

Η αναγκαιότητα ενίσχυσης της διδασκαλίας των εννοιών της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας

Κυριαζής Χρήστος, chriskyriazis@gmail.com
Πρωτοπαπάς Ελευθέριος, lprotopapas@math.ntua.gr
Σαμπάνη Μαρία, sabani.maria@yahoo.com

Περίληψη

Η Μαθηματική Λογική είναι ένας από τους βασικούς πυλώνες ανάπτυξης των Μαθηματικών. Η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία είναι δύο από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της Μαθηματικής Λογικής. Στα σχολικά Μαθηματικά δεν διδάσκεται η Μαθηματική Λογική και υπάρχουν ελάχιστες αναφορές στη συνεπαγωγή και στην ισοδυναμία. Παρόλα αυτά, η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποιεί ευρέως αυτά τα σύμβολα. Στην παρούσα εργασία καταγράφουμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις χρήσης ισοδυναμίας, παρουσιάζοντας τις διαφορές με τη συνεπαγωγή. Επίσης, διερευνούμε το επίπεδο κατανόησης των εννοιών αυτών από 822 μαθητές της Γ' Λυκείου και από 103 πρωτοετείς φοιτητές χρησιμοποιώντας ένα ερωτηματολόγιο 10 ερωτήσεων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι δεν υπάρχει επαρκής κατανόηση των εννοιών αυτών, αναδεικνύοντας την αναγκαιότητα να δίνεται βαρύτητα στη διδασκαλία και κατά συνέπεια στη σωστή χρήση τους.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική Λογική, σχολικά Μαθηματικά.

Abstract

Mathematical Logic is one of the main pillars of the development of Mathematics. Implication and biconditional are two of the most basic processes of Mathematical Logic. In secondary education, Mathematical Logic is not taught and there are few references to implication and biconditional. Nevertheless, the majority of students use these symbols widely. In this paper we record the most typical cases of using

biconditional, presenting the differences with implication. Also, we investigate the level of understanding of these concepts by third high school students and first-year students of universities using a questionnaire with 10 questions. The results show that there is insufficient understanding of these concepts, highlighting the necessity to give importance to teaching and consequently to their correct use.

Θεωρητικό υπόβαθρο.

Έστω οι προτάσεις p , q . Στα Μαθηματικά οι προτάσεις που ισχύουν ή αποδεικνύουμε έχουν κυρίως μία από τις μορφές:

«Αν ισχύει η p , τότε ισχύει η q » (1)

ή

«Ισχύει η p αν, και μόνο αν, ισχύει η q » (2)

Η (1) εκφράζει τη συνεπαγωγή, την οποία συμβολίζουμε με $p \Rightarrow q$ (Stewart & Tall, 2020). Στα Μαθηματικά η ισχύς της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$ δεν απαιτεί την ισχύ της p . Συγκεκριμένα, η συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο αν η p είναι αληθής και η q ψευδής (Πίνακας 1).

p	q	$p \Rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Πίνακας 1: Πίνακας αληθείας για τη συνεπαγωγή.

Άλλοι τρόποι έκφρασης της συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$, είναι οι:

«Αν ισχύει η p συνεπάγεται η q »

«Η p είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει η q »

«Η q είναι αναγκαία συνθήκη (συνέπεια) όταν ισχύει η p »

«Για να ισχύει η q αρκεί να ισχύει η p »

Εκτός από τη συνεπαγωγή υπάρχει και η αντίστροφη συνεπαγωγή ($\Leftarrow$), όπου η έκφραση $p \Leftarrow q$ ταυτίζεται με την $q \Rightarrow p$ και κατά συνέπεια, μπορεί να εκφραστεί με τις:

«Αν ισχύει η q συνεπάγεται η p »

«Η q είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει η p »

«Η p είναι αναγκαία συνθήκη όταν ισχύει η q »

«Για να ισχύει η p αρκεί να ισχύει η q »

Η (2) εκφράζει την ισοδυναμία (ή διπλή συνεπαγωγή), την οποία συμβολίζουμε με $p \Leftrightarrow q$ (Αγγελής & Μπλέρης, 2003). Η ισοδυναμία είναι ψευδής μόνο αν οι p, q δεν είναι ταυτόχρονα αληθείς ή ψευδείς (Πίνακας 2).

p	q	$p \Leftrightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A

Πίνακας 2: Πίνακας αληθείας για την ισοδυναμία.

Άλλοι τρόποι έκφρασης της ισοδυναμίας $p \Leftrightarrow q$, είναι οι:

«Αν ισχύει η p , τότε ισχύει η q , και αντιστρόφως»

«Αν ισχύει η p τότε, και μόνο τότε, ισχύει η q »

«Η p είναι ικανή συνθήκη και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η q »

«Η p είναι ισοδύναμη με την πρόταση q »

«Για να ισχύει η p πρέπει και αρκεί να ισχύει η q »

Στη συνεπαγωγή και την αντίστροφη συνεπαγωγή υπάρχει ξεκάθαρη υπόθεση (p ή q , αντίστοιχα) και συμπέρασμα (q ή p , αντίστοιχα), ενώ στην ισοδυναμία δεν υπάρχει υπόθεση και συμπέρασμα!

Είναι προφανές ότι η ισοδυναμία είναι πιο «αυστηρή» από τη συνεπαγωγή, αφού περιλαμβάνει και την αντίστροφη συνεπαγωγή, δεδομένου ότι ισχύει:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \text{ και } p \Leftarrow q). \quad (3)$$

Όλα τα παραπάνω θεμελιώνονται και τεκμηριώνονται με βάση τη Μαθηματική Λογική και δεν επιδέχονται αμφισβήτησης. Όμως, στα σχολικά Μαθηματικά οι μαθητές δεν διδάσκονται Μαθηματική Λογική και ως εκ τούτου η κατασκευή των ασκήσεων πρέπει να γίνεται με τρόπο, ώστε οι προς απόδειξη συνεπαγωγές ή ισοδυναμίες να εμπλέκουν προτάσεις p, q οι οποίες να είναι και οι δύο αληθείς, διότι υπάρχει σοβαρός κίνδυνος οι μαθητές να μπερδευτούν, να χάσουν χρόνο και κατά συνέπεια να μην αξιολογηθούν σωστά! Για παράδειγμα, αν ζητηθεί από τους μαθητές σε κάποια γραπτή εξέταση, να λυθεί κάποια από τις ασκήσεις:

- Αν για τη συνάρτηση $g: \square \rightarrow \square$ ισχύει $2g(x+y) = g(x-y) + x^2 - y^2$ για κάθε $x, y \in \square$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή,

• Αν οι τιμές μιας μεταβλητής είναι 22, 18, $20 + \kappa$, 14, 16 ($\kappa \in \square$) και έχουν τυπική απόκλιση $s = 4$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$, είναι δεδομένο ότι κάποιοι μαθητές θα μπερδευτούν, με αποτέλεσμα να χάσουν χρόνο ή και να μη γράψουν τη σκέψη τους, θεωρώντας ότι κάτι σκέφτονται λάθος.

Για την πρώτη άσκηση θέτοντας $y = 0$, προκύπτει ότι $g(x) = x^2$, $x \in \square$, η οποία δεν είναι σταθερή! Σύμφωνα με τον θεματοδότη θέτουμε $x = y = 0$, οπότε $f(0) = 0$ και αν $x = y$, προκύπτει $f(x) = 0$, $x \in \square$.

Ας διαπραγματευτούμε αναλυτικά τη δεύτερη άσκηση. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $\bar{x} = 18 + \frac{\kappa}{5}$ και $s^2 = \frac{4\kappa^2 + 20\kappa + 200}{25}$. Θέτοντας

$s = 4$ προκύπτει η εξίσωση $\kappa^2 + 5\kappa - 50 = 0$, που έχει λύσεις $\kappa = 5$ ή $\kappa = -10$ και όχι $\kappa = 10$ που είναι το ζητούμενο! Ο σκεπτόμενος μαθητής είναι πιθανό να αρχίσει να αμφιβάλλει για τη λύση του, οπότε να αποφασίσει να μην τη γράψει και τελικά να τιμωρηθεί βαθμολογικά!

