



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
**ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ**  
**ΑΘΗΝΑ, 11 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2009**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Αν ο αριθμός  $a$  είναι άρτιος θετικός ακέραιος και ο αριθμός  $A = a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , είναι τέλειο τετράγωνο, να αποδείξετε ότι ο  $a$  είναι πολλαπλάσιο του 8.

**Λύση**

Επειδή ο  $a$  είναι άρτιος θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο αριθμός  $A$  είναι περιττός. Επομένως ο  $A$  θα είναι τέλειο τετράγωνο περιττού ακέραιου, δηλαδή θα είναι

$$A = (2\kappa + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 4\kappa(\kappa + 1) + 1,$$

όπου ο  $\kappa$  είναι θετικός ακέραιος. Όμως ένας από τους  $\kappa$  ή  $\kappa + 1$  είναι άρτιος, οπότε θα είναι

$$A = 4\kappa(\kappa + 1) + 1 = 8\rho + 1, \text{ όπου } \rho \text{ θετικός ακέραιος}$$

$$\Rightarrow A - 1 = a^n + a^{n-1} + \dots + a = 8\rho$$

$$\Rightarrow a(a^{n-1} + \dots + a + 1) = 8\rho$$

$$\Rightarrow 8 \mid a(a^{n-1} + \dots + a + 1)$$

$$\Rightarrow 8 \mid a, \text{ αφού } (8, a^{n-1} + \dots + a + 1) = 1.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  με βαρύκεντρο  $G$  και περίκεντρο  $O$ . Οι μεσοκάθετες των  $GA$ ,  $GB$  και  $GC$  τέμνονται στα σημεία  $A_1, B_1, C_1$ . Αποδείξτε ότι το σημείο  $O$  είναι βαρύκεντρο του τριγώνου  $A_1B_1C_1$ .

**Λύση**

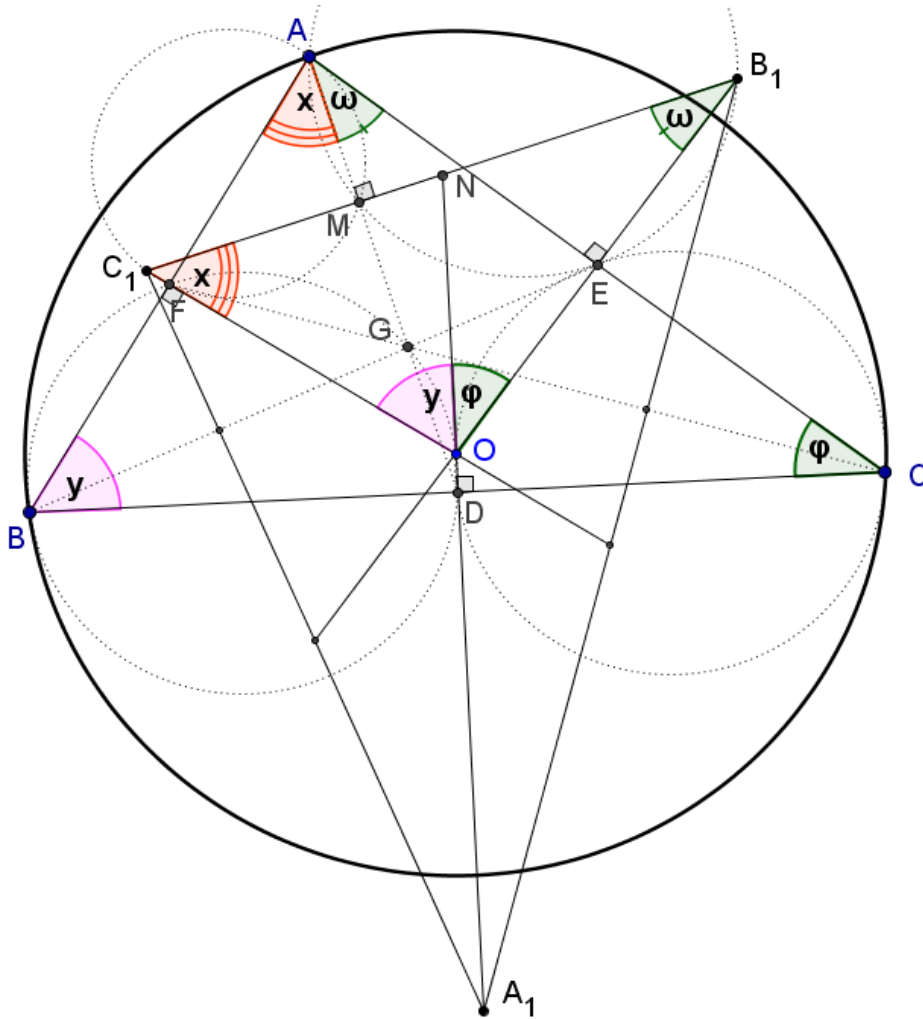
Έστω  $D, E, F$  τα μέσα των πλευρών  $BC, AC, AB$  του τριγώνου  $ABC$  αντίστοιχα.

