

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

42^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δίνεται ότι η εξίσωση

$$x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4 = 0, \text{ όπου } m, n \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

έχει δύο απλές πραγματικές λύσεις με άθροισμα -5. Να προσδιορίσετε τις τιμές των m, n και όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Πρόβλημα 2

Έστω $AB\Gamma$ οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z στην ευθεία $A\Delta$ τέτοια, ώστε $EB \perp AB$ και $Z\Gamma \perp A\Gamma$, και τα σημεία H και Θ στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $EH \parallel A\Gamma$ και $Z\Theta \parallel AB$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BHE τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία AB στο σημείο M ($M \neq B$), και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Gamma\Theta Z$ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N ($N \neq \Gamma$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MH , $N\Theta$ και $A\Delta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x + 2y) + f(2x - y) = 5f(x) + 5f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο y , ο αριθμός $y^2 + 108$ δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.

*Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία*