, 1) είναι βεβαίως το σημείο επαφής και το άλλο (- 2, - 8) είναι ένα ακόμη κοινό σημείο της c_f με την (ε).

Παράδειγμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 0, & αν\ x = 0 \end{cases}}$

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της c_f στο σημείο $x_0 = 0$
β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της c_f με την (ε)

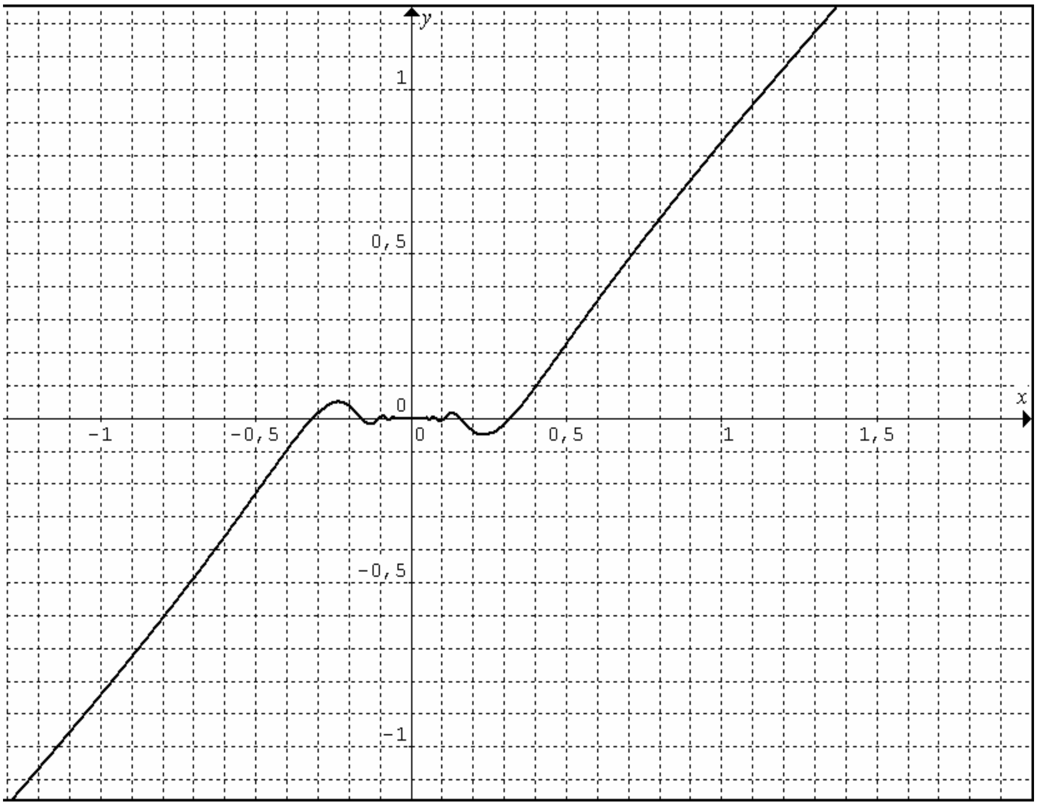
Λύση

α) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0}(xημ\frac{1}{x}) = 0 = f'(0)$ (με κριτήριο παρεμβολής)
Άρα υπάρχει εφαπτομένη της c_f στο 0 με εξίσωση
$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = 0$ (άξονας των x)

β) Κοινά σημεία των c_f και (ε)

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = x^2 ημ\frac{1}{x} \\ y = 0 \end{cases}$

Βρίσκουμε $ημ\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = κπ,\ κ \in Z^* \Leftrightarrow x = \frac{1}{κπ},\ κ \in Z^*$
Η c_f λοιπόν και η (ε) έχουν άπειρα κοινά σημεία $(\frac{1}{κπ}, 0),\ κ \in Z^*$
Η γραφική παράσταση της f δίνεται από το παρακάτω σχήμα



3) Εφαπτομένη μιας ευθείας

Μια μη κατακόρυφη ευθεία είναι γραφική παράσταση συνάρτησης με τύπο $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in R$, επομένως είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0 \in R$ με $f'(x_0) = \alpha$ και άρα δέχεται εφαπτομένη στο x_0 με εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$
$y - (\alpha x_0 + \beta) = \alpha(x - x_0) \Leftrightarrow y = \alpha x + \beta$, δηλαδή

Η εφαπτομένη μιας ευθείας σε τυχαίο σημείο της είναι η ίδια η ευθεία

Ιδιότητες σε διάστημα

Είναι σημαντικό να πούμε ότι οι περισσότερες ιδιότητες των συναρτήσεων σχετικά με τις παραγώγους ισχύουν σε διάστημα.

Παραθέτουμε δύο προτάσεις (η $2^{η}$ είναι συνέπεια της $1^{ης}$)

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0 με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Πρόταση 2

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο Δ και παραγωγίσιμες στο Δ_0 με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε $f = g + c$ δηλαδή $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση των παραπάνω θεωρημάτων. Δείχνουμε πως πρέπει να γίνεται αυτό αυτών με το παρακάτω

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f: R*$\to$R με την ιδιότητα $\mathbf{f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{e^x}{x}}$ **(1)**

Λύση

Η (1) $\Leftrightarrow$ $xf'(x)+f(x)=e^x \Leftrightarrow (xf(x))'=(e^x)'$ για κάθε $x\in R^*$ $\Leftrightarrow$

$$xf(x)=\begin{cases} e^x+c_1 & \text{αν } x<0 \\ e^x+c_2 & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να πούμε ότι $xf(x) = e^x + c$ για κάθε $x\in R^*$, επειδή το $R^* = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ δεν είναι διάστημα.