Έστω ακόμη  $B_1C_1$  η μεσοκάθετη του τμήματος  $GA$ ,  $A_1C_1$  η μεσοκάθετη του τμήματος  $GB$  και  $A_1B_1$  η μεσοκάθετη του τμήματος  $GC$ . Τότε τα σημεία  $A_1, B_1$  και  $C_1$  είναι τα περίκεντρα των τριγώνων  $GBC$ ,  $GAC$  και  $GAB$  αντίστοιχα (διότι είναι τα σημεία τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών τους).

Άρα οι  $A_1D$ ,  $B_1E$  και  $C_1F$  είναι μεσοκάθετες των  $BC$ ,  $AC$  και  $AB$  αντίστοιχα, οπότε θα διέρχονται από το περίκεντρο  $O$  του τριγώνου  $ABC$ .

Θα αποδείξουμε ότι οι  $A_1D$ ,  $B_1E$  και  $C_1F$  είναι διάμεσες του τριγώνου  $A_1B_1C_1$ .

Έστω ότι η προέκταση της  $A_1D$ , τέμνει την  $B_1C_1$  στο σημείο  $N$ . Θα αποδείξουμε ότι το σημείο  $N$  είναι το μέσο του τμήματος  $B_1C_1$ .



Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $AMEB_1$  ( $\hat{M} = \hat{E} = 90^\circ$ ), οπότε  $M\hat{A}E = M\hat{B}_1E = \hat{\omega}$ .  
 Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $DOEC$  ( $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$ ), οπότε  $E\hat{C}D = E\hat{O}N = \hat{\phi}$ . Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών προκύπτει ότι τα τρίγωνα  $ADC$  και  $B_1NO$  είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{NB_1}{NO} = \frac{AD}{CD} \quad (1)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $AMFC_1$  ( $\hat{M} = \hat{F} = 90^\circ$ ), οπότε  $M\hat{A}F = M\hat{C}_1F = \hat{x}$ .

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο  $DOFB$  ( $\hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$ ), οπότε  $F\hat{B}D = F\hat{O}N = \hat{y}$ .

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών προκύπτει ότι τα τρίγωνα  $ADB$  και  $C_1NO$  είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{NC_1}{NO} = \frac{AD}{BD} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε  $NB_1 = NC_1$ .

Όμοια αποδεικνύουμε ότι και οι  $B_1E$ ,  $C_1F$  είναι διάμεσες του τριγώνου  $A_1B_1C_1$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Βρείτε τις τριάδες  $(x,y,z)$  πραγματικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 3 και ικανοποιούν την ισότητα:

$$\frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6} = 36.$$

#### Λύση

Επειδή οι αριθμοί  $x, y, z$  είναι μεγαλύτεροι του 3, έπεται ότι οι αριθμοί  $y+z-2, z+x-4, x+y-6$  είναι θετικοί. Έτσι από την ανισότητα Cauchy-Schwarz λαμβάνουμε:

$$\left( \frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6} \right) ((y+z-2) + (z+x-4) + (x+y-6)) \geq (x+y+z+12)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z-2} + \frac{(y+4)^2}{z+x-4} + \frac{(z+6)^2}{x+y-6} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z-6)}.$$

Από την υπόθεση του προβλήματος έπεται ότι

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z-6)} \leq 72 \quad (1)$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{x+2}{y+z-2} = \frac{y+4}{z+x-4} = \frac{z+6}{x+y-6} = \lambda$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(y+z) - x = 2(\lambda+1) \\ \lambda(x+z) - y = 4(\lambda+1) \\ \lambda(x+y) - z = 6(\lambda+1) \end{cases} \quad (2)$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι:

