

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

42^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Δίνεται ότι οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι και ότι το σύστημα

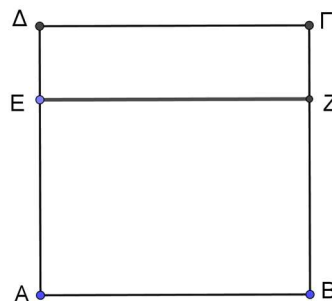
$$mx + 3y = m,$$

$$2x + ny = n,$$

με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (m, n) .

Πρόβλημα 2

Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος υποδιαιρείται με το τμήμα EZ σε δύο ορθογώνια $ABZE$ και $EZ\Gamma\Delta$. Δίνεται ότι $AE > ED$. Τα μήκη όλων των πλευρών των δύο ορθογωνίων είναι θετικοί ακέραιοι. Αν η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων είναι 24, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β που ικανοποιούν την ισότητα $\alpha + \beta = 1$, ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{5}{4}.$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E στη διαγώνιο του $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$.

Αν το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και N είναι το μέσο του τμήματος AE , να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία