ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΙΚΡΩΝ
ΑΘΗΝΑ, 27 ΜΑΡΤΙΟΥ 2010

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Εννέα θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους 11, 12 13, 14, 15, 16, 17, 18 και 19 αντίστοιχα. Να βρεθεί το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αθροίσματος των τετραγώνων τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\frac{x-2y}{y}+\frac{2y-4}{x}+\frac{4}{xy}=0, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC με $AB<AC$ και τυχούσα ευθεία (ε) που περνά από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του $c(O,R)$. Η ευθεία (ε), τέμνει τις πλευρές BC, AC, AB στα σημεία A_1, B_1, C_1 (το σημείο C_1 βρίσκεται στη προέκταση της AB προς το B). Η κάθετη από το A προς την ευθεία (ε) και η AA_1 τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία M και A_2 αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:

(α) τα σημεία O, A_1, A_2, M βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο (c_1) (δηλαδή τα σημεία είναι ομοκυκλικά).

(β) αν (c_2) είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου OBC_1 και (c_3) είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου OCB_1, αποδείξτε ότι οι κύκλοι $(c_1),(c_2),(c_3)$ έχουν κοινή χορδή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Χρωματίζουμε κάθε έναν από τους αριθμούς 1,…,8 με άσπρο ή μαύρο σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

(α) Ο αριθμός 4 χρωματίζεται με άσπρο και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους αριθμούς χρωματίζεται με μαύρο.

(β) Αν δύο αριθμοί *α, β* είναι χρωματισμένοι με διαφορετικό χρώμα και $\alpha+\beta\le 8$, τότε ο αριθμός α+β χρωματίζεται με μαύρο.

(γ) Αν δύο αριθμοί *α, β* είναι χρωματισμένοι με διαφορετικό χρώμα και $\alpha\cdot\beta\le 8$, τότε ο αριθμός $\alpha\cdot\beta$ χρωματίζεται με άσπρο.

Αν με τους παραπάνω κανόνες χρωματίζονται όλοι οι αριθμοί, να βρείτε το χρώμα κάθε αριθμού.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210–3616532 – 3617784 - Fax: 210 – 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ
ΑΘΗΝΑ, 27 ΜΑΡΤΙΟΥ 2010

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w που ικανοποιούν το σύστημα

$$x+y+z+w=4$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=5-\frac{1}{xyzw}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στον πίνακα υπάρχουν Κ κύκλοι στη σειρά που ο καθένας, από αριστερά προς τα δεξιά, αντιστοιχεί σε έναν από τους αριθμούς 1,2,3,...,Κ.

○ ○ ○ ○....○

Αλλαγή κατάστασης ενός κύκλου είναι το να γράφουμε ή να σβήνουμε τον αριθμό που του αντιστοιχεί. Στην αρχή δεν υπάρχει κανένας αριθμός γραμμένος μέσα στον κύκλο του.

Για κάθε *θετικό διαιρέτη* d του K, $1 \le d \le \mathrm{K}$, αλλάζουμε την κατάσταση των κύκλων που αντιστοιχούν σε αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του d, κάνοντας για κάθε διαιρέτη d, συνολικά Κ αλλαγές καταστάσεων.

Να προσδιορίσετε την τιμή του Κ, για την οποία, όταν η διαδικασία αυτή εφαρμοστεί μία φορά για όλους τους θετικούς διαιρέτες του Κ, τότε όλοι οι αριθμοί 1,2,...,Κ είναι γραμμένοι στους αντίστοιχους κύκλους τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ το περίκεντρό του O και η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του. Έστω O_1 το συμμετρικό του O ως προς την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$, O_2 το συμμετρικό του O ως προς την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ και O_3 το συμμετρικό του O ως προς την πλευρά AB.

(α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1(\mathrm{O}_1, R)$, $C_2(\mathrm{O}_2, R)$ και $C_3(\mathrm{O}_3, R)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο (έστω T).

(β) Από το σημείο T θεωρούμε τυχούσα ευθεία η οποία τέμνει το κύκλο C_1 στο Λ, το κύκλο C_2 στο M και το κύκλο C_3 στο K. Από τα $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}$ θεωρούμε κάθετες προς τις πλευρές $\mathrm{AB}, \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αυτές οι κάθετες περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ οι οποίες ικανοποιούν την ισότητα

$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)=\frac{1}{y}\cdot f\left(f(x)\right),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ και είναι γνησίως μονότονες στο $(0,+\infty)$