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $\mathbf{f(x)=\begin{cases} \frac{e^x+c_1}{x} & \text{αν } x<0 \\ \frac{e^x+c_2}{x} & \text{αν } x>0 \end{cases}}$ όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Αν ζητείται να βρούμε τη μοναδική συνάρτηση που επαληθεύει την (1) πρέπει να δοθούν δύο αρχικές συνθήκες.

Αν λοιπόν δοθεί ότι: f(-1) = -1 και f(1) = 0 τότε

$\frac{e^{-1}+c_1}{-1} = -1 \Leftrightarrow c_1 = 1 - \frac{1}{e}$ και

$\frac{e+c_2}{1} = 0 \Leftrightarrow c_2 = -e$

Επομένως: $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x+1-\frac{1}{e}}{x} & \text{αν } x<0 \\ \frac{e^x-e}{x} & \text{αν } x>0 \end{cases}$

Θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής

Σύμφωνα με το πρώτο:

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

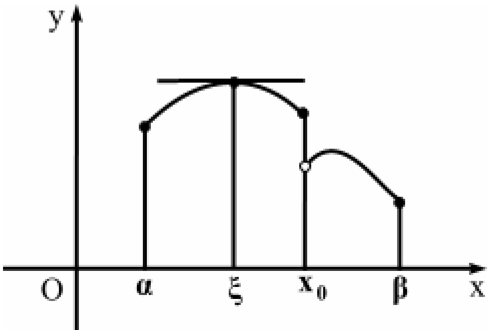
- **Η f είναι συνεχής στο [α, β]**
- **Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)**
- **f(α) = f(β)**

τότε υπάρχει σημείο $\xi\in(\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

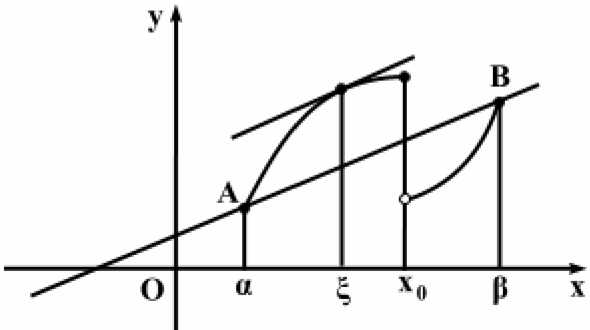
Παρατηρήσεις
α) Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου ξ μόνο αν ισχύουν όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις. Αν δεν ισχύει έστω και μία από αυτές, τότε **ίσως** δεν υπάρχει κανένα σημείο ξ με την ιδιότητα $f'(\xi) = 0$

β) Μπορούν να υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία ξ με την ιδιότητα $f'(\xi) = 0$, ακόμη και άπειρα.

γ) Σημεία ξ με την ιδιότητα $f'(\xi) = 0$ μπορεί να υπάρχουν έστω και αν δεν ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις. Σημεία ξ μπορούν να υπάρχουν ακόμη και αν δεν ισχύει καμία από τις προϋποθέσεις.



σχ. 1



σχ. 2

Στο παραπάνω σχήμα 1, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0, άρα δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο x_0. Επίσης είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Σημείο όμως ξ με $f'(\xi) = 0$ δηλαδή σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον άξονα των x υπάρχει.

Μπορούμε με παρόμοια σχήματα να δείξουμε ότι μπορούν να υπάρχουν και περισσότερα σημεία, ακόμη και άπειρα.

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το θεώρημα της Μέσης Τιμής όπως δείχνει το σχήμα 2, στο οποίο η f δεν πληρεί καμία από τις προϋποθέσεις. Όμως υπάρχει σημείο ξ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την χορδή που συνδέει τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β))

Μονοτονία συνάρτησης

Η μονοτονία μιας συνάρτησης σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο ορίζεται μόνο σε διάστημα. Δεν μπορούμε δηλαδή να μιλάμε για μονοτονία π.χ στο σύνολο $(1, 2) \cup (2, 3)$ διότι το σύνολο αυτό δεν είναι διάστημα.

Η μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων στηρίζεται στην εξής

Πρόταση
Αν η συνάρτηση f είναι

- **συνεχής στο διάστημα Δ**
- **$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$,**

τότε η f είναι γν. αύξουσα στο Δ

Παρατηρήσεις

α) Από το ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ_0 προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο Δ_0. Επομένως το ότι η f είναι συνεχής στο Δ το μόνο που προσθέτει είναι ότι η f είναι συνεχής (πλευρικά) στα άκρα του διαστήματος, αν το διάστημα είναι κλειστό ή αν είναι ημιανοιχτό.

