ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025-26

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΥΛΗ: ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 4.1 – 4.4 ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω x μία μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x;

Α2) Ποια πολυώνυμα ονομάζονται σταθερά και ποιο πολυώνυμο λέγεται μηδενικό;

Α3) Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ έχει παράγοντα της μορφής $\mathrm{x}-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(\mathrm{x})$, δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{P}(\rho)=0$.

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης $2\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+10=0$ είναι οι αριθμοί $-1,\ -2,\ -5$ και -10

ii) Αν σε μία διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο ισούται με 1, τότε η διαίρεση αυτή είναι τέλεια και ο διαιρέτης $\delta(\mathrm{x})$ είναι παράγοντας του διαιρετέου $\Delta(\mathrm{x})$.

iii) Για οποιαδήποτε δύο μη μηδενικά πολυώνυμα $\mathrm{P}(\mathrm{x}),\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ ισχύει ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $\mathrm{P}(\mathrm{x})\cdot\mathrm{Q}(\mathrm{x})$ είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ και $\mathrm{Q}(\mathrm{x})$.

iv) Η πολυωνυμική εξίσωση $-\mathrm{x}^5+2\mathrm{x}^4+3\mathrm{x}^2-1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1

v) Ο ακέραιος 2025 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^2-2026=0$

Μονάδες: 4+4+7+5×2=25

ΘΕΜΑ Β

Α) Δίνονται τα πολυώνυμα $\mathrm{A}(\mathrm{x})=3\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2-2$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2+\frac{4}{5}\mathrm{x}-\frac{16}{5}$. Να βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})=2\mathrm{A}(\mathrm{x})-5\mathrm{B}(\mathrm{x})$.

Β) Αν $\mathrm{P}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+12$, τότε:

i) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):x$ και να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο x δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$ και να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο x^2-4 είναι παράγοντας του $P(x)$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

iii) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x)=P(2)x^3+P(3)x^2+P(-1)x+\sqrt{2}$. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου $R(x)=[Q(x)]^2$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες: 5+6+9+5=25

ΘΕΜΑ Γ

Έστω το πολυώνυμο $Q(x)=-x^3+\alpha x^2+\beta x-2$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε το -2 να είναι ρίζα του και η τιμή του για $x=1$ να είναι ίση με -6. Δίνεται επίσης το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-2x^3-3x^2-x-2$.

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=-1$.

Β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία τα πολυώνυμα $R(x)=(\lambda^2+\lambda)x^4+\lambda x^3-3x^2-x+2\lambda+2$ και $P(x)$ είναι ίσα.

Γ1) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<Q(x)-2x$

Γ2) Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner ή με όποιον άλλο τρόπο επιθυμείτε, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το γινόμενο $(-x-1)(-x+2)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

Γ3) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x^2)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$ για καμία τιμή του $\rho\in\mathbb{R}$.

Μονάδες:4+4+6+6+5=25

ΘΕΜΑ Δ

Α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x}{x-2}<-\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (1)

Β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=\kappa\sqrt{x^3+1}$ και $h(x)=(\lambda^2-5\lambda+6)x^2+(\lambda^2-6\lambda+9)x+\lambda-1$, όπου $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η συνάρτηση $h(x)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και
- Οι γραφικές παραστάσεις των g και h τέμνονται πάνω στον άξονα των y

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$

ii) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία, τα οποία και να βρείτε. Στη συνέχεια να αιτιολογήσετε γιατί αυτά τα σημεία είναι συνευθειακά.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^3+1} \geq x+1 \ (2)$

Γ) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\sqrt{\alpha^3+1} < \alpha+1$ και $\frac{\beta}{\beta-2} > -\frac{\beta^2-1}{\beta+1}$. Έστω επίσης f μία γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η τιμή $f(\alpha)$ ισούται με τη μικρότερη λύση της ανίσωσης (2) και
- Η τιμή $f(\beta)$ ισούται με τη μοναδική θετική ακέραια λύση της ανίσωσης (1)

Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες:5+4+3+5+4+4=25