Αν το ψάξουμε βαθύτερα, με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz αποδεικνύεται ότι ισχύει $-\frac{80}{3} \leq \kappa \leq \frac{20}{3}$, που σημαίνει ότι $\kappa \neq 10$!

Η άσκηση αυτή είναι το Γ3 ερώτημα στο οποίο εξετάσθηκαν οι μαθητές της Γ' Λυκείου των ΕΠΑΛ το 2024. Είναι φανερό ότι η άσκηση είναι λάθος δοσμένη, αφού οι υποθέσεις είναι ψευδείς και πιθανότατα δημιούργησαν σοβαρό πρόβλημα σε οποιονδήποτε συνεπή υποψήφιο. Η ΕΜΕ για το θέμα εξέδωσε την ακόλουθη ανακοίνωση: «Στο θέμα Γ διαπιστώνουμε αστοχία στη διατύπωση. Ειδικότερα υπάρχει πρόβλημα συμβατότητας μεταξύ των τιμών των δεδομένων και των ζητούμενων. Επισημαίνουμε ότι οι δυνατές τιμές του άγνωστου κ μπορούν να προκύψουν ανεξάρτητα, τόσο από την τυπική απόκλιση, όσο και από τη μέση τιμή που υπολογίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή μεταβολής, και δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Προτείνεται να ληφθεί ως σωστή οποιαδήποτε από τις δύο προσεγγίσεις, για να μην αδικηθούν οι υποψήφιοι.»

Συμπερασματικά, από μαθηματικής οπτικής τέτοιες ασκήσεις δεν έχουν κανένα πρόβλημα (αφού η υπόθεση είναι ψευδής), αλλά οι μαθητές δεν ξέρουν τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής...

Χρήσεις συνεπαγωγής και ισοδυναμίας.

Στα σχολικά βιβλία δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη σωστή χρήση της ισοδυναμίας και της συνεπαγωγής. Η εισαγωγή των συμβόλων γίνεται στο

βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου (στην ενότητα Λεξιλόγιο της Λογικής), ενώ στις επόμενες τάξεις, η χρήση τους είναι αρκετά περιορισμένη. Συγκεκριμένα, στις λυμένες εφαρμογές των βιβλίων του μαθητή στο Λύκειο γίνεται κάποια χρήση της ισοδυναμίας, αλλά πενιχρή χρήση της συνεπαγωγής (συγκεκριμένα, στη μονοτονία συνάρτησης και στην επίλυση άρρητων εξισώσεων στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου). Παρόλα αυτά οι μαθητές χρησιμοποιούν εκτενώς τα σύμβολα αυτά, συχνά με λάθος τρόπο.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι έχει παρατηρηθεί η χρήση των συμβόλων αυτών στο Δημοτικό, αλλά και στο Γυμνάσιο, από μαθητές, δασκάλους και καθηγητές. Αυτό δημιουργεί σοβαρά γνωστικά εμπόδια, δεδομένου ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να καταλάβουν την ακριβή και σωστή χρήση των συμβόλων αυτών. Επίσης, άλλες ειδικότητες καθηγητών χρησιμοποιούν τα σύμβολα αυτά με μηχανικό τρόπο εμφυτεύοντας τις έννοιες αυτές στους μαθητές, οι οποίοι τα χρησιμοποιούν χωρίς να καταλαβαίνουν την ορθότητα της χρήσης τους.

Η συνεπαγωγή χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση που θα μπορούσε να υπάρχει κάποια από τις λέξεις: τότε, άρα, επομένως, συνεπώς, οπότε κ.τ.λ. Για παράδειγμα η έκφραση: «Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, όπου ο α είναι μικρότερος του β , τότε ο $\alpha\gamma^2$ είναι μικρότερος ή ίσος του $\beta\gamma^2$ » μπορεί να γραφεί ως $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma^2 \leq \beta\gamma^2$, ενώ είναι φανερό ότι δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha\gamma^2 \leq \beta\gamma^2 \Rightarrow \alpha < \beta$ και κατά συνέπεια η ισοδυναμία $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma^2 \leq \beta\gamma^2$.

Συνεπώς, για τη χρήση της ισοδυναμίας πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί. Οι πιο χαρακτηριστικές διαδικασίες που απαιτείται η ύπαρξη ισοδυναμιών είναι η επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων ή συστημάτων.

Για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 = x$, η σωστή διαδικασία γραφής είναι:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1, \quad (4)$$

ενώ είναι λάθος να γράψουμε:

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1, \quad (5)$$

γιατί έτσι δεν αποδεικνύεται ότι είναι λύσεις της εξίσωσης.

Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, ας μελετήσουμε την επίλυση της εξίσωσης:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x = 0, \quad (6)$$

στην οποία υπάρχει λάθος, δεδομένου ότι η $x = 0$ δεν είναι λύση της, ενώ θα ήταν σωστό να γράψουμε:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow x = 0, \quad (7)$$

αλλά δεν αποδεικνύει ότι η $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης! Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας $x = 0$ στην αρχική εξίσωση, βλέπουμε ότι το $x = 0$ δεν την επαληθεύει, άρα απορρίπτεται και ως εκ τούτου η εξίσωση είναι αδύνατη. Χρησιμοποιώντας ισοδυναμίες θα έπρεπε να γράψουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + x + 1} = x - 1 \\ \text{και} \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x + 1 = (x - 1)^2 \\ \text{και} \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \text{ απορρ.} \\ \text{και} \\ x \geq 1 \end{array} \right., \quad (8)$$

οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Στην ουσία η αντίστροφη συνεπαγωγή εξασφαλίζει την επαλήθευση της λύσης στην αρχική εξίσωση.

Ισοδυναμία απαιτείται και για την επίλυση ενός συστήματος. Για παράδειγμα είναι λάθος να γράψουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ x - y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ y = x - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array} \right., \quad (9)$$

αφού το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ το σωστό είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ x - y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ y = x - 1 \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \text{ απορρ.} \\ y = x - 1 \\ x \geq 1 \end{array} \right., \quad (10)$$

άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Επίσης κατά την επίλυση ανισώσεων απαιτείται η χρήση ισοδυναμιών. Ένας λανθασμένος τρόπος λύσης επίλυσης ανίσωσης είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2, \quad (11)$$

ενώ είναι ορθό να γράψουμε:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 2. \quad (12)$$

Ισοδυναμίες είναι απαραίτητες όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση με τη μέθοδο της ισοδυναμίας. Για παράδειγμα αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \square$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ είναι σωστό να γράψουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2, \quad (13)$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, ενώ είναι λάθος να γράψουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2, \quad (14)$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, αφού η συνεπαγωγή που χρησιμοποιήσαμε στη (14) δεν επιτρέπει να γυρίσουμε στην αρχική σχέση. Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο του «αρκεί», η οποία δεν αναφέρεται καθόλου στα σχολικά βιβλία. Συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε ότι για να ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, αρκεί να ισχύει η $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$, η οποία ισχύει, άρα και η αρχική.

Επίσης, η λανθασμένη χρήση της ισοδυναμίας μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς στρεβλά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι $\alpha, \beta \in \square$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ίσοι, όταν «ισοδύναμα» ισχύει:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2\alpha = 2\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta - \alpha \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2, \quad (15)$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική! Το λάθος βρίσκεται στο γεγονός ότι η τρίτη ισοδυναμία δεν ισχύει.