Στην περίπτωση που το Δ είναι ανοιχτό διάστημα, η πρώτη συνθήκη περιττεύει. Δηλαδή η f θα είναι υποχρεωτικά συνεχής στο Δ

β) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Αν δηλαδή η f είναι συνεχής στο Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$, αλλά μπορεί να είναι και $f'(x) = 0$ για κάποια $x \in \Delta$

γ) Το θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$, και ο μηδενισμός της f΄ γίνεται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, τότε η f είναι γν. αύξουσα στο Δ.

Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για ένα σημείο μηδενισμού της f΄, δηλαδή να αποδείξουμε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ενώ $f'(x_0) = 0$, τότε η f είναι γν. αύξουσα στο {α, β}

Πράγματι, στο $\{\alpha, x_0]$ η f είναι συνεχής $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\{\alpha, x_0]$. Για τον ίδιο λόγο η f είναι γν. αύξουσα στο $[x_0, \beta\}$. Επομένως η f είναι γν. αύξουσα και στην ένωση $\in \{\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta\}$, δηλαδή στο {α, β}

δ) Η ίδια απόδειξη ισχύει και στην περίπτωση που η f΄ δεν υπάρχει στο x_0 ή σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, δηλαδή ισχύει η εξής γενικότερη πρόταση:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ. Ονομάζουμε Π το σύνολο των σημείων στα οποία η f΄ μηδενίζεται ή δεν υπάρχει. Αν το Π είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε η f είναι γν. αύξουσα στο Δ.

Η πρόταση μπορεί να επεκταθεί ακόμη περισσότερο ως εξής:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ. Ονομάζουμε Π το σύνολο των σημείων στα οποία η f΄ μηδενίζεται. Αν κανένα υποσύνολο του Π δεν αποτελεί διάστημα, τότε η f είναι γν. αύξουσα στο Δ

Τα παρακάτω παραδείγματα θα αποσαφηνίσουν τις παραπάνω παρατηρήσεις

Παράδειγμα 1ο

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f: R^* \to R$ με $f(x) = \frac{1}{x}$

Λύση

Η f ορίζεται στο σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ που δεν είναι διάστημα.

Για κάθε $x \in A$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Επομένως η f είναι γν. φθίνουσα σε καθένα ξεχωριστά από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο δεν μπορούμε να μιλάμε για μονοτονία στο Α που δεν είναι διάστημα. Αν όμως θέλουμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της μονοτονίας σε οποιοδήποτε σύνολο, η f δεν είναι γν. φθίνουσα στο Α, αφού για $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$, δηλαδή $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

Παράδειγμα 2ο

Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & αν\ \ x < 2 \\ 3x - 6 & αν\ \ x \geq 2 \end{cases}}$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο R (αποδεικνύεται εύκολα) και παραγωγίσιμη στο R – {2} με
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & αν\ \ x < 2 \\ 3 & αν\ \ x > 2 \end{cases}$$

[στο σημείο $x_0 = 2$ δεν μας ενδιαφέρει αν η f είναι ή δεν είναι παραγωγίσιμη. Μας αρκεί το ότι είναι συνεχής. Έτσι δεν ψάξαμε για παραγωγισιμότητα στο σημείο αυτό. Αν μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα στο 2, θα δούμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη]

Η f΄ μηδενίζεται στο 1. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		-	0	+		+	
f΄(x)		↘		↗		↗	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γν. αύξουσα στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, +\infty)$ (και τα δύο διαστήματα είναι κλειστά στο 2), επομένως η f είναι γν. αύξουσα και στην ένωση $[1, 2] \cup [2, +\infty) = [1, +\infty)$.

Παράδειγμα 3ο

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^4 & αν\ \ x < 0 \\ -x^3 - x & αν\ \ x \geq 0 \end{cases}}$

Λύση

Εύκολα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο R και παραγωγίσιμη στο R* με
$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & αν\ \ x < 0 \\ -3x^2 - 1 & αν\ \ x > 0 \end{cases}$$
(για το σημείο 0 όπου η f είναι συνεχής, δε μας ενδιαφέρει η παραγωγισιμότητα)

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επομένως η f είναι γν. φθίνουσα σ' ολόκληρο το R.

Παράδειγμα 4ο

Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης f: R→R με $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{2} - xσυνx + ημx}$

Λύση
Η f είναι συνεχής στο R.
Εδώ είναι: $f'(x) = x(1 + ημx)$
Επειδή $1 + ημx \geq 0$ για κάθε $x \in R$, θα είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Στο παράδειγμα αυτό η f΄ μηδενίζεται σε άπειρα σημεία τα οποία όμως είναι μεμονωμένα. Ο μηδενισμός της f΄ στα σημεία αυτά δεν επηρεάζει τη μονοτονία της.

