

ΑΛΓΕΒΡΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ-ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2024/25

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 3.1-3.5 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1) Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

A2) Να διατυπώσετε τον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης.

A3) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Να **αιτιολογήσετε** τις απαντήσεις σας.

i) Ισχύει: $\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu 0)$

ii) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$, εφόσον τα αναφερόμενα σύμβολα έχουν νόημα πραγματικού αριθμού

iii) Ισχύει: $9\pi\text{rad} = 1620^\circ$

iv) Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{7}}{3}$

v) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\varphi(2x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu(2x) \neq 0\}$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$

Μονάδες: 5+5+3·5=25

ΘΕΜΑ Β

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy , πάνω στην τελική πλευρά $O\hat{t} = \omega$, παίρνουμε το σημείο $M(-4,3)$ και συμβολίζουμε $x'\hat{O}t = \varphi$.

B1) Αφού εντοπίσετε τη θέση του σημείου $M(-4,3)$ στο επίπεδο, να σχεδιάσετε την ημιευθεία $O\hat{t}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ .

B2) Συγκρίνοντας τις τιμές $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$ και λαμβάνοντας υπόψιν τη μονοτονία της συνάρτησης $\varepsilon\varphi$ ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο επιθυμείτε, να αποδείξετε ότι $135^\circ < \omega < 180^\circ$.

B3) Θεωρούμε τη γωνία $\theta = \omega + 45^\circ$. Αφού εξηγήσετε γιατί η τελική πλευρά της γωνίας θ βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\eta\mu\theta} + \frac{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ είναι σταθερή και ίση με -2 .

Μονάδες: 10+6+9=25

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Έστω α μία γωνία και η παράσταση $A = \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^4\alpha + \eta\mu^2\alpha$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $A = 2\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Γ2) Έστω β μία γωνία με $\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$ και η παράσταση $B = \frac{\varepsilon\varphi^2\beta + \varepsilon\varphi^4\beta}{\sigma\varphi^2\beta + \sigma\varphi^4\beta}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $B = \varepsilon\varphi^6\beta$

Γ3) Για $\alpha = -45^\circ$ και $\beta = 240^\circ$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B και στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $8A\eta\mu^2x + 16\sigma\upsilon\nu x = \frac{297}{B}$, με $x \in \mathbb{R}$

ii) $\eta\mu^2x = \frac{2AB\sqrt{3}}{81}\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$, με $x \in [-4\pi, -2\pi]$

Μονάδες: 6+6+(6+7)=25

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $\hat{xO}t = \varphi$ μία γωνία σε ένα καρτεσιανό επίπεδο Oxy της οποίας η ευθεία της τελικής πλευράς Ot τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο σημείο του με τεταγμένη -1 . Έστω επίσης η συνάρτηση

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \varepsilon\varphi\varphi + \rho \cdot \eta\mu\left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\varphi\right)x\right)$, όπου $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\bullet \rho = \frac{3\eta\mu\frac{\pi}{7} - \eta\mu\frac{8\pi}{7} - \sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{14} + \sigma\upsilon\nu\frac{47\pi}{14}}{\eta\mu\frac{\pi}{7} \cdot \varepsilon\varphi\frac{6\pi}{7} \cdot \sigma\varphi\left(-\frac{22\pi}{7}\right)}$$

• $\sigma\varphi\omega = -2\sqrt{2}$ με $\omega \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Δ1) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -1 + 4\eta\mu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και την περίοδό της. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Δ3) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.

Δ4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ και στη συνέχεια να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ και $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

Δ5) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = -1 + 4\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετά από μία οριζόντια μετατόπιση κατά $\frac{\pi}{8}$ μονάδες προς τα δεξιά.
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες: 7+3+3+4+(4+4)=25