

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα Γεωμετρίας

Ράπανος Νικόλαος

6 Ιουνίου 2007

Πρόκειται για μία άσκηση που κατασκεύασα πρόσφατα σε συνεργασία με τον Στέφανο Αρετάκη. Απαιτεί γνώσεις αλλά και παρατηρητικότητα. Στην ουσία αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος μπορεί να αντιμετωπισθεί εύκολα με Αναλυτική Γεωμετρία ή με Μετρικές Σχέσεις, αλλά εδώ θα παρουσιάσουμε δύο διαφορετικούς τρόπους, που διακρίνονται για την πρωτοτυπία και την κομψότητά τους. Ο πρώτος τρόπος ανήκει στον Έλληνα Γεωμέτη Σωτήρη Λουρίδα και ο δεύτερος, στον Μολδαβό *Jurie Boreico* (τρεις φορές Χρυσό Ολυμπιονίκης με την απόλυτη βαθμολογία 42/42). Παρακαλώ να στείλετε τα σχόλια, τις παρατηρήσεις και τις προτάσεις σας στον συγγραφέα nrapanos@gmail.com

Άσκηση

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABC ($\angle A = 90^\circ$), η ευθεία l που είναι η από το C παράλληλη προς την AB και κύκλος $G(O, R)$ εξωτερικά του τριγώνου. Ένα σημείο D κινείται πάνω στην πλευρά AC . Έστω

- $E = l \cap BD$
- M : το μέσο του τμήματος AD
- A_1, B_1 : τα σημεία τομής της ευθείας EM με τον κύκλο G

Να αποδείξετε ότι το περίκεντρο του τριγώνου A_1B_1O κινείται πάνω σε μια σταθερή υπερβολή.

Απόδειξη

Αρχικά θα αποδείξουμε (με δύο τρόπους) ότι η ευθεία EM εφάπτεται σταθερού κύκλου και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στο κυρίως πρόβλημα.

1ος Τρόπος (Σωτήρης Λουρίδας)

Θεωρούμε σημείο Z της ευθείας l έτσι ώστε το τετράπλευρο $ACZB$ να είναι τετράγωνο και C_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Αν $T = DZ \cap C_1$, $E' = TM \cap l$ και $N = TM \cap C_1$, θα δείξουμε ότι $E = E'$. Σημειώνουμε $\angle CAT = w$ και έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- $\angle ATZ = 90^\circ$ γιατί η AC είναι διάμετρος του κύκλου
- $\angle TMC = 2w \implies$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν αυτό το θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι ο σταθερός κύκλος G και ο μεταβλητός κύκλος C_2 συνεχώς εφάπτονται.

Λόγω αυτού έχουμε: $FL = r + \rho$ και $FO = \rho$, άρα $FL - FO = r = ct$ άρα το η διαφορά των αποστάσεων του F από δύο σταθερά σημεία (O, L) είναι σταθερή! Συνεπώς το F κινείται πάνω σε μία υπερβολή.

Σημείωση Παραπάνω θεωρήσαμε ότι ο κύκλος C_3 εφάπτεται του G εξωτερικά χωρίς να είναι σίγουρο... Παρ' όλα αυτά δεν δημιουργείται πρόβλημα στην απόδειξη ακόμα και σε αντίθετη περίπτωση. Μπορείτε να σκεφθείτε γιατί;