Ακρότατα συνάρτησης (ολικά και τοπικά)

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : A \to R$ παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in A$

- **Ολικό μέγιστο, αν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$**
- **Ολικό ελάχιστο, αν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$**
- **Τοπικό μέγιστο, αν υπάρχει δ > 0 τέτοιος ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε**

  $x \in A \cap (x_0 - δ, x_0 + δ)$
- **Τοπικό ελάχιστο, αν υπάρχει δ > 0 τέτοιος ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - δ, x_0 + δ)$**

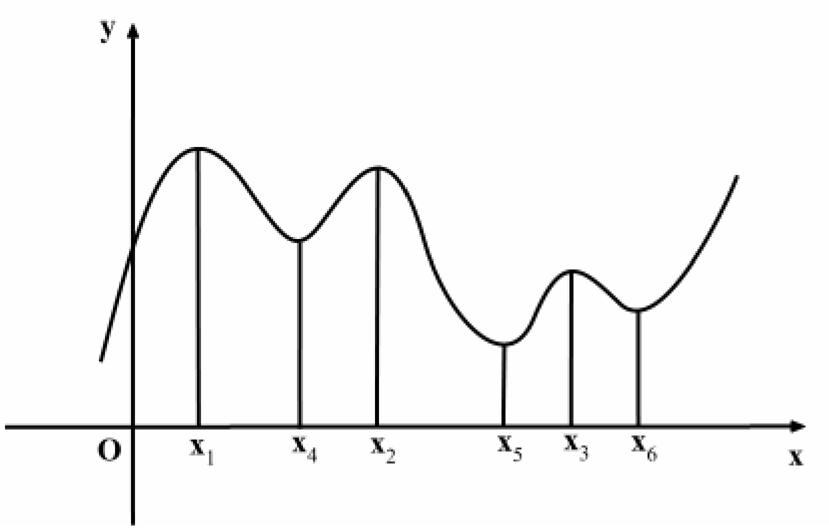
Τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης λέγονται και ολικά ακρότατα, ενώ τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα λέγονται τοπικά ακρότατα.

Στο σημείο αυτό υπάρχει κάποια διένεξη μεταξύ του βιβλίου της Γενικής Παιδείας και του βιβλίου της Κατεύθυνσης.
Στο βιβλίο της Κατεύθυνσης τα ολικά ακρότατα ονομάζονται απλά "ακρότατα", ενώ για το βιβλίο της Γενικής Παιδείας με την λέξη ακρότατα εννοούμε και τα ολικά και τα τοπικά ακρότατα.
Θα υιοθετήσουμε εδώ την ορολογία του βιβλίου της Κατεύθυνσης

Παρατηρήσεις
1) Το ολικό μέγιστο, όταν υπάρχει, είναι η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της και είναι μοναδικό. Μπορεί όμως να συμβαίνει για περισσότερες τιμές του x. Έτσι η συνάρτηση $f(x) = ημx$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1 για άπειρες τιμές του x της μορφής
$x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in Z$
Αντίστοιχα ισχύουν για το ολικό ελάχιστο
2) Τα ολικά ακρότατα είναι και τοπικά.

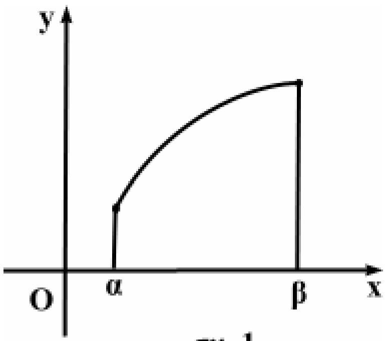
3) Τοπικά ακρότατα μπορούν να υπάρχουν περισσότερα του ενός, ακόμη και άπειρα. Στο παρακάτω σχήμα στα σημεία x_1, x_2, x_3 έχουμε τοπικά μέγιστα, ενώ στα σημεία x_4, x_5, x_6 έχουμε τοπικά ελάχιστα.

4) Από το ίδιο σχήμα προκύπτει ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Π.χ το $f(x_3)$ που είναι τοπικό μέγιστο, είναι μικρότερο από το $f(x_4)$ που είναι τοπικό ελάχιστο.

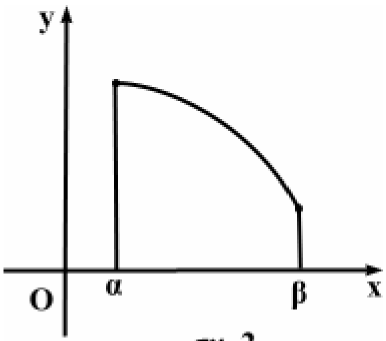


5) Δεν είναι σίγουρο ότι κάθε συνάρτηση παρουσιάζει ολικά ή τοπικά ακρότατα.
Π.χ η συνάρτηση $f : A \to R$ με $f(x) = 2x$ δεν παρουσιάζει ούτε ολικά ούτε τοπικά ακρότατα.

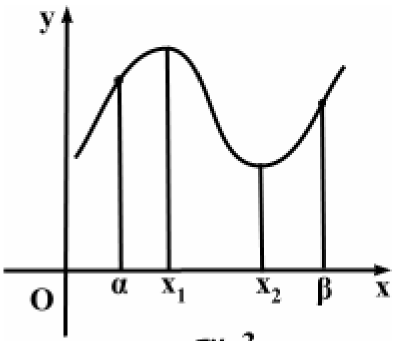
6) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, τότε παρουσιάζει και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Αυτά τα ακρότατα δε συμβαίνουν υποχρεωτικά στα άκρα του διαστήματος. Έτσι π.χ στα παρακάτω σχήματα συμβαίνουν τα εξής:



σχ. 1



σχ. 2



σχ. 3

Στο σχ. 1 η f είναι γν. αύξουσα στο [α, β] και στο x = α παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, ενώ στο x = β παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
Στο σχ. 2 η f είναι γν. φθίνουσα στο [α, β] και στο x = α παρουσιάζει ολικό μέγιστο, ενώ στο x = β παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

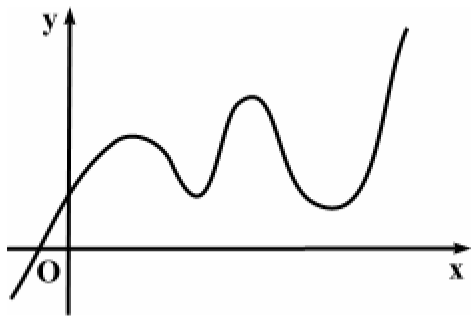
Στο σχ.3 η f δεν είναι μονότονη. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_1 και ολικό ελάχιστο στο x_2.

7) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f δεν είναι υποχρεωτικά ολικό μέγιστο της f.

Αντίστοιχα, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικά ολικό ελάχιστο της f.

Αν όμως υπάρχει ολικό μέγιστο, τότε αυτό είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα και αν υπάρχει ολικό ελάχιστο, αυτό είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

Τα παραπάνω γίνονται φανερά από το διπλανό σχήμα στο οποίο δεν υπάρχει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.



8) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ όπου Α = [α, β] δεν παρουσιάζει οπωσδήποτε ακρότατα στα άκρα του διαστήματος α και β. Ακόμη και αν είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη. Έτσι π.χ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ x\eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν } x \in (0,1] \end{cases}$$

με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [0, 1], είναι συνεχής στο [0, 1], αφού είναι συνεχής στο (0, 1] και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\eta\mu\frac{1}{x}) = 0$ = f(0), δηλαδή είναι συνεχής και στο 0 (απόδειξη με το κριτήριο παρεμβολής).

Δεν παρουσιάζει όμως ακρότατο στο 0 (ούτε ολικό ούτε τοπικό) αφού σε κάθε σύνολο της μορφής $A \cap (0-\delta, 0+\delta) = [0, \delta)$ με $\delta < 1$ μπορούμε να βρούμε σημεία x με $f(x) > 0$ και σημεία x με $f(x) < 0$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για όλα τα σημεία $x_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\nu \in N^*$, ισχύει

$$f(x_\nu) = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\eta\mu(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} > 0 = f(0)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο ν, ώστε $x_\nu < \delta$, δηλαδή να είναι $x_\nu \in [0, \delta)$

Πράγματι, για να είναι $x_\nu \in [0, \delta)$, αρκεί: $\dfrac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta \Leftrightarrow 2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2} > \dfrac{1}{\delta}$

Για να ισχύει η τελευταία αρκεί να ισχύει $2\nu\pi > \dfrac{1}{\delta} \Leftrightarrow \nu > \dfrac{1}{2\pi\delta}$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε $\nu = [\frac{1}{2\pi\delta}] + 1 > \frac{1}{2\pi\delta}$ όπου το σύμβολο $[\frac{1}{2\pi\delta}]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του $\dfrac{1}{2\pi\delta}$

Αντίστοιχα, αν πάρουμε $x'_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}}$ είναι $f(x'_\nu) = \dfrac{1}{2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}}\eta\mu(2\nu\pi + \dfrac{3\pi}{2}) =$

$\dfrac{1}{2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}}(-1) < 0 =$ f(0) και μπορούμε πάλι να επιλέξουμε $\nu = [\frac{1}{2\pi\delta}] + 1 > \frac{1}{2\pi\delta}$ ώστε

$x'_\nu \in [0, \delta)$

Άρα η f δεν παρουσιάζει ούτε ολικό ούτε τοπικό ακρότατο στο 0

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x=0 \\ x^2\eta\mu\frac{1}{x} & \text{αν } x\in(0,1] \end{cases}$$

ενώ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο [0, 1], δεν παρουσιάζει ακρότατο, ούτε ολικό ούτε τοπικό στο 0.

9) Τα ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης $f: A \to R$ μπορούν να βρεθούν από το σύνολο τιμών της. Όμως **από το σύνολο τιμών της f δεν μπορούν να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα**. Έτσι

- Αν f(A) = [α, β], το α είναι το ολικό ελάχιστο και το β το ολικό μέγιστο της f τα οποία όπως αναφέραμε είναι και τοπικά. Αυτό δεν αποκλείει να υπάρχουν και άλλα τοπικά ακρότατα.

- Αν f(A) = (α, β), η f δεν έχει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο (αυτό δεν αποκλείει να έχει τοπικά ακρότατα)

- Αν f(A) = [α, β), η f έχει ολικό ελάχιστο το α και δεν έχει ολικό μέγιστο (μπορεί όμως να έχει τοπικό μέγιστο ή και άλλα τοπικά ελάχιστα)

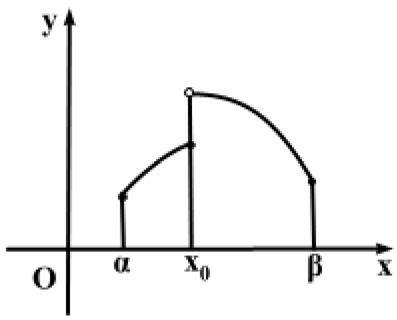
- Αν f(A) = (α, β], η f δεν έχει ολικό ελάχιστο, έχει όμως ολικό μέγιστο το β

- Για τη συνάρτηση f(x) = 2x, αν το πεδίο ορισμού της είναι το $A = [1, 2)\cup[3, 5)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = [2, 4)\cup[6, 10)$ και η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(1) = 2, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε ολικό ούτε τοπικό. Παρουσιάζει όμως και άλλο τοπικό ελάχιστο το f(3) = 6, αφού στο σύνολο
$A\cap(3-1, 3+1) = [3, 4)$ η τιμή f(3) είναι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης.