Τέλος, θεωρούμε απαραίτητο να αναφερθούμε και στη χρήση των ισοδυναμιών στους ορισμούς. Είναι γεγονός ότι οι ορισμοί πρέπει να διατυπώνονται χρησιμοποιώντας τις λιγότερες δυνατές πληροφορίες. Ως εκ τούτου, η χρήση ισοδυναμιών είναι απαραίτητη, εκτός και αν οι δοθείσες πληροφορίες επαρκούν για τη χρήση συνεπαγωγής (Κυριακόπουλος, 2020). Για παράδειγμα ας δούμε το σωστό ορισμό της άρτιας συνάρτησης, ο οποίος είναι:

«Εστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο σύνολο A .

Η f λέγεται άρτια στο A αν και μόνο αν ισχύουν οι:

για κάθε $x \in A$, το $-x \in A$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$ »,

αλλά και της γνησίως αύξουσας, ο οποίος είναι:

«Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο διάστημα Δ .
Αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$,
τότε η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ ».

Στον ορισμό της άρτιας συνάρτησης είναι απαραίτητη η ισοδυναμία (αν και μόνο αν), ενώ στον ορισμό της γνησίως αύξουσας αρκεί η συνεπαγωγή (τότε), διότι το αντίστροφο της πρότασης αποδεικνύεται εύκολα με άτοπο.

Οι έρευνες.

Η αφορμή για την εργασία αυτή ήταν η εργασία των Καρκάνη και Σαράφη (2023), οι οποίοι παρουσιάζοντας κάποιες λύσεις μαθητών στο θέμα Β2ii των πανελλαδικών του 2023, παρουσίασαν την εξής λύση:

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Rightarrow f(\pi) < f(e) \Rightarrow \pi > e, \text{ που ισχύει.}$$

Θυμίζουμε ότι οι μαθητές γνώριζαν ότι $f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$ και είχαν βρει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Από μαθηματικής οπτικής προφανώς και η λύση αυτή είναι λανθασμένη, αλλά δείχνει ελλιπή κατανόηση των συμβόλων της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας από τους μαθητές.

Για να διερευνήσουμε το επίπεδο στο οποίο μαθητές της Γ' Λυκείου του εξετάζονται στις πανελλαδικές στα Μαθηματικά, αλλά και πρωτοετείς φοιτητές Α.Ε.Ι. έχουν κατανοήσει τη συνεπαγωγή και την ισοδυναμία, διεξήγαμε έρευνα χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγιο 10 ερωτήσεων, του οποίου οι ερωτήσεις δίνονται ακολούθως.

1. $x^2 = x \Rightarrow x = 1$.
2. $x = 0 \Rightarrow x^2 = x$.
3. $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$.
4. $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.
5. $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$.
6. $\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1}^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

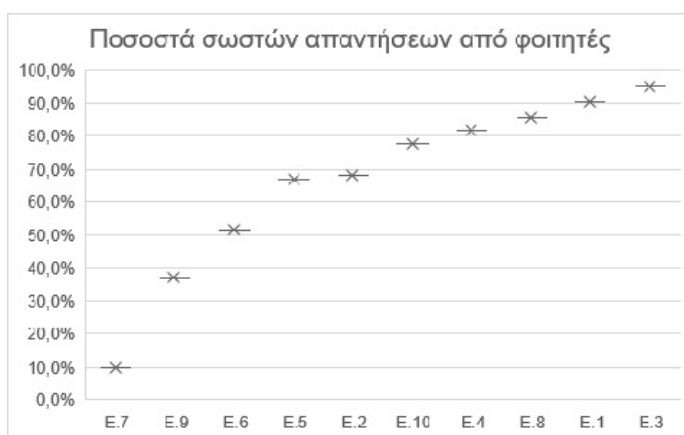
7. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+x-y=2+0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(1,1)$.
8. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+x-y=2+0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.
9. $\frac{x+1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$.
10. $\frac{x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0$.

Η ταυτότητα της έρευνας δίνεται στον πίνακα 3, ενώ στο σχήμα 1 φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων από τους φοιτητές, ενώ στο σχήμα 2 τα αντίστοιχα ποσοστά των μαθητών.

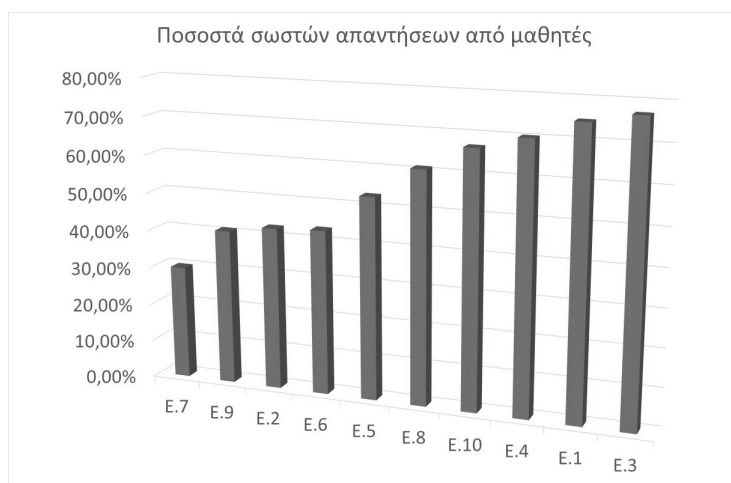
Πρωτοετείς φοιτητές Α.Ε.Ι.	103 φοιτητές
Μαθητές Γ' Λυκείου	822 μαθητές

Πίνακας 3: Ταυτότητα της έρευνας.

Από την έρευνα προκύπτει ότι οι ερωτήσεις 1 και 3 απαντήθηκαν σωστά από τους περισσότερους μαθητές ή φοιτητές, ενώ οι ερωτήσεις 7 και 9 συγκέντρωσαν τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις. Άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι όλες οι υπόλοιπες ερωτήσεις παρουσιάζουν διαφορές στην κατάταξη ανάμεσα σε φοιτητές και μαθητές.



Σχήμα 1: Η κατανόηση των εννοιών από τους φοιτητές.



Σχήμα 2: Η κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές της Γ' Λυκείου.

Συμπεράσματα.

Η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία είναι δύο λογικοί τελεστές, οι οποίοι στα σχολικά Μαθηματικά δεν τυγχάνουν της βαρύτητας που τους αναλογεί. Συχνά, δάσκαλοι και καθηγητές Μαθηματικών εισάγουν τα σύμβολα αυτά νωρίτερα από όταν πρέπει, σε ηλικίες που οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν, ενώ καθηγητές άλλων ειδικοτήτων τα χρησιμοποιούν για ευκολία. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αντίστοιχα σύμβολα με τρόπο μηχανικό και συχνά λανθασμένο. Αυτό κατά τη γνώμη μας, δεν μπορεί να είναι καθοριστικά αρνητικός βαθμολογικός παράγοντας για τους μαθητές που τα χρησιμοποιούν με λάθος τρόπο, από τη στιγμή που στα σχολικά βιβλία ή στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών δεν χρησιμοποιούνται επαρκώς και δεν παρέχουν ικανοποιητικές διευκρινήσεις.

Βιβλιογραφία (ενδεικτική)

- Stewart I. & Tall D. (2020). *Τα θεμέλια των Μαθηματικών*. Odysseus Publishing.
- Αγγελής Σ. Α. & Μπλήρης Λ. Γ (2003). *Διακριτά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Καρκάνης Β. & Σαράφης Ι. (2023). *Πανελλαδικές 2023: Παρουσίαση χαρακτηριστικών λαθών των μαθητών και δυσκολίες στη βαθμολόγηση των γραπτών τους*. Πρακτικά 34ου Συνεδρίου της EME, σελ. 354 – 364.
- Κυριακόπουλος Κ. Α. (2020). *Χρήσιμες επισημάνσεις στα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Ζανταρίδης – Τηλέγραφος.