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z-6)} = \frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z+12)-18} = \frac{\omega^2}{\omega-18},$$

αν θέσουμε  $\omega = x+y+z+12$ . Επειδή ισχύει

$$\frac{\omega^2}{\omega-18} \geq 4 \cdot 18 = 72 \Leftrightarrow \omega^2 - 4 \cdot 18\omega + 4 \cdot 18^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\omega - 2 \cdot 18)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\omega - 36)^2 \geq 0,$$

έπεται ότι

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z-6)} \geq 72. \quad (3)$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\omega = x+y+z+12 = 36 \Leftrightarrow x+y+z = 24 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έπεται ότι αληθεύει η ισότητα:

$$\frac{(x+y+z+12)^2}{(x+y+z-6)} = 72,$$

οπότε αληθεύουν οι σχέσεις (2) και (4), από τις οποίες προκύπτει

$$\begin{cases} (2\lambda-1)(x+y+z) = 12(\lambda+1) \\ x+y+z = 24 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1.$$

Για  $\lambda = 1$ , από τις σχέσεις (2) λαμβάνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y + z - x = 4 \\ x + z - y = 8 \\ x + y - z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (10, 8, 6).$$

Άρα μοναδική λύση του προβλήματος είναι η τριάδα  $(x, y, z) = (10, 8, 6)$ , αφού ικανοποιεί και την εξίσωση  $x + y + z = 24$ .

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4


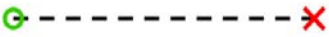

Δίνονται στο επίπεδο  $\nu$  διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά, τα οποία χρωματίζουμε κόκκινα, πράσινα και μαύρα. Στη συνέχεια θεωρούμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα σημεία αυτά και αντιστοιχούμε στο καθένα μία “αλγεβρική τιμή” με τη βοήθεια των παρακάτω τριών συνθηκών:

- 1) Αν ένα τουλάχιστον από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος είναι μαύρο τότε το ευθύγραμμο τμήμα έχει “αλγεβρική τιμή” 0 (μηδέν).
- 2) Αν τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος έχουν το ίδιο χρώμα κόκκινο ή πράσινο, τότε το ευθύγραμμο τμήμα έχει “αλγεβρική τιμή” 1 (ένα).
- 3) Αν τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος έχουν διαφορετικό χρώμα τότε το ευθύγραμμο τμήμα έχει “αλγεβρική τιμή” -1 (μείον ένα).

Να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμα των “αλγεβρικών τιμών” όλων των ευθυγράμμων τμημάτων.

#### Λύση

Από τις τρεις συνθήκες προσδιορισμού των “αλγεβρικών τιμών” των ευθυγράμμων τμημάτων προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Τμήματα με 'αλγεβρική τιμή' 1	Τμήματα με 'αλγεβρική τιμή' 0	Τμήματα με 'αλγεβρική τιμή' -1
		
		
		<b>× Κόκκινο</b>
		<b>○ Πράσινο</b>
		<b>● Μαύρο</b>

Έστω ότι έχουμε  $\kappa$  κόκκινα,  $\pi$  πράσινα και  $\mu$  μαύρα σημεία. Τότε προφανώς  $\kappa + \pi + \mu = \nu$ .

Τα  $\kappa$  το πλήθος κόκκινα σημεία ορίζουν  $\binom{\kappa}{2}$  το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα που έχουν και τα δύο άκρα τους κόκκινα και κατά συνέπεια “αλγεβρικές τιμές” 1.

Τα  $\pi$  το πλήθος πράσινα σημεία ορίζουν  $\binom{\pi}{2}$  το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα που

έχουν και τα δύο άκρα τους πράσινα και κατά συνέπεια “αλγεβρικές τιμές”1.

Το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που έχουν τα δύο άκρα τους με διαφορετικό χρώμα (εκτός βέβαια από μαύρο) και κατά συνέπεια “αλγεβρικές τιμές”-1, είναι  $\kappa \cdot \pi$  το πλήθος.

Όλα τα υπόλοιπα τμήματα έχουν “αλγεβρικές τιμές”0, διότι ένα τουλάχιστον άκρο τους έχει μαύρο χρώμα.

Το άθροισμα τώρα των “αλγεβρικών τιμών” όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που

δημιουργούνται είναι  $\Sigma = \binom{\kappa}{2} + \binom{\pi}{2} - \kappa\pi = \frac{\kappa!}{(\kappa-2)!2!} + \frac{\pi!}{(\pi-2)!2!} - \kappa\pi =$

$$= \frac{\kappa(\kappa-1)}{2} + \frac{\pi(\pi-1)}{2} - \frac{2\kappa\pi}{2} = \frac{\kappa^2 - \kappa}{2} + \frac{\pi^2 - \pi}{2} - \frac{2\kappa\pi}{2} =$$

$$= \frac{(\kappa - \pi)^2}{2} - \frac{\kappa + \pi}{2} = \text{(επειδή } \kappa + \pi + \mu = \nu \text{)}$$

$$= \frac{(\kappa - \pi)^2}{2} - \frac{\nu - \mu}{2} = \frac{(\kappa - \pi)^2}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2}.$$

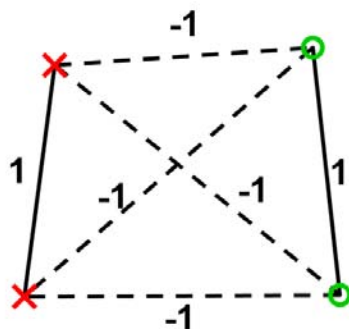
Από τη τελευταία έκφραση του  $\Sigma$  συμπεραίνουμε ότι:

$$\Sigma \geq -\frac{\nu}{2} \quad (I).$$

Αν ο ακέραιος αριθμός  $\nu$  είναι άρτιος ( $\nu = 2\rho$ ), τότε η σχέση (I) γίνεται:  $\boxed{\Sigma \geq -\rho}$ .

Η ισότητα στη τελευταία σχέση ισχύει αν και μόνο αν  $\kappa = \pi = \frac{\nu}{2} = \rho$  και  $\mu = 0$ .

Για παράδειγμα θεωρώντας  $\nu = 4$  προκύπτει σχηματικά το παρακάτω αποτέλεσμα.



**Συνολική ελάχιστη αξία:**

$$\Sigma = -\frac{\nu}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Αν ο ακέραιος αριθμός  $\nu$  είναι περιττός ( $\nu = 2\rho + 1$ ), τότε η σχέση (I) γίνεται:

προκύπτει  $\Sigma \geq -\frac{2\rho+1}{2} = -\rho - \frac{1}{2}$ . Επειδή όμως το άθροισμα  $\Sigma$  είναι ακέραιος αριθμός

θα ισχύει  $\Sigma \geq -\rho = \frac{-\nu+1}{2}$ .

Θα εξετάσουμε τώρα πότε ισχύει η ισότητα στην τελευταία σχέση.

Παρατηρούμε αρχικά ότι η περίπτωση “ $\nu$  περιττός ( $\nu = 2\rho + 1$ )” προκύπτει από την περίπτωση “ $\nu$  άρτιος ( $\nu = 2\rho$ )” αν προσθέσουμε ένα επιπλέον σημείο.

Το σημείο που προσθέτουμε στη περίπτωση “ $\nu$  άρτιος ( $\nu = 2\rho$ )” μπορεί να είναι μαύρο, κόκκινο ή πράσινο, οπότε προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

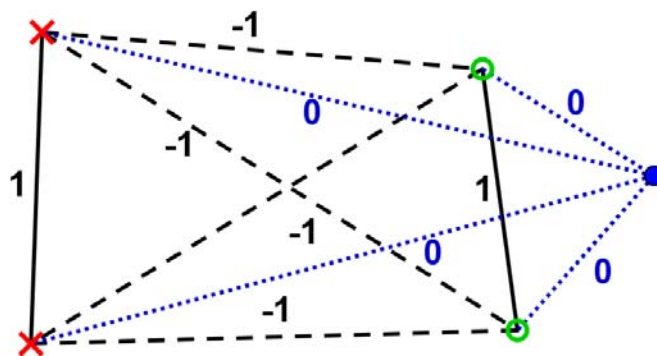
### Περίπτωση 1<sup>η</sup>

Έστω ότι το σημείο που προστίθεται είναι μαύρο. Τότε όλα τα επί πλέον (καινούργια) ευθύγραμμα τμήματα που θα δημιουργηθούν έχουν “αλγεβρικές τιμές” μηδέν διότι το ένα άκρο τους είναι μαύρο.