10) Ισχύει το εξής θεώρημα σχετικό με τα τοπικά ακρότατα.

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται στο (α, β) και $x_0\in(\alpha, \beta)$. Αν η f είναι αύξουσα στο (α, x_0] και φθίνουσα στο [x_0, β) τότε το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f .

Εδώ αρκεί η μονοτονία και όχι η γνήσια μονοτονία.
Χρειάζεται προσοχή, τα διαστήματα στο x_0 να είναι κλειστά.
Αν η f είναι αύξουσα στο (α, x_0] και φθίνουσα στο (x_0, β), αυτό δεν εξασφαλίζει ότι στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όπως δείχνει το διπλανό σχήμα.



Η μονοτονία της f εξασφαλίζεται από το πρόσημο της f΄.

Επισημαίνουμε ότι δεν είναι απαραίτητο η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0, θετική στο (α, x_0) και αρνητική στο (x_0, β) οπότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

11) Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι με τη βοήθεια της $1^{ης}$ παραγώγου μπορούμε να βρούμε τόσο τοπικά, όσο και ολικά ακρότατα.

Δίνουμε μερικά παραδείγματα σωστής χρήσης των παραπάνω προτάσεων.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>
Ακρότατα (ολικά και τοπικά) της συνάρτησης
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

<u>Λύση</u>
$f'(x) = 2x - 4$
Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβολών της f είναι:
Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 2 ίσο με $f(2) = -1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		-	0	+	
f΄(x)		↘		↗	
			ολ. ελ		

Ολικό μέγιστο δεν υπάρχει, αφού $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Επίσης δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο εξαιτίας της μονοτονίας της f

<u>Παράδειγμα 2ο</u>
Ακρότατα (ολικά και τοπικά) της
$f(x) = x^3 - 3x + 5,\ x \in [-2, 3]$

Είναι: $f'(x) = 3x^2 - 3$
Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	-2		-1		1		3
f(x)		+	0	-	0	+	
f΄(x)		↗		↘		↗	
	τ.ε		τ.μ		τ.ε		τ.μ

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει
για $x = -2$ τοπ. ελάχιστο ίσο με $f(-2) = 3$
για $x = -1$ τοπ. μέγιστο ίσο με $f(-1) = 7$
για $x = 1$ τοπ. ελάχιστο ίσο με $f(1) = 3$
για $x = 3$ τοπ. μέγιστο ίσο με $f(3) = 23$

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 3 ίσο με 23 και ολικό ελάχιστο στα -2 και 1 ίσο με 3

<u>Παράδειγμα 3ο</u>
Ακρότατα (ολικά και τοπικά) της $f(x) = |x^2 - 1|$

Η f γράφεται $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{αν } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{αν } -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και παραγωγίσιμη στο R – {-1, 1} με

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{αν } x<-1 \\ -2x & \text{αν } -1<x<1 \\ 2x & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

Δε χρειάζεται να εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της f στα -1 και 1

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$
			τ.ε		τ.μ		τ.ε		

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει
για x = -1 τοπικό ελάχιστο ίσο με f(-1) = 0
για x = 0 τοπικό μέγιστο ίσο με f(0) = 1
για x = 1 τοπικό ελάχιστο ίσο με f(1) = 0
Η f δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, παρουσιάζει όμως ολικό ελάχιστο το f(-1) = f(1) =0 αφού στο διάστημα ($-\infty$, 0] η τιμή f(-1) είναι η ελάχιστη και στο διάστημα [0, $+\infty$) η τιμή f(1) είναι επίσης η ελάχιστη.

Ακρότατα με τη βοήθεια της 2ης παραγώγου

Η εύρεση ακροτάτων με τη βοήθεια της 2ης παραγώγου είναι εκτός διδακτέας ύλης. Η παράγραφος αυτή αφαιρέθηκε τόσο από τα μαθηματικά της Γενικής Παιδείας όσο και από τα μαθηματικά κατεύθυνσης. Επειδή όμως από τα αντίστοιχα σχολικά βιβλία προκύπτουν ερωτηματικά για την εφαρμογή τους, δείχνουμε πως ισχύουν αυτά.

Ισχύει η παρακάτω

Πρόταση
Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και x_0 είναι μια ρίζα της $1^{ης}$ παραγώγου, δηλαδή $f'(x_0) = 0$, τότε

- **Αν $f''(x_0) > 0$, η f για $x = x_0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ**
- **Αν $f''(x_0) < 0$, η f για $x = x_0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο**
- **Αν $f''(x_0) = 0$ δεν προκύπτει συμπέρασμα**

Πιο ειδικά ισχύει:
Αν $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$ τότε
Αν ν = περιττός, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , ενώ ν = άρτιος, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και μάλιστα
Αν $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο, ενώ αν $f^{(\nu)}(x_0) > 0$ παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Η πρόταση αυτή λοιπόν δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση ολικών ακροτάτων παρά μόνον τοπικών.

Καμπυλότητα – Σημεία καμπής

Ορισμοί
1) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0 (εσωτερικό του Δ). Λέμε ότι

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γν. αύξουσα στο Δ_0**

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f΄ είναι γν. φθίνουσα στο Δ_0**

2) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως το σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- **η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίστροφα**
- **η c_f έχει εφαπτομένη στο x_0**

τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της c_f

Παρατηρήσεις
1) Οι παραπάνω ορισμοί της καμπυλότητας είναι οι ορισμοί του σχολικού βιβλίου. Υπάρχουν διαφορετικοί ορισμοί σε άλλα βιβλία.

2) Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης ορίστηκε μόνο σε διάστημα και όχι σε οποιοδήποτε σύνολο. Π.χ δεν μπορούμε να μιλάμε για καμπυλότητα στο σύνολο
$(1, 2) \cup (2, 3)$

3) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, πρέπει στο x_0 να υπάρχει εφαπτομένη. Εδώ υπάρχει μια σύγχυση.
Επειδή η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός διδακτέας ύλης, για τους λόγους που έχουμε αναφέρει, για τους μαθητές, οι εκφράσεις **"η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0"** και **"η c_f έχει εφαπτομένη στο x_0"** είναι ταυτόσημες. Έτσι, το ότι η f δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0, η c_f όμως έχει εφαπτομένη στο x_0 φαίνεται αντιφατικό. Όμως ο ορισμός εδώ θέλει να συμπεριλάβει και την κατακόρυφη εφαπτομένη και για τον λόγο αυτό δεν απαιτεί η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Δηλαδή αντίφαση δεν υπάρχει.

4) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, ο ορισμός απαιτεί να είναι η c_f κυρτή σε διάστημα $(α, x_0)$ και κοίλη σε διάστημα $(x_0, β)$ ή αντίστροφα. Προς τούτο αρκεί $f''(x) >0$ στο $(α, x_0)$ και $f''(x) < 0$ στο $(x_0, β)$ ή αντίστροφα. Επομένως δεν αρκεί η f'' να είναι θετική σε κάποιο σημείο του $(α, x_0)$ και αρνητική σε κάποιο σημείο του $(x_0, β)$.
Η παρανόηση αυτή οδήγησε στο λάθος θέμα των Πανελλαδικών της 29-5-2003[2]

5) Για να είναι το σημείο x_0 σημείο καμπής δεν είναι απαραίτητο η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Αρκεί στο x_0 η c_f να δέχεται εφαπτομένη. Αυτό συμβαίνει όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή ακόμη και όταν δεν είναι, επειδή το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ή $-\infty$ οπότε δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.
Αν εκατέρωθεν του x_0 δεν αλλάζει η καμπυλότητα της f δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε την πραγωγισιμότητα της f στο x_0 όπως δείχνουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα
Να εξεταστεί ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+1, & αν\ \ x\le 1\\ -x^3+6x^2, & αν\ \ x>1\end{cases}}$$

Λύση
Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής στο R.
Είναι επίσης: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+6x, & αν\ \ x<1\\ -3x^2+12x, & αν\ \ x>1\end{cases}$

Δεν εξετάζουμε ακόμη την παραγωγισιμότητα της f στο 1. Ίσως αυτό να μη μας χρειαστεί.

Είναι ακόμη: $f''(x)=\begin{cases} 6x+6, & αν\ \ x<1\\ -6x+12, & αν\ \ x>1\end{cases}$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

[2] Για όλες τις λεπτομέρειες του θέματος, βλέπε άρθρο μας
α) στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ της Ε.Μ.Ε Ημαθίας, τεύχος 2, σελ. 119-123
β) εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας της 30-5-2003 στη διεύθυνση www.laosver.gr
γ) εκπαιδευτική ιστοσελίδα www.teach.gr

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+		+	0	-	
f(x)		$\frown$		$\smile$		$\smile$		$\frown$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στα διαστήματα [-1, 1] και [1, 2], ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα $(-\infty, -1]$ και $[2, +\infty)$
Τα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ είναι σημεία καμπής.

Η παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 1$ τελικά δε χρειάζεται.
Αν όμως η καμπυλότητα άλλαζε εκατέρωθεν του σημείου αυτού, θα έπρεπε να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 για να δούμε αν το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής.

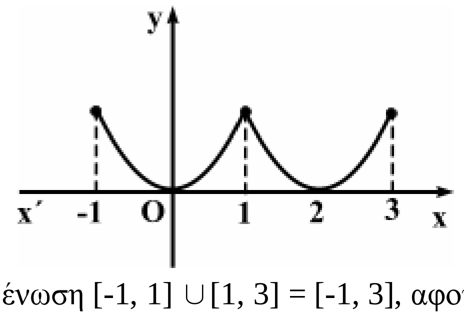
6) Αντίθετα με τη μονοτονία κατά την οποία αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα $\{\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta\}$ τότε η f είναι γν. αύξουσα και στην ένωση $\{\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$, για την καμπυλότητα δεν ισχύει η αντίστοιχη πρόταση. Δηλαδή:

Αν η f στρέφει τα κοίλα πάνω στα $\{\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta\}$, δεν προκύπτει συμπέρασμα για την καμπυλότητα στην ένωση $\{\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$

Αυτό προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια ενός διαγράμματος στο οποίο καταφαίνεται η αλήθεια της πρότασης. Από το ίδιο το διάγραμμα κατασκευάσαμε και την αντίστοιχη συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα [-1, 1] και [1, 3], ενώ δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1, 1] \cup [1, 3] = [-1, 3]$.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}}$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της



Είναι: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } -1 \le x < 1 \\ 2(x-2), & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$

Η f' είναι γν. αύξουσα στα (-1, 1) και (1, 3), άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα [-1, 1] και [1, 3], όμως η f δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1, 1] \cup [1, 3] = [-1, 3]$, αφού η f' δεν είναι γν. αύξουσα στο (-1, 3).
Πράγματι, $f'(\frac{1}{2}) = 1$ και $f'(\frac{3}{2}) = -1$, δηλαδή $f'(\frac{1}{2}) > f'(\frac{3}{2})$

7) Αν η f είναι συνεχής στο $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $x_0 \in \Delta$, υπάρχει η f' στο $\Delta_0 = (\alpha, \beta)$ και $f''(x_0) = 0$ τότε αν

- **$f''(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο Δ**
- **$f''(x) < 0$ στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ.**

Πράγματι, επειδή f΄ συνεχής στο Δ_0 (αφού είναι παραγωγίσιμη) και f΄΄ (x) > 0 στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, η f΄ είναι γν. αύξουσα στο Δ_0, οπότε η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο Δ

Όμοια γίνεται η απόδειξη για τη 2^{η} περίπτωση

<u>Παρατηρήσεις</u>

Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι τα σημεία μηδενισμού της f΄΄ μπορούν να είναι και περισσότερα.

Αποδεικνύεται ακόμη μπορούν να είναι και άπειρα, αρκεί κανένα υποσύνολο των σημείων μηδενισμού να μην αποτελεί διάστημα.

Από την ίδια απόδειξη προκύπτει ότι

Όταν η f΄΄ δεν υπάρχει σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του Δ_0, στα υπόλοιπα όμως σημεία του Δ_0 είναι f΄΄(x) >0, η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο Δ.

Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση που η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ.

8) Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $x_0\in\Delta_0$, τότε το x_0 δεν μπορεί να είναι συγχρόνως σημείο τοπικού ακροτάτου και σημείο καμπής.

Πράγματι, έστω ότι το σημείο x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και σημείο καμπής. Τότε, υπάρχει δ > 0, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f'(x_0) = 0$ και ταυτόχρονα η f΄ αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0, π.χ η f΄ είναι γν. αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γν. φθίνουσα στο $(x_0, x_0 + \delta)$.

Τότε, για $x\in(x_0 - \delta, x_0)$ θα είναι: $f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για $x\in(x_0, x_0 + \delta)$ θα είναι πάλι $f'(x) < f'(x_0) = 0$, δηλαδή θα είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x\in(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, επομένως η f θα είναι γν. φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και το x_0 δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι το x_0 είναι και σημείο τοπικού ακροτάτου και σημείο καμπής.

Έτσι το x_0 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και σημείο τοπικού ακροτάτου και σημείο καμπής.

Τα παρακάτω φαίνονται εύκολα από τον πίνακα που ακολουθεί.

x	**$x_0 - \delta$**	**x_0**	**$x_0 + \delta$**
f΄(x)	- ↗	0	↘ -
f(x)	↘		↘

Σημεία τομής ασύμπτωτης με την c_f

Οι ορισμοί, τόσο της οριζόντιας όσο και της πλάγιας ασύμπτωτης επιτρέπουν να έχει η οριζόντια ή η πλάγια ασύμπτωτη κοινά σημεία με τη c_f. Αυτό είναι γενικά γνωστό, όμως η περίπτωση να έχει η c_f με την ασύμπτωτή της κοινά σημεία οσοδήποτε μακριά από την αρχή των συντεταγμένων δεν είναι πολύ γνωστή.

Η περίπτωση αυτή φαίνεται τα παραδείγματα που ακολουθούν

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Η συνάρτηση f ορίζεται ως $f(x) = 2 + \frac{ημx}{x}$, $x \in R^*$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ημx}{x} = 0$, η ευθεία ε: y = 2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της c_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
Βρίσκουμε τώρα τα κοινά σημεία των c_f και ε.
Οι τετμημένες αυτών είναι λύσεις της εξίσωσης:

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{ημx}{x} = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ,\ κ \in Z^*$

Υπάρχουν λοιπόν άπειρα σημεία τομής της ε με την c_f και μάλιστα οσοδήποτε μακριά από την αρχή.

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Η συνάρτηση f ορίζεται ως $f(x) = 2x + \frac{ημx}{x}$, $x \in R$

Είναι πάλι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ημx}{x} = 0$, άρα η ευθεία ε με εξίσωση y = 2x είναι πλάγια ασύμπτωτη της c_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των c_f και ε είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$f(x) = 2x \Leftrightarrow \frac{ημx}{x} = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ,\ κ \in Z^*$

Και στο παράδειγμα αυτό λοιπόν έχουμε άπειρα κοινά σημεία της ε με τη c_f