

Ορίστε μία λύση για το Θέμα 4 της Β' Λυκείου:

α)

Αρκεί ναδειχτεί ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι θετική.

Παρατηρούμε ότι $\alpha, \beta > 0$ και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε AM-GM.

Επίσης, καθώς α, β θετικοί ακέραιοι, ισχύει: $\alpha\beta \geq 1$

Είναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 = (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^5 - 16\alpha\beta] + 4 \xrightarrow{\text{AM-GM, και αφού } \alpha + \beta > 0} \\ \Delta &\geq (\alpha + \beta) \left[(2\sqrt{\alpha\beta})^5 - 16\alpha\beta \right] + 4 = (\alpha + \beta) \left[32\alpha\beta * (\alpha\beta)^{\frac{3}{2}} - 16\alpha\beta \right] + 4 \\ &= 16\alpha\beta(\alpha + \beta) \left(2 * (\alpha\beta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + 4\end{aligned}$$

Το τελευταίο είναι μεγαλύτερο του μηδενός, καθώς:

- $16\alpha\beta > 0$
- $\alpha + \beta > 0$
- $2 * (\alpha\beta)^{\frac{3}{2}} \geq 2 * 1 > 1 \Rightarrow 2 * (\alpha\beta)^{\frac{3}{2}} - 1 > 0$
- $4 > 0$

Όντως λοιπόν $\Delta > 0$.

β) Καθώς η δευτεροβάθμια έχει ακέραιους συντελεστές και ρητές ρίζες πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Παρατηρούμε ότι:

$$\Delta = (\alpha + \beta)^6 - 16\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4 \in \mathbb{Z}, \text{ καθώς } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

Άρα η διακρίνουσα θα είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, έστω του r . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι είναι μη αρνητικός. Δεν μπορεί να είναι μηδενικός, από το (i).

Θέτουμε για ευκολία $s = \alpha + \beta$ και $p = \alpha * \beta$, παρατηρώντας ότι είναι θετικοί ακέραιοι.

Παρατηρούμε ακόμα ότι λόγω του ότι $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ είναι $s \geq 2$ και $p \geq 1$

Τότε:

$$\begin{aligned}r^2 &= \Delta = s^6 - 16sp + 4 = (s^3)^2 - 2 * s^3 * 2 + 2^2 + 4s^3 - 16sp \\ &= (s^3 - 2)^2 + 16s\left(\frac{s^2}{4} - p\right)_{(*)}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε από AM-GM: $\frac{s}{2} \geq \sqrt{p} \xLeftrightarrow{2, \text{ και τα 2 μέλη θετικά}} \frac{s^2}{4} \geq p \Leftrightarrow \frac{s^2}{4} - p \geq 0$, με ισότητα για $\alpha = \beta$.

$$\text{Συνεπώς: } r^2 = (s^3 - 2)^2 + 16s\left(\frac{s^2}{4} - p\right) \geq (s^3 - 2)^2 \quad (1)$$

Βλέπουμε ακόμα ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$\rho_1 = \frac{s^3 + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ και } \rho_2 = \frac{s^3 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Από Vieta και καθώς $s \geq 2$ και $p \geq 1$:

$$\rho_1 * \rho_2 = 4sp - 1 \geq 4 * 2 * 1 - 1 > 0$$

Είναι:

$$\rho_1 * \rho_2 = \frac{s^3 + \sqrt{\Delta}}{2} * \frac{s^3 - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{s^6 - \Delta}{4}$$

Καταλήγουμε λοιπόν:

$$\frac{s^6 - \Delta}{4} > 0 \Leftrightarrow \Delta < s^6 = (s^3)^2$$

, δηλαδή:

$$r^2 < (s^3)^2_{(2)}$$

Οι (1) και (2) δίνουν:

$$(s^3 - 2)^2 \leq r^2 < (s^3)^2 \stackrel{r \in \mathbb{Z}_+}{\Leftrightarrow} s^3 - 2 \leq r < s^3 \stackrel{r \in \mathbb{Z}_+}{\Leftrightarrow} r = s^3 - 2 \text{ ή } r = s^3 - 1$$

Για $r = s^3 - 2$ έχουμε ισότητα στην (1), άρα $\alpha = \beta$.

Για $r = r = s^3 - 1$ είναι:

$$\Delta = (s^3 - 1)^2 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (s^3 - 2)^2 + 16s \left(\frac{s^2}{4} - p \right) = (s^3 - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(s^3 - 1)^2 - (s^3 - 2)^2 = 16s \left(\frac{s^2}{4} - p \right) \Leftrightarrow$$

$$(s^3 - 1 + s^3 - 2)(s^3 - 1 - s^3 + 2) = 16s \left(\frac{s^2}{4} - p \right) \Leftrightarrow$$

$$2s^3 - 3 = 4s^3 - 16sp \Leftrightarrow$$

$$16sp = 2s^3 + 3$$

Παρατηρούμε ότι και τα 2 μέλη είναι ακέραιοι ωστόσο το αριστερό διαιρείται και το 2 και το δεξί όχι. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι πρέπει $\alpha = \beta$.