Η ισότητα στη περίπτωση αυτή ισχύει όταν:

$$\kappa = \pi = \frac{\nu - 1}{2} \text{ και } \mu = 1.$$

Το άθροισμα τώρα των “αλγεβρικών τιμών” όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται είναι  $\Sigma = -\rho = \frac{-\nu + 1}{2}$ .



Συνολική ελάχιστη αξία:

$$\Sigma = \frac{-\nu + 1}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

### Περίπτωση 2<sup>η</sup>

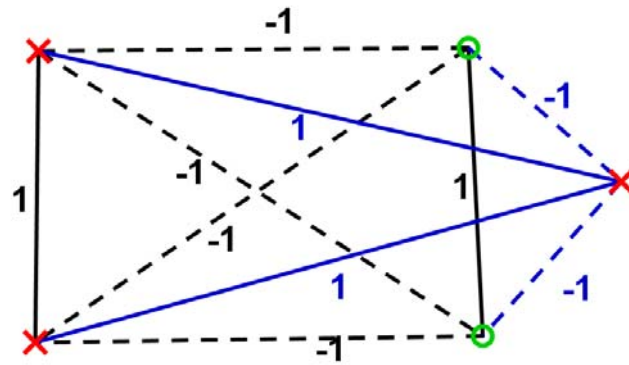
Έστω ότι το σημείο που προστίθεται είναι κόκκινο. Το πλήθος των κόκκινων και πράσινων σημείων που υπάρχουν είναι:  $\kappa = \pi = \frac{\nu - 1}{2}$ . Με τη πρόσθεση λοιπόν ενός επί

πλέον κόκκινου σημείου θα δημιουργηθούν ίσα το πλήθος  $\frac{\nu - 1}{2}$  ευθύγραμμα τμήματα που θα έχουν “αλγεβρικές τιμές”, ένα και μείον ένα.

Η ισότητα στη περίπτωση αυτή ισχύει όταν:

$$\kappa = \frac{\nu + 1}{2}, \pi = \frac{\nu - 1}{2} \text{ και } \mu = 0.$$

Το άθροισμα τώρα των “αλγεβρικών τιμών” όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται είναι  $\Sigma = -\rho = \frac{-\nu + 1}{2}$ . (Στην ουσία το άθροισμα δεν αυξάνει διότι το άθροισμα των επί πλέον δημιουργούμενων “αλγεβρικών τιμών” είναι μηδέν).



Συνολική ελάχιστη αξία:

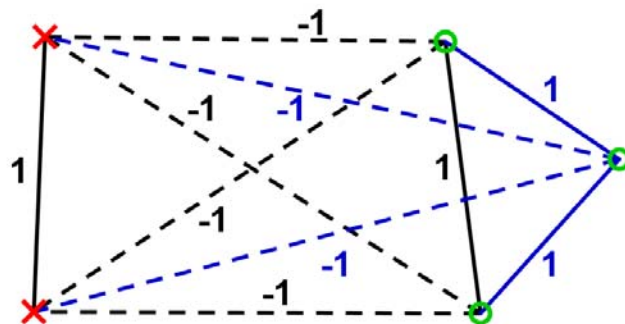
$$\Sigma = \frac{-v+1}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2$$

### Περίπτωση 3<sup>η</sup>

Με ανάλογο τρόπο σκεπτόμενοι και στη περίπτωση που προσθέτουμε ένα επί πλέον πράσινο σημείο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Η ισότητα ισχύει όταν:  $\kappa = \frac{v-1}{2}$ ,  $\pi = \frac{v+1}{2}$  και  $\mu = 0$

Το άθροισμα των “αλγεβρικών τιμών” όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται είναι  $\Sigma = -\rho = \frac{-v+1}{2}$ . (Στην ουσία το άθροισμα δεν αυξάνει διότι το άθροισμα των επί πλέον δημιουργούμενων “αλγεβρικών τιμών” είναι μηδέν).



Συνολική ελάχιστη αξία:

$$\Sigma = \frac{-v+1}{2} = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του

$\Sigma$  θα είναι  $-\left